

論文97-34S-2-8

# GMRF 모델의 안정성과 합성 영상과의 관계에 관한 연구

## (A Study on the Relation between Stationarity and Synthesized Images for GMRF)

金星二\*, 崔潤植\*\*

(Sung-Yi Kim and Yoonsik Choe)

### 요 약

Markov random field 모델은 texture 영상의 분할과 영상 복원과 같은 분야에 폭넓게 사용되어져 왔다. 본 논문에서는 MRF 모델 가운데서 가장 많이 사용되고 있는 Gauss-Markov random field 모델에서 파라미터의 안정성과 합성 방법에 따른 영상의 변화에 대해서 다룬다. GMRF 모델은 wide-sense Markov 조건을 만족시키므로 AR 표현을 가지며 동시에 strict-sense Markov 조건도 만족시키므로 Gibbs 분포를 가지므로 두 가지 측면에서의 접근이 가능하다. 따라서 본 논문에서는 이러한 두 가지 접근 방식으로 합성한 영상이 파라미터의 안정성과 관계가 있음을 보이고 1차와 isotropic 2차 모델에서의 파라미터의 안정 영역을 구하였다.

### Abstract

Markov random field models have extensively used in applications such as image segmentation and image restoration. In this paper, we consider the relation between the stationarity of parameters and the synthesized images for Gauss-Markov random field which has the most popularly used among many MRF models. GMRF model, which is both wide-sense Markov and strict-sense Markov, has AR representations and is also a kind of Gibbs distribution. Therefore, we may approach in aspect of both AR models and Gibbs models. We show the relation between the stationarity of parameters and the images which are synthesized by two approaching methods and derive the stationary regions of parameters in 1st order and isotropic 2nd order case.

### I. 서 론

확률적 영상 모델 가운데서 Markov random field 모델들은 오래 전부터 영상 분할<sup>[1], [2]</sup>, 영상 복원<sup>[3]</sup>, 영상 분류<sup>[4]</sup>, 영상 합성<sup>[5]</sup>, 영상 압축<sup>[5]</sup>, 경계선 검출<sup>[6]</sup>과 같은 다양한 영상신호처리 문제에 성공적으로 사용되어져 왔는데 특히 80년대 이후로는 Markov random field와 Gibbs 분포의 동등함(equivalence)을 이용하여 영상신호처리 문제들을 통계적 추정 방법

으로 해결한 논문들이 많이 발표되었다.

하지만 Markov random field로 불리우는 많은 모델들은 하나의 모델을 사용해서 문제를 해결하는 경우가 많아서 MRF 모델의 전반적이고 명확한 이해가 상당히 어렵다. 특히 Autoregressive (AR) 표현을 가지는 wide-sense Markov (WSM) 모델과 Gibbs 분포를 가지는 strict-sense Markov (SSM) 모델은 문제에 대한 접근 방법이 서로 상이하여서 동시에 이러한 문제를 다룬 논문은 없었다.

그러므로 본 논문에서는 AR 표현을 가지는 WSM 모델이고 동시에 Gibbs 분포를 가지는 SSM 모델인 Gauss-Markov random field(GMRF)에서 WSM으로써의 접근방식과 SSM으로써의 접근방식에 대한 비교 연구를 영상 합성 측면에서 한다.

\* 正會員, 三星電氣

(Samsung Electro-Mechanics Co., Ltd., Research &amp; Development Center)

\*\* 正會員, 延世大學校 電氣工學部

(Dept. of Electrical Eng., Yonsei Univ.)

接受日字: 1996年1月31日, 수정완료일: 1997年1月4日

본 논문의 성과는 GMRF 모델에서 WSM 모델과 SSM 모델과의 관계에 대한 고찰과 1차와 isotropic 2차 모델에서의 파라미터의 안정영역을 구하고 실험을 통하여 두 가지 접근 방식을 통한 합성 영상을 안정 영역의 파라미터를 주었을 때와 불안정 영역의 영상을 보임으로써 안정성과 관계가 있음을 보인다. 그러므로 GMRF 모델에서 영상의 여러 문제들을 해결 하고자 할 때 두 가지 접근 방식을 동시에 사용할 경우에는 추정된 파라미터의 안정성 여부가 대단히 중요하다.

## II. Markov Random Field

### 1. Random Field 모델

Random field 모델은 영상의 픽셀들을 난변수 (random variable, r.v.)로 보고 확률적인 방법으로 영상신호를 처리하는 모델이다. 직각 격자  $L$ 은  $L = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq M\}$ 인 유한 격자와  $L = \{(i, j) \mid i, j \text{는 정수}\}$ 인 무한 격자로 나눌 수 있고 디지털 영상은 직각 격자  $L$ 위에서 정의되는 난변수들의 특정 표본으로 볼 수 있다. 픽셀이 가질 수 있는 값 (state)들의 집합  $A$ 는  $A = \{0, 1, 2, \dots, G-1\}$ (여기서  $G$ 를 그레이-레벨)인 경우와  $A = \mathbf{R}$  ( $\mathbf{R}$ 은 실수 집합)인 경우로 나눌 수 있다.  $x_{i,j}$  또는  $x(i, j)$ 를 영상의 왼쪽 위에서  $i$ 번째 행,  $j$ 번째 열에서의 r.v.의 실현이라고 하자. 기호를 간단히 하기 위해서  $x(i, j)$ 를  $s = j + (i-1)M$ 라고 하면  $x_s$  또는  $x(s)$ ,  $s = 1, 2, \dots, N$  (여기서  $N = M \times M$ )로 나타낼 수 있다. 표본 공간  $\Omega$ 는 영상 픽셀  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ 의 가능한 모든 실현 (realizations)의 집합을 말한다. 격자 집합  $L$ 의 부분 집합  $\eta = \{\eta_s, s \in L, \eta_s \subset L\}$ 가 두 가지 조건, 즉 (i)  $s \notin \eta_s$ , (ii)  $s \in \eta_s \Leftrightarrow r \in \eta_s$ 을 만족하면 이웃 시스템 (neighborhood system)이라 한다. 그리고 직각 격자의 모든 점에서  $\eta_s = \{(s+r) \mid s \in L, r \in N\}$ 을 만족하는 집합  $N$ 이 존재한다면 이것을 이웃 집합이라 하자.

5	4	3	4	5
4	2	1	2	4
3	1	x	1	3
4	2	1	2	4
5	4	3	4	5

그림 1. 양방향 이웃 집합  
Fig. 1. Bilateral Neighbor Set.

그림 1은 양방향 모델에서의 이웃 집합을 나타내는데 숫자는 차수에 따라 포함되는 이웃 집합의 범위를 나타낸다. 예를 들어 양방향 모델에서 1차의 경우에 이웃 집합은  $N = \{(0, 1), (1, 0), (0, -1), (-1, 0)\}$  이 된다.

### 2. Markov Random Field의 분류

Markov random field 모델은 여러 가지 측면에서 분류할 수 있지만 영상 합성 측면에서는 그림 2와 같이 분류할 수 있다. 일반적으로 MRF 모델이라면 Strict-sense Markov 모델을 말하며 Gauss-Markov random field 모델은 양방향 wide-sense Markov 모델이고 동시에 연속 상태 strict-sense Markov 모델이다.

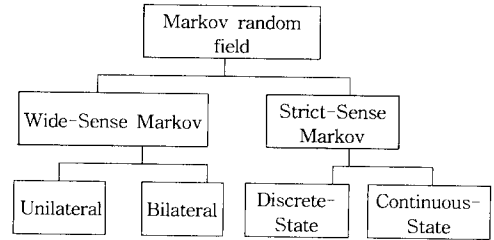


그림 2. Markov random field의 분류  
Fig. 2. Taxonomy of Markov random field.

#### 1) Strict-Sense Markov (SSM) 모델

$p(Y|X)$ 은  $X$ 의 값이 주어졌을 때  $Y$ 의 조건부 확률을 나타낸다. 여기서 확률은 r.v.이 연속적인 값을 가지면 확률밀도함수를 r.v.이 이산적인 값을 가지면 확률분포함수를 의미한다.

#### ■ 정의 1. (Strict-Sense) Markov 조건 <sup>[7]</sup>

격자  $L$  위의 모든  $x(s)$ 에 대하여

$$p(x(s) \mid x(r), s \neq r, r \in L) = p(x(s) \mid x(r), r \in \eta_s) \quad (1)$$

을 만족하면 이웃 시스템  $\eta_s$ 에 대하여 (strict-sense) Markov 조건을 만족한다고 한다.

#### ■ 정의 2. $\{x(s), s \in L\}$ 가 $(L, \eta)$ 에 대해서 (strict-sense) Markov 조건을 만족시키면 (strict-sense) Markov random field라 한다.

$(L, \eta)$ 와 관련된 클릭(clique)  $c$ 는  $L$ 의 부분 집합으로 다음과 같은 두 가지 조건을 만족한다. (i)  $c$ 는 단일 픽셀이거나 또는 (ii) 임의의  $r \neq s$ 에 대해서  $r \in c$ 이고  $s \in c$ 이면  $r \in \eta_s$ 이다.

Hammersley-Clifford 정리<sup>[8]</sup>에 의해서 Markov random field는 클릭에 의해서 정의될 때 Gibbs random field (또는 Gibbs 분포)와 동등하므로 Markov random field는 Gibbs 분포에 의해서 실현을 구할 수 있다.

Gibbs 분포란 다음과 같은 형태의 확률 분포 함수를 말한다.<sup>[8]</sup>

$$p(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \frac{1}{Z} e^{-U(\mathbf{x})/T} \quad (2)$$

$U(\mathbf{x})$ 는 에너지 함수이며 다음과 같은 형태를 가진다.

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{c \in C} V_c(\mathbf{x}) \quad (3)$$

$V_c(\mathbf{x})$ 은 포텐셜(potential)이라 불리며 클릭  $c$ 만의 함수이며  $C$ 는 클릭들의 집합이다.  $Z$ 는 정규화 상수(normalizing constant)로 파티션(partition) 함수라 불린다.

$$Z = \sum_{\mathbf{x}} e^{-U(\mathbf{x})/T} \quad (4)$$

여기서  $Z$ 는  $\mathbf{x}$ 를  $G^N$ (여기서  $G$ 은 그레이 레벨의 수,  $N = M \times M$ ) 가지의 가능한 모든 실현의 경우에 대해서 식 (2)의 분자항을 더한 것이 된다. 상태 집합  $A$ 가 가질 수 있는 값이 이산적인 경우에는 이산 상태 MRF 모델이라고 하고 연속적인 모델의 경우에는 연속 상태 MRF 모델이라고 한다.

2) 양방향 Wide Sense Markov (WSM) 모델  
[9], [10]

영상 데이터 집합  $\{y(s), s \in L\}$ 이 평균이 0이고 식 (5)를 따르면 양방향 wide-sense Markov 모델이라 한다. 그러므로 일반적인 디지털 영상은 평균을 구해서 빼 주어야 한다. 즉,  $y(s) = x(s) - E[x(s)]$  이다.

$$y(s) = \sum_{r \in N} \theta_r y(s+r) + \sqrt{\nu} e(s) \quad (5)$$

여기서 이웃 집합  $N$ 은 양방향 이웃 집합이어야 한다. 안정된 노이즈 시퀀스  $\{e(s)\}$ 은 식 (6)을 만족시켜야 한다.

$$\begin{aligned} E[e(s) | \text{모든 } y(r), r \neq s] &= 0 \\ E[e(s)] &= 0 \\ E[e^2(s)] &= 1 \end{aligned} \quad (6)$$

만약  $e(s)$ 이 가우시안 분포라면 그 때 양방향 WSM 모델을 Gauss-Markov Random Field (GMRF)라

한다.

식 (5)와 식 (6)을 이용하면  $\{e(s)\}$ 의 correlation은 식 (7)과 같다는 것을 쉽게 알 수 있다.

$$E[e(s)e(r)] = \begin{cases} 1 & , s=r \\ -\theta_{s-r} & , (s-r) \in N \\ 0 & , otherwise \end{cases} \quad (7)$$

그런데  $E[e(s)e(r)] = E[e(r)e(s)]$ 이므로 파라미터  $\theta_r$ 은 다음과 같은 조건을 만족시켜야 한다.

$$\theta_{s-r} = \theta_{r-s} = \theta_{|s-r|}$$

만약 모델 파라미터가  $\theta_{i,j} = \theta_{j,i}$ 인 조건을 만족시키면 isotropic 모델이라고 한다.

직각 격자  $L$ 이 유한 격자일 경우에는 boundary 픽셀에서는 특별한 처리가 필요하게 된다. 일반적으로 많이 사용되는 방법은 toroidal boundary 조건을 사용하는 것이다. toroidal boundary 조건의 자세한 내용은 논문 [9]를 참조한다. 본 논문에서도 유한 격자에서 toroidal 경계 조건을 가정하였다.

### III. Gauss-Markov Random Field 모델

#### 1. GMRF 모델의 영상합성방법

##### 1) Strict-Sense Markov 모델로서의 영상 합성 방법

Strict-sense Markov 모델의 경우에는 영상을 합성할 때 Gibbs 분포를 이용한 확률적인 방법을 사용하는데 이산 상태 MRF 모델의 경우에는 Metropolis 알고리즘<sup>[11]</sup>이나 Gibbs sampler<sup>[12]</sup> 같은 방법을 사용하고 연속 상태 MRF인 GMRF 모델의 경우에는 Gibbs sampler의 경우에는 사용할 수 없고 Metropolis 알고리즘의 경우에는 일반화된 알고리즘을 사용하여야 한다.

논문 [3]에서는 기존의 이산 상태 모델의 알고리즘에서 그레이-레벨의 수를 증가시키면 연속 상태 모델의 실현에 수렴한다는 사실을 이용해서 영상을 합성하였다. 그러나 매번 양자화를 해야 하는 문제가 있다. 논문 [13]에서 GMRF 모델과 같은 r.v.이 연속적인 값을 가지는 경우에는 이상 상태 Metropolis 알고리즘을 수정할 것을 제한했다. 아래의 알고리즘은 GMRF의 실현을 위해서 논문 [13]의 연속 상태 MRF 모

델의 샘플링 방법을 GMRF 모델에 맞게 만든 것이다.

GMRF 모델을 위한 Metropolis 알고리즘

- ①  $M \times M$ 의 유한 격자를  $[-\sqrt{3\nu}, \sqrt{3\nu}]$ 의 uniform 분포를 가지는 랜덤 시퀀스를 발생시켜 초기화한다.
- ② 1에서  $N=M \times M$ 사이의 픽셀  $s$ 에 대해서 래스터-스캔 순서로 차례대로
  - (a)  $r(x_s, y_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \exp\left[-\frac{(y_s - x_s)^2}{2\nu}\right]$ 를 만족하는  $y_s$ 를 발생시킨다. 원래의 영상을  $x$ 라고 하고  $i$ 번째 픽셀  $x_i$ 에서  $y_i$ 로 바꾼 영상을  $y$ 라고 하자.

(b)  $s_M = \exp(-[U(y) - U(x)]_+/T)$ 를 계산한다.

(c) 확률  $s_M$ 으로 원영상  $x$ 를  $y$ 로 대체한다.

- ③ 위 과정을  $N_{iter}$ 번 반복한다.
- ④  $\{y(i, j)\}$ 은 평균이 0이고 연속적인 값을 가지므로 영상으로 만들기 위해서는 적당한 값  $\alpha$ 를 더해 주고 연속적인 변수를 이산적인 값으로 바꾸어 주는 과정을 거쳐 실제 영상으로 만들어 준다.

여기서  $[a]_+ = \max\{a, 0\}$ 를 의미한다. 영상 합성의 경우에는  $T=1$ 로 고정시킨다.

2) 양방향 Wide-Sense Markov 모델로써의 영상 합성 방법<sup>[14]</sup>

AR 표현을 가지는 wide-sense Markov 모델의 경우에는  $Z$ 변환을 통해서 스펙트럼 분포를 구할 수 있기 때문에 구해진 스펙트럼 분포를 가지도록 DFT를 이용해서 영상을 합성할 수 있다. 본 논문에서 제안한 Gauss-Markov random field 모델을 위한 고속 알고리즘을 정리하면 다음과 같다.

- ①  $M \times M$ 개의 평균 0, 분산 1인 가우시안 분포를 가지고 서로 독립인 랜덤 시퀀스  $\{w(i, j)\}$ 를 발생시키고 그것을 DFT한 것을  $\{W(k_1, k_2)\}$ 이라 하자.
- ② 아래의 식을 이용하여 유한 격자 위의 모든 점에서  $Y(k_1, k_2)$ 를 계산한다.

$$Y(k_1, k_2) = \frac{\sqrt{\nu} W(k_1, k_2)}{\sqrt{A(\xi^{k_1}, \xi^{k_2})}} \quad (8)$$

여기서  $A(\xi^{k_1}, \xi^{k_2}) = 1 - \sum_{(k, l) \in N} \theta_{k, l} \xi^{(k_1 k + k_2 l)}$ ,  $\xi = \exp[\sqrt{-1} 2\pi/M]$ 이다.

- ③  $\{Y(k_1, k_2)\}$ 를 역 DFT해서  $\{y(i, j), i, j=0, 1, \dots, M-1\}$ 을 얻는다.

- ④  $\{y(i, j)\}$ 은 평균이 0이고 연속적인 값을 가지므로 영상으로 만들기 위해서는 적당한 값  $\alpha$ 를 더해 주고 연속적인 변수를 이산적인 값으로 바꾸어 주는 과정을 거쳐 실제 영상으로 만들어 준다.

2. 1차와 isotropic 2차에서의 GMRF 모델의 파라미터의 안정성의 유도

1) GMRF 모델의 파라미터의 안정성<sup>[9], [14], [15]</sup>

GMRF 모델의 조인트 확률밀도함수를 구하면 다음과 같다.

$$p(\mathbf{y}) = \frac{\det^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\mathbf{B}}{2\pi\nu}\right)}{(2\pi\nu)^{\frac{N}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2\nu} \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y}\right] \quad (9)$$

여기서  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ (여기서  $N=M^2$ )이고 행렬  $\mathbf{B}$ 는  $M^2 \times M^2$ 의 block-circulant 행렬로 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,M} \\ B_{1,M} & B_{1,1} & \cdots & B_{1,M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1,2} & B_{1,1} & \cdots & B_{1,1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$= \text{circulant}(B_{1,1}, B_{1,2}, \dots, B_{1,M})$$

$B_{1,i}$ 는  $M \times M$ 행렬이고 circulant 행렬이며  $(B_{1,i})_{1,j}$ 가  $B_{1,i}$ 의 첫 번째 행의  $j$ 번째 열을 나타낸다고 하면

$$\begin{aligned} (B_{1,i})_{1,j} &= 1, \text{ 만약 } i=1, j=1 \\ &= -\theta_{i_1, j_1}, \text{ 만약 } (i_1, j_1) \in N \text{ 이면} \\ &\quad i_1 \bmod M = i-1 \text{ 이고} \\ &\quad j_1 \bmod M = j-1 \\ &\quad, i=1, \dots, M, j=2, \dots, M \\ &= 0, \text{ 그 이외에} \end{aligned}$$

과 같이 된다. GMRF 모델이 유효하려면 행렬  $\mathbf{B}$ 가 positive definite해야 하므로 그러려면 행렬  $\mathbf{B}$ 의 고유값  $\mu_{i,j}(i, j \in L)$ 이 모두 양수여야 한다. 행렬  $\mathbf{B}$ 의 고유값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mu_{i,j} = A(\xi^i, \xi^j) = 1 - \sum_{(k, l) \in N} \theta_{k, l} \xi^{(ik + jl)} \quad (11)$$

여기서  $\xi = \exp[\sqrt{-1} 2\pi/M]$ 이다.

2) 1차 모델에서의 파라미터의 유효 영역의 유도  
1차의 경우 안정된 파라미터의 유효 범위는 다음과 구할 수 있다. 1차 모델의 경우 식 (11)을 전개하면 다

음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \mu_{i,j} &= 1 - \theta_{0,1}(\xi^i + \xi^{-i}) - \theta_{1,0}(\xi^i + \xi^{-i}) \\ &= 1 - 2\theta_{0,1} \cos \frac{2\pi j}{M} - 2\theta_{1,0} \cos \frac{2\pi i}{M} \quad (0 \leq i, j \leq M-1) \end{aligned} \quad (12)$$

식 (12)에서  $i$ 와  $j$ 에 각각 0에서  $M-1$ 의 값을 대입하고 그것이 0보다 크다고 놓으면 우리는  $M^2$ 개의 부등식을 얻는다.  $M^2$ 개의 동시에 만족하는 파라미터의 영역을 구하면  $\theta_{0,1}, \theta_{1,0}$ 는 그림 3과 같은 범위 안에 있어야 됨을 알 수 있다. 경계선은 포함되지 않는다.

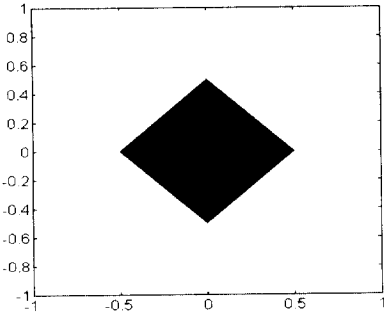


그림 3. 1차 모델의 경우의  $\theta_{0,1}, \theta_{1,0}$ 의 유효 범위  
Fig. 3. In 1st order, the valid region of  $\theta_{0,1}, \theta_{1,0}$ .

3) 2차 모델에서의 파라미터의 유효 영역의 유도  
2차 모델일 경우에는 식 (11)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \mu_{i,j} &= 1 - \theta_{0,1}(\xi^i + \xi^{-i}) - \theta_{1,0}(\xi^i + \xi^{-i}) \\ &\quad - \theta_{1,-1}(\xi^{i-j} + \xi^{-i+j}) - \theta_{1,1}(\xi^{i+j} + \xi^{-i-j}) \\ &= 1 - 2\theta_{0,1} \cos \frac{2\pi j}{M} - 2\theta_{1,0} \cos \frac{2\pi i}{M} \\ &\quad - 2\theta_{1,-1} \cos \frac{2\pi(i-j)}{M} - 2\theta_{1,1} \cos \frac{2\pi(i+j)}{M} \end{aligned} \quad (13)$$

$(0 \leq i, j \leq M-1)$

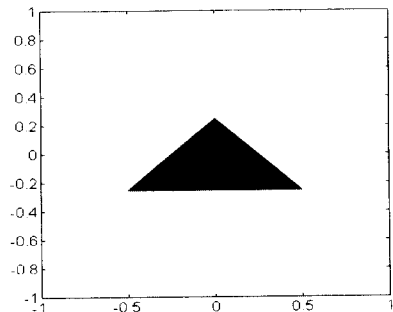


그림 4. isotropic 2차 모델의  $\theta_{0,1}, \theta_{1,1}, \theta_{1,-1}$ 의 유효 범위  
Fig. 4. In isotropic 2nd order, the valid region of  $\theta_{0,1}, \theta_{1,1}, \theta_{1,-1}$ .

그러나 2차 이상의 경우에는 파라미터가 4개 이상이 되기 때문에 1차에서와 같은 파라미터의 유효 범위를 구할 수 없다. 만약 2차에서 isotropic 모델을 가정하면 모델 파라미터는 2개가 되어서 유효 파라미터의 범위를 구할 수 있다. 즉,  $\theta_{0,1} = \theta_{1,0}, \theta_{1,-1} = \theta_{1,1}$ 를 가정하고 2.1에서와 마찬가지로  $M^2$ 개의 부등식을 풀면 그림 4와 같은 모델 파라미터의 유효 범위를 얻을 수 있다.

#### IV. 실험 및 고찰

##### 1. 1차 모델에서의 안정성과 합성 영상의 관계에 관한 실험

2.2절에서 구한 1차 모델에서의 결과를 이용해서 파라미터의 안정영역 내에 있는 파라미터를 주고 합성한 영상과 불안정 영역에서 합성한 영상을 DFT를 이용한 주파수 영역의 방법과 일반화된 Metropolis 알고리즘을 사용해서 각각 합성한 영상을 그림 5에 보였다. 그림 5의 (a), (b)는 안정영역의 파라미터인  $\theta_{1,0} = -0.249, \theta_{0,1} = 0.249$ 를 주었을 경우의 합성 영상이고, (c), (d)는 불안정 영역의 파라미터인  $\theta_{1,0} = -0.32, \theta_{0,1} = 0.32$  주었을 경우의 합성 영상이다. 그리고 그림 5의 (a), (c)는 DFT를 사용해서 주파수 영역에서 합성된 영상, (b), (d)는 일반화된 Metropolis 알고리즘을 사용한 영상으로 100번 알고리즘을 반복 적용한 영상이다. 그림 5의 결과에서 알 수 있는 바와 같이 안정 영역에서 합성한 영상의 경우에는 대단히 유사한 실험 결과를 나타내지만 불안정 영역의 파라미터를 주고 합성했을 경우에는 서로 상이한 실험 결과를 보였다. 좀더 객관적으로 보이기 위해서 그림 5의 (a), (b), (c), (d) 영상의 각각의 히스토그램을 그림 7의 (a), (b), (c), (d)에 보였다.

그림 7에서 알 수 있는 바와 같이 불안정 영역의 합성 영상의 히스토그램 (c)와 (d)는 완전히 다르다. 이 실험의 결과로써 모델의 안정 영역 내에 있을 경우에는 두 가지 방법을 동시에 사용해서 문제에 접근할 수 있지만 불안정 영역에 있을 경우에는 그럴 수 없다는 것을 알 수 있다.

##### 2. Isotropic 2차 모델에서의 안정성과 합성 영상의 관계에 관한 실험

2.3절에서 구한 isotropic 2차 모델에서의 결과를 이

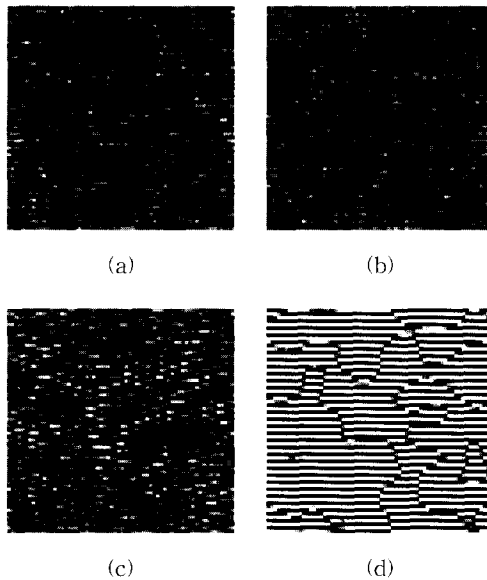


그림 5. 1차 모델에서 안정성과 합성 영상의 관계; (a), (b)는 안정영역의 파라미터인  $\theta_{1,0} = -0.249$ ,  $\theta_{0,1} = 0.249$ 를 주었을 경우의 합성 영상, (c), (d)는 불안정 영역의 파라미터인  $\theta_{1,0} = -0.32$ ,  $\theta_{0,1} = 0.32$  주었을 경우의 합성 영상; (a), (c)는 DFT를 사용해서 주파수 영역에서 합성된 영상, (b), (d)는 일반화된 Metropolis 알고리즘을 사용한 영상으로 반복회수는 100번

Fig. 5. In 1st order, the relation between stationarity and synthesized images; (a), (b) the synthesized images given the parameters in valid region,  $\theta_{1,0} = -0.249$ ,  $\theta_{0,1} = 0.249$ , (c), (d) the synthesized images given the parameters out of valid region,  $\theta_{1,0} = -0.32$ ,  $\theta_{0,1} = 0.32$ ; (a), (c) the synthesized images using DFT algorithm, (b), (d) the synthesized images using continuous state Metropolis algorithm when iteration number is 100.

용해서 1절에서와 마찬가지로의 실험을 해보았다. 그림 6의 (a), (b)는 안정 영역의 파라미터인  $\theta_{1,0} = \theta_{0,1} = 0.249$ ,  $\theta_{1,-1} = \theta_{1,1} = -0.249$ 를 주었을 경우의 합성 영상이고, (c), (d)는 불안정 영역의 파라미터인  $\theta_{1,0} = \theta_{0,1} = 0.3$ ,  $\theta_{1,-1} = \theta_{1,1} = -0.32$  주었을 경우의 합성 영상이다. 그리고 그림 6의 (a), (c)는 DFT를 사용해서 주파수 영역에서 합성된 영상, (b), (d)는 일반

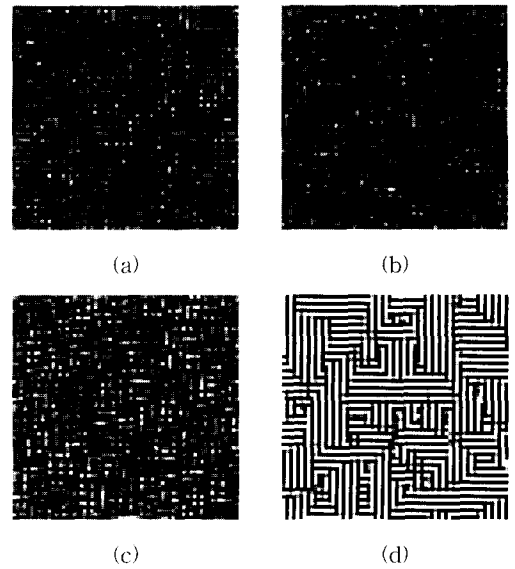
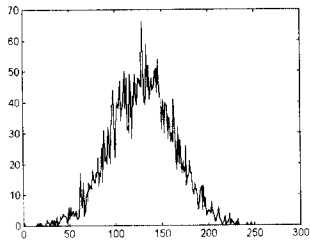


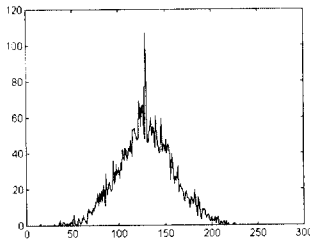
그림 6. Isotropic 2차 모델에서 안정성과 합성 영상의 관계; (a), (b)는 안정 영역의 파라미터인  $\theta_{1,0} = \theta_{0,1} = 0.249$ ,  $\theta_{1,-1} = \theta_{1,1} = -0.249$ 를 주었을 경우의 합성 영상, (c), (d)는 불안정 영역의 파라미터인  $\theta_{1,0} = \theta_{0,1} = 0.3$ ,  $\theta_{1,-1} = \theta_{1,1} = -0.32$  주었을 경우의 합성 영상; (a), (c)는 DFT를 사용해서 주파수 영역에서 합성된 영상, (b), (d)는 일반화된 Metropolis 알고리즘을 사용한 영상으로 반복회수는 100번.

Fig. 6. In isotropic 2nd order, the relation between stationarity and synthesized images; (a), (b) the synthesized images given the parameters in valid region,  $\theta_{1,0} = \theta_{0,1} = 0.249$ ,  $\theta_{1,-1} = \theta_{1,1} = -0.249$ , (c), (d) the synthesized images given the parameters out of valid region,  $\theta_{1,0} = \theta_{0,1} = 0.3$ ,  $\theta_{1,-1} = \theta_{1,1} = -0.32$ ; (a), (c) the synthesized images using DFT algorithm, (b), (d) the synthesized images using continuous-state Metropolis algorithm when iteration number is 100.

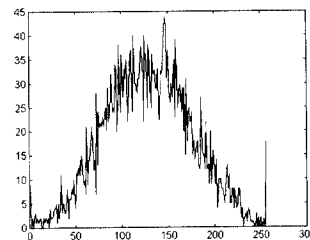
화된 Metropolis 알고리즘을 사용한 영상으로 반복회수는 100번이다. 1절에서의 결과와 마찬가지로 안정 영역에서는 유사한 실현 결과를 보이지만 불안정 영역에서는 다른 실현 결과를 보인다. 이러한 결과는 다른 차수의 모델 파라미터의 실험을 통해서도 확인할 수 있다.



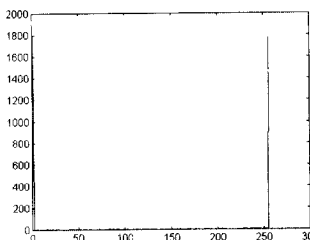
(a)



(b)



(c)



(d)

그림 7. 그림 5의 (a), (b), (c), (d) 영상의 각각의 히스토그램

Fig. 7. The histograms of (a), (b), (c), (d) of Fig. 5.

## V. 결 론

본 논문에서는 Markov random field 모델 가운데서 가장 폭넓게 사용되고 있는 Gauss-Markov

random field 모델에서 파라미터의 안정성과 두 가지 접근 방식에 의한 합성 방법에 따른 영상과의 관계를 알아보았다. GMRF 모델은 AR 표현을 가지는 wide-sense Markov이면서 동시에 strict-sense Markov 모델이므로 주파수 영역에서 DFT를 이용한 합성 방법과 Gibbs 분포에 의한 확률적인 방법을 이용한 영상 합성이 모두 가능하였다.

그러나 두 가지 방법의 합성 영상이 항상 유사한 것이 아니라 안정성과 관계가 있다는 것을 보였다. 즉, 안정 영역의 파라미터가 주어졌을 때는 두 가지 방법의 합성 영상이 유사하지만 불안정 영역의 파라미터가 주어졌을 때는 두 가지 방법의 영상이 상이하였다. 그리고 1차 모델과 isotropic 2차 모델에서의 파라미터의 안정 영역을 구하였다.

기존의 논문에서는 논의되지 않았던 GMRF 모델의 AR 모델로서의 접근 방식과 Gibbs 분포의 일종으로서의 접근 방식에 대해 동시에 다룸으로써 두 가지 방법을 한 문제에 동시에 적용해서 문제를 해결할 경우에 추정된 파라미터가 안정 영역에 있어야 한다는 것을 보였다. 특히 최소 자승법을 이용해서 natural texture 영상의 모델 파라미터를 구하면 불안정 영역에 있는 경우가 흔하므로 그것을 안정 영역으로 바꾸어 주어야 한다.

## 참 고 문 헌

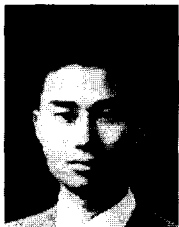
- [1] B. S. Manjunath, T. Simchony, and R. Chellappa, "Stochastic and deterministic networks for texture segmentation," *IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-38, no. 6, 1990.
- [2] H. Derin and H. Elliott, "Modeling and segmentation of noisy and textured images using Gibbs random fields," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. PAMI-9, no. 1, 1987.
- [3] T. Simchony, R. Chellappa, and Z. Lichtenstein, "Relaxation algorithms for MAP estimation of gray-level images with multiplicative noise," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-36, no. 3, pp. 608-613, 1990.
- [4] R. Chellappa and S. Chatterjee, "Classification of textures using Gaussian Markov random fields", *IEEE Trans.*

- Acoust., Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-33, No. 4, 1985.
- [5] R. Chellappa, S. Chatterjee and R. Bagdasarian, "Texture synthesis and compression using Gaussian-Markov random field models," *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, vol. SMC-15, no. 2, pp. 298-303, 1985.
- [6] D. Geman, S. Geman, C. Graffigne, and P. Dong, "Boundary detecting by constrained optimization," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. PAMI-12, no. 7, pp. 609-628, 1990.
- [7] H. Derin and P. A. Kelly, "Discrete-index Markov-type random processes," *Proc. IEEE*, vol. 77, no. 10, pp. 1485-1510, 1989.
- [8] J. Besag, "Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems," *J. Royal Statist. Soc.*, series B, vol. 36, pp. 192-236, 1974.
- [9] R. Kashyap and R. Chellappa, "Estimation and choice of neighbors in spatial-interaction models of images," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-29, no. 1, 1983.
- [10] J. W. Woods, "Two-dimensional discrete Markovian random fields," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-18, pp. 232-240, 1972.
- [11] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller, "Equations of state calculations by fast computing machines," *J. Chem. Phys.*, vol. 21, pp. 1087-1091, 1953.
- [12] S. Geman and D. Geman, "Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and Bayesian restoration of images," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* vol. PAMI-6, no. 6, 1984.
- [13] S. B. Gelfand and S. K. Mitter, "On sampling methods and annealing algorithms," in *Markov random Fields- Theory and Applications* (R. Chellappa and A. Jain, Eds.), New York : Academic, pp. 499-515, 1993.
- [14] R. L. Kashyap and Kie-bum Eom, "Robust image models and their applications," *Advances in Electronics and Electron Physics*, Academic Press, Inc., vol. 70, pp. 79-157, 1988.
- [15] 김성이, "Markov random field 모델의 영상 합성 방법에 관한 비교 연구," 연세대학교 대학원 전기공학과 석사논문

---

 저 자 소 개
 

---



金星二(正會員)

1971년 8월 7일생. 1994년 연세대학교 공과대학 전기공학과 졸업. 1996년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 현재 삼성전기 근무. 주관심분야는 영상모델링 및 합성, 신호처리



崔潤植(正會員)

1957년 2월 12일생. 1979년 연세대학교 공과대학 전기공학과 졸업. 1984년 Case Western Reserve 대학 대학원 시스템 공학과 졸업(석사). 1987년 Pennsylvania State University, Univ. Park, 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1990년 Purdue University, West Lafayette, 대학원 전기공학부 졸업(박사). 1990년 ~1993년 (주)현대전자산업 산업전자연구소 책임연구원. 1993년 ~ 현재 연세대학교 전기공학과 조교수. 주관심분야는 영상신호처리, 컴퓨터시각, 멀티미디어 통신