論文97-34S-8-8

선형 샘플치 시스템의 출력 조절

(Output Regulation of Linear Sampled-Data Systems)

鄭 善 太 *

(Sun-Tae Chung)

요 약

선형 시스템의 출력 조절 문제에 대한 샘플링 영향을 조사하였다. 견실 출력 조절가능성과 단일 입출력 시스템의 출력 조절가능성은 보존되나, 일반적으로 출력 조절가능성은 보존되지 않음이 밝혀졌다. 이 결과는 보다 개선된 근사 샘플치 출력 조절기를 구할 필요가 있다는 것을 암시한다.

Abstract

The effects of time-sampling on linear output regulation problem is investigated. It is found that the solvability of linear output regulation problem is generally not robust with respect to time-sampling although the solvability of that for single input and single output linear systems and the solvability of linear robust output regulation problem are preserved under time-sampling. The results imply that one needs to seek a better approximate sampled-data output regulator.

I. 서 론

전체 폐루프 시스템을 안정화하면서, 외란을 제거하고 출력이 외부 기준입력을 추종하도록 하는 '출력 조절(output regulation)' 문제는 가장 기본적인 제어의 문제의 하나로 선형 시스템 뿐만아니라 비선형 시스템에 대해서도 많은 연구가 진행되고 있다[1,2,4,5,6]. 그런데, 주어진 연속시간 시스템에 대해 출력 조절을 달성하는 출력 조절기(output regulator)를 실제로 구현하게 될 때 설계된 연속시간 출력 조절기는 그 제어기 구조의 복잡성으로 인한 구현의 어려움 또는 경제성 등의 여러가지 이유로 디지탈 구현을 고려하게 되는데, 이는 보통 다음의 두 가지 방법으로 한다.

첫째, 연속시간 시스템에 대해 얻어진 연속시간 조절기를 이산화하여 디지탈 조절기 구현.

둘째, 주어진 연속시간 시스템을 이산화 하여 얻어진 샘플치 시스템에 대해 직접 디지탈 조절기 설계.

전자의 경우, 이산화 하는 샘플링 시간이 매우 짧게 되면 연속시간 제어기와 유사한 성능을 갖게 되리라는 연속성의 원리를 바탕으로 흔히 많이 이용되는 접근방법이나, 이는 원하는 제어 시스템의 성능에 좀 더 접근하는 성능을 얻기 위하여 매우 빠른 샘플링을 요구하며, 또한 샘플링시간에 대해 어느 정도의 근사적인 해인가를 알기가 어렵다. 이에 반해, 후자의 경우, 원래의 연속시간 선형 시스템을 이산화한 샘플치 모델에 대한 디지탈 조절기 설계는 샘플링 시간이 문제의 정의에 포함되어 샘플링 효과를 직접적으로 다룰 수 있고, 매우 빠른 샘플링을 필요하지 않아, 후자의 방법이 디지탈 조절기 구현시 여러가지 장점을 가지고 있다.

그런데, 후자의 경우, 연속시간 시스템에 가능했던 출력 조절기 설계가 원래의 연속시간 시스템을 샘플링하여 얻어진 샘플치 시스템에 대해서도 가능한 것인가를 조사하는 것이 필요하게 된다. 따라서, 본 논문에서

* 正會員, 崇實大學校 電子工學科

(Dept. of Electronic Eng., Soongsil Univ.)

※ 본 연구는 한국과학재단(93 핵심전문연구 : 과제번호 KOSEF 931-0900-003-2)의 연구비 지원으로 수행되었으며, 지원에 감사드립니다.

接受日子: 1996年12月20日, 수정완료일: 1997年7月23日

는 선형 시스템의 출력 조절 문제에 대한 샘플링 영향을 조사한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제2절에서는 선형 시스템의 출력 조절의 문제와 그 해에 대해 연속시간과 이산시간 각각에 대해 설명하며, 제3절에서는 선형 시스템의 출력 조절의 문제에 대한 샘플링 영향에 대한 본 논문의 주요한 결과가 기술되며, 마지막으로 제4절에 결론이 주어진다.

Ⅱ. 선형 시스템의 출력 조절

출력 조절(output regulation)의 목적은 전체 폐루프시스템이 안정을 유지하면서 궁극적으로 외란을 제거하고 출력이 기준신호를 추종하도록 하는 ($\lim_{t\to\infty} e(t)=0$) 제어기(regulator)를 설계하는 것이다. 출력 조절을 위해 본 논문에서 고려한 선형 시스템은 다음과 같다.

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}= Ax+Bu+Pw & \text{(1a)} \\ \dot{w}=Sw & \text{(1b)} \\ e=Cx+Qw & \text{(1c)} \end{cases}$$

여기에서 각 식의 의미는 다음과 같다. 식 (1a) 는 상태 $x\in R^n$, 입력 $u\in R^m$ 을 가지며, Pw ($w \in R^s$) 로 나타나는 외란의 영향을 받는 플랜트를 기술한다. 식 (1c) 는 실제 플랜트 출력 Cx 와 실제 플랜트 출력이 추종하여야 할 기준 입력 Qw 사이의 에러 $e\in R^p$ 을 나타내며, 식 (1b) 는 외부시스템(exo-system)으로써, 외란과 (또는) 기준 신호의 동력학 시스템을 모델화한 것이다. A, B, P, S, C, Q 는 각각 적절한 차원을 갖는 상수 행렬들이다.

이 때, $\dot{x}=Ax$ 가 안정이면, 시스템 Σ 는 '내재적으로 안정하다(*internally stable*)'고 한다. 또, 임의의 초기 상태들 $x(0), w(0)$ 과 입력 $u=0$ 에 대해, $\lim_{t\to\infty} e(t)=0$ 이면, 시스템 Σ 는 '출력 조절됨(*output regulated*)'을 만족한다고 한다. 시스템 Σ 가 '내재적으로 안정' 하고, '출력 조절됨'을 만족하면, 이는 이미 시스템 Σ 가 안정되어 있고 궁극적으로 외란을 제거하고 출력이 기준입력을 추종하므로 따로 제어기를 설계하지 않아도(즉, $u=0$) 출력조절의 목적을 달성한다. 그런데, 시스템 Σ 가 내재적으로 안정하지 않고, 출력 조절됨도 만족하지 않을 때, 우리는 다음의 보상기 Γ 를 추가하여 이 출력 조절의 목적을 만족하도록 할 수 있다.

$$\Gamma : \begin{cases} \dot{z}=Fz+Ge \\ u=Hz \end{cases} \tag{2}$$

폐루프 시스템은 다음의 시스템 Σ_c 와 같다.

$$\Sigma_c : \begin{cases} \dot{x}=Ax+BHz+Pw \\ \dot{z}=Fz+GCx+GQw \\ \dot{w}=Sw \\ e=Cx+Qw \end{cases}$$

이때 $w=0$ 인 폐루프 시스템 Σ_c 가 '내재적으로 안정' 하고 (즉, $\dot{x}=Ax+BHz$, $\dot{z}=Fz+GCx$ 인 시스템이 안정), '출력 조절됨' (즉, 임의의 초기상태 $x(0), z(0), w(0)$ 에 대해 $\lim_{t\to\infty} e(t)=0$ 을 만족)일 때, 우리는 보상기 Γ 을 '조절기(regulator)'라 하고, 이러한 조절기를 찾는 문제를 '출력 조절 문제' 라 한다. 또한, 출력 조절 문제를 풀수 있을 때, 시스템 Σ 는 '출력 조절 가능(output regulatable)'이라고 한다.

이제, 출력 조절됨과 출력 조절가능의 해의 존재조건에 대해 정리 기술한다[5].

보조정리 2.1[5]: 시스템 Σ 에서 A 가 안정할 때, 다음의 행렬 방정식 (3)을 만족하는 Π 가 존재하면, 시스템 Σ 는 출력조절된다.

$$A\Pi+P=\Pi S \tag{3a}$$

$$C\Pi+Q=0 \tag{3b}$$

또, 만약 S 가 반안정(antistable) (즉, S 의 고유치가 폐우평면에 존재)일 때 이 조건은 또한, 필요조건이 된다.

추후의 논의의 이해를 위해 보조정리 2.1의 증명을 여기에 기술한다. 기하학적인 증명이 좀 더 문제의 본질을 이해하는 데 도움이 되리라 판단하여[6], 여기서는 [5] 에서 주어진 대수적 방식의 증명과는 다른 기하학적 방식의 증명을 제시한다.

(증명)(충분조건) 식 (3)을 만족하는 Π 에 대해, $x=\Pi w$ 로 기술되는 R^{n+s} 의 부분공간을 V , 자유 동력학 $\dot{x}=Ax+Pw$, $\dot{w}=Sw$ 를 $\Sigma\,(u=0)$ 라 표기하자. 이 때, 다음의 사실들 i), ii), iii)이 성립하며, 이 i), ii), iii)에 의해 충분조건은 증명됨을 알 수있다.

i) 자유 동력학 $\Sigma\,(u=0)$ 에서 $x(t)$, $w(t)$ 는 부분공간 V 로 수렴한다.

(증명) $z := x-\Pi w$ 이라 하자. 이때, z 는 $\dot{z}=Az$

을 만족한다. A 가 안정하므로, $z(t) \to 0$ ($t \to \infty$).

ii) 식 (3a)를 만족하는 Π 에 대해, 부분공간 V 은 자유 동력학 $\Sigma\,(u=0)$에 대해 불변 (invariant) 하다 (참고로, 동력학 $\dot{x}=Ax$ 에 대해 벡터 공간 V 가 불변이라는 것은, 모든 $v \in V$ 에 대해, $Av \in V$ 을 만족할 때를 말하며, 이는 $x(0) \in V$ 이면, $x(t) \in V$ ($t \ge 0$) 을 의미한다[7]).

(증명)

$$\begin{pmatrix} A & P \\ 0 & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Pi v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\Pi v + Pv \\ Sv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi Sv \\ Sv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi v' \\ v' \end{pmatrix}$$

iii) 부분공간 V 에서 $e=0$, 즉 $e(x,w)|_{x=\Pi w}=0$

(증명) $e(x,w)|_{x=\Pi w} = C\Pi w + Qw = (C\Pi + Q)w = 0$

(필요조건) 다음의 논의 i), ii) 에 의해 필요조건은 증명된다.

i) 만약 S 가 반안정이면, A 가 안정이므로 행렬방정식 (3a)을 만족하는 Π 가 존재한다([5], 또는 [2] 의 부록 F 참조).

ii) (3a)를 만족하는 Π 가 존재하는 경우, 충분조건 i)과 ii)와 같은 논의로, $u=0$ 일 때, $x(t), w(t)$ 는 $x=\Pi w$ 로 기술되는 R^{n+s} 의 부분공간 V 로 수렴하고, 이 부분공간은 자유동력학 $\Sigma\,(u=0)$ 에 대해 불변(invariant)하므로, 결국 자유 동력학하에서 $x(t), w(t)$ 는 부분공간 V 에 존재하게 된다. 따라서, 출력 조절됨을 만족하기 위해서는 $e(t)$ 가 이 부분공간 V 에서 0 이 됨이 필요하다. 즉, $C\Pi w + Qw = (C\Pi + Q)w = 0$. 임의의 $w(t)$ 에 대해, 이러한 사실이 성립해야하므로, $C\Pi + Q = 0$ 이 만족되어야 한다.

위의 보조정리 2.1 은 '출력 조절됨'이 만족되기 위해서는, 에러가 0 이 되는, 자유동력학에 대해 불변인 안정한 부분공간이 존재해야 함을 의미한다. 식 (3a)는 자유 동력학에 대해 불변인 부분 공간의 존재를 의미하며, A 의 안정성은 그 부분 공간의 안정성을 (즉, 자유 동력학하에서 임의의 초기 상태 $x(0), w(0)$ 에서 항상 그 부분공간으로의 수렴), 식 (3b)는 그 부분공간에서 에러 $e(t)$ 가 0 이 됨을 의미한다.

정리 2.2 [5]: 시스템 Σ 에서 (A, B) 가 '안정화가능(stabilizable)'하고 Σ 가 '검출가능(detectable)'하다고 하자. 그러면 다음의 방정식 (4)가 해 (Π, V) 를 가지면 시스템 Σ 는 '출력 조절가능'하다.

$$A\Pi + BV + P = \Pi S \tag{4a}$$

$$C\Pi + Q = 0 \tag{4b}$$

만약 S 가 반안정하면, 방정식 (4)의 해 존재는 또한 시스템 Σ 가 '출력 조절가능' 하기 위한 필요조건이 된다.

(여기서, 시스템 Σ 가 검출가능하다는 것은 $\{(C,Q),\ \begin{pmatrix} A, & P \\ 0, & S \end{pmatrix}\}$가 검출가능이다는 것을 의미한다.)

정리 2.2 의 증명은 기존 논문[3, 5] 에 주어져 있으나, 본 논문에서는 보조정리 2.1 의 증명을 제공한 취지와 같이 본 논문의 이해와 실제 (출력) 조절기 설계의 이해를 돕기 위해 [5] 에서 제공한 증명을 여기에 정리하여 기술한다.

(증명) (필요조건) S 가 반안정하고, 시스템 Σ 가 출력 조절 가능하면, (2)와 같은 보상기 Γ 가 존재하고, 보조정리 2.1에 의해, 결과되는 폐루프 시스템 Σ_c 에 대해 식 (3)이 성립한다. 즉, 폐루프 시스템 Σ_c 에 대해 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} A_c\Pi_c + P_c &= \Pi_c S \\ C_c\Pi_c + Q &= 0 \end{aligned} \quad \left(A_c := \begin{pmatrix} A & BH \\ GC & F \end{pmatrix}, C_c := (C,\ 0),\ P_c := \begin{pmatrix} P \\ GQ \end{pmatrix} \right)$$

$\Pi_c^t = (\Pi^t,\ U^t)$ (t 는 transpose를 의미)라 하면, 첫 번째 식으로부터

$A\Pi + BHU + P = \Pi S$, 두 번째 식에서 $C\Pi + Q = 0$ 이 성립한다.

따라서, $V=HU$ 로 식 (4) 의 해 가 존재한다.

(충분조건) 다음의 절차 i), ii), iii), iv) 로 설계된 보상기 Γ 는 조절기임을 보일 수 있다.

i) K_1 를 $A+BK_1$ 가 안정이도록 결정 ((A,B) 가 안정화가능하므로 K_1 결정가능)

ii) L 를 $A^e + LC^e$ 가 안정이도록 결정 ((C^e, A^e) 가 검출가능하므로, L 결정가능)

$\left(A^e := \begin{pmatrix} A, & P \\ 0, & S \end{pmatrix},\ C^e := (C,\ Q) \right)$

iii) K_2 를 $K_2 := V - K_1\Pi$ 라 하고, K 를 $K := (K_1, K_2)$ 라 하자.

iv) 이제, 보상기 Γ 의 F , G , H 를 다음과 같이 설계하자.

$$\Gamma: \begin{cases} \dot{z} = Fz + Ge \\ u = Hz \end{cases}$$
$$F := A^e + B^e K + LC^e \quad \left(B^e := \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$
$$G := -L, \quad H := K$$

1) (내재적 안정의 증명) x 와 $r := z - (x^{t} w^{t})^{t}$ 가 다음을 만족함을 알 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+BK_1, & P+BK_2 \\ 0, & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} Kr$$
$$\dot{r} = (A^e + LC^e) r$$

두 번째 식으로부터, $r(t) \to 0$ ($t \to \infty$).

$w(t) = 0$ 이면, 첫 번째 식은 다음과 같다. $\dot{x} = (A+BK_1)x + BKr$ $(A+BK_1)$이 안정이므로, $x(t) \to 0$ ($t \to \infty$)

ii) (폐루프 시스템 Σ_c 의 출력조절됨의 증명)

$U \equiv \begin{pmatrix} \Pi \\ I \end{pmatrix}$라 하자. 이때, iii)과 식 (4b)로부터, $KU = V$ --- (a), $C^e U = 0$ --- (b) 가 성립함을 알 수 있다. 또, (a), (b) 와 식 (4)를 이용하면, $FU = US$ --- (c) 임을 알 수 있다.

이제 $\Pi_c \equiv \begin{pmatrix} \Pi \\ U \end{pmatrix}$라 하면, (a), (c) 와 식 (4)으로부터 다음이 성립함을 쉽게 보일 수 있다.

$$A_c \Pi_c + P_c = \Pi_c S$$
$$C_c \Pi_c + Q = 0$$

정리 2.2 는 '출력 조절가능'을 만족하기 위해서는, 되먹임된 시스템에 대해 불변하고 그 위에 에러가 영(zero)가 되는 안정한 부분공간이 존재해도록 하는 되먹임 입력이 존재(즉, output zeroing controlled invariant subspace의 존재[6])해야 하는 것을 의미한다. 식 (4a)는 '제어 불변 가능 부분공간(controlled invariant subspace[7])'의 존재를 의미하며, 식(4b)는 $e(t)$ 가 '제어 불변가능 부분공간'에서 0 이 되는데 필요한 조건이다. 보조정리 2.1 과 정리 2.2, 그리고 출력조절 문제의 보다 깊은 논의는 참고문헌[3,4,5,6,7] 및 그곳에서 참조하는 참고문헌을 참조하라.

선형 이산 시스템에 대해서도 보조정리 2.1 과 정리 2.2 와 같은 정리가 성립함을 쉽게 보일 수 있다(보조정리 2.1 과 정리 2.2 의 증명 참조). 차후의 논의를 위해, 여기서 선형 이산 시스템의 '출력 조절됨' 과 '출력 조절가능' 의 조건을 기술한다.

$$\Sigma_d: \begin{cases} x(k+1) = A'x(k) + B'u(k) + P'w(k) & \text{(5a)} \\ w(k+1) = S'w(k) & \text{(5b)} \\ e(k) = C'x(k) + Q'w(k) & \text{(5c)} \end{cases}$$

(5)의 각 식의 의미와 각 변수의 의미, '출력 조절됨'과 '출력 조절가능'의 정의는 연속시간 시스템 Σ 에서와 같다.

보조정리 2.3: A'가 안정할 때, 다음의 행렬 방정식 (6)을 만족하는 Π 가 존재하면, 시스템 Σ_d 는 출력조절된다.

$$A'\Pi + P' = \Pi S' \tag{6a}$$
$$C'\Pi + Q' = 0 \tag{6b}$$

만약 S'가 반안정(즉, S' 의 고유치가 단위원밖에 존재)할 때 이 조건은 또한, 필요조건이 된다.

정리 2.4: (A', B') 이 '안정화가능'하고 Σ_d 가 '검출가능'할 때 다음의 방정식 (7)이 해 (Π, V')를 가지면 Σ_d 는 '출력 조절가능'하다.

$$A'\Pi + B'V' + P' = \Pi S' \tag{7a}$$
$$C'\Pi + Q' = 0 \tag{7b}$$

만약 S'이 반안정하면, 방정식 (7)의 해 존재는 또한 조절기가 존재하기 위한 필요조건이 된다.

이 경우, 선형 이산 시스템의 출력조절기도 연속시간 시스템의 경우처럼 설계한다. 시스템 Σ 의 A, B, P, S, C, Q 에 대해서 뿐만 아니라 시스템 Σ 에 충분히 가까운 즉, A, B, P, S, C, Q 각각의 행렬에 충분히 가까운 행렬들 $\tilde{A}, \cdots, \tilde{Q}$ 에 대해서도 출력조절 문제의 해가 존재 할 때 시스템 Σ 는 '견실 출력 조절가능(robustly output regulatable)'이라고 한다.

정리 2.5[5]: (A, B) 가 안정화가능하고 시스템 Σ 가 검출가능하다고 하자. 또 행렬 S 가 반안정이라고 하자. 이때, 시스템 Σ 가 '견실 출력 조절가능'할 필요충분조건은, 행렬 S 의 모든 고유치 μ에 대해 다음이 성립하는 것이다.

$$rank \begin{pmatrix} \mu I - A, & -B \\ C, & 0 \end{pmatrix} = n + p \tag{8}$$

정리 2.5 는 시스템 Σ $(w = 0)$ 은 right invertible 이고, (전송) 영점[2] 이 S 의 고유치와 일치하지 않을 때 시스템 Σ 가 견실 출력 조절가능함을 의미한다.

Ⅲ. 선형 시스템 출력 조절에 대한 샘플링 영향

선형 시스템의 출력 조절에 대한 샘플링 영향을 조

사하자. 선형 시스템 Σ 를 이산화 하여 얻어진 샘플치 시스템을 $\Sigma(T)$ 라 하면 다음과 같이 나타낼 수있다.

$$\Sigma(T): \begin{cases} x_{k+1} = A(T)x_k + B(T)u_k + P(T)w_k \\ w_{k+1} = S(T)w_k \\ e_k = Cx_k + Qw_k \end{cases} \tag{9}$$

(T : 샘플링 시간 간격, $x_k := x(kT)$,
$A(T) := e^{TA}$, $S(T) := e^{TS}$,
$B(T) := \int_0^T e^{A\tau} B\, d\tau$, $P(T) := \int_0^T e^{(T-\tau)A} P\, e^{\tau S} d\tau$)

여기서, 샘플치 선형 시스템에서의 '출력조절됨'과 '출력 조절가능'은 $T^*>0$ 인 어떤 T^*가 존재하여, $0<T<T^*$ 인 모든 샘플링 시간 간격 T 의 이산시스템 $\Sigma(T)$가 각각 '출력조절됨'과 '출력 조절가능'을 만족할 때를 의미한다. 따라서, 출력 조절됨의 경우, $T\in(0, T^*)$ 인 T 에 대해, 다음의 식 (10)이 해 $\Pi(T)$ 를 갖는 것이 필요 충분조건이 되고, 출력 조절가능의 경우, $T\in(0, T^*)$ 인 T 에 대해 다음의 식 (11)이 해 $\Pi(T), V(T)$ 를 갖는 것이 필요 충분조건이 된다.

$$A(T)\Pi(T) + P(T) = \Pi(T)S(T) \tag{10a}$$
$$C\Pi(T) + Q = 0 \tag{10b}$$

$$A(T)\Pi(T) + B(T)V(T) + P(T) = \Pi(T)S(T) \tag{11a}$$
$$C\Pi(T) + Q = 0 \tag{11b}$$

이제, 식 (10)의 해 $\Pi(T)$의 해석성(analyticity)에 대해 살펴보자.

먼저, 식 (10)에서 행렬 $A(T), P(T), S(T), C, Q$ 는 각각 차원이 $n\times n$, $n\times s$, $s\times s$, $p\times n$, $p\times s$ 이고, 식 (10)의 해 $\Pi(T)$ 는 차원이 $n\times s$ 임을 상기하자. 방정식 (10) 에서 미지수의 갯수는 ns 이고 식의 갯수는 $(n+p)s$ 이다. 따라서, 식 (10)가 해가 있기 위한 필요조건은 식 (10)에서 독립적인 식의 갯수가 ns 이하여야 한다. 만약, 독립적인 식의 갯수가 ns 이고 그 독립적인 식 가운데 q 개가 식 (10b)에서 나온다면, 식 (10)는 다음의 식으로 정리할 수있다.

$$M(T)X(T) = N(T) \tag{12}$$

여기서, $X(T)$는 $\Pi(T)$의 ns 개의 요소를, 요소로 갖는 벡터로 $ns\times 1$ 차원의 벡터이며, $M(T)$는 그 첫 $(ns-q)$ rows 의 각 요소는 $A(T)$ 와 $S(T)$의 각 요소의 선형 결합으로 이루어지고, 나중 q 개의 rows 의 각 요소는 C 의 각 요소의 선형 결합으로 이루어진 $ns\times ns$ 차원의 행렬이고, $N(T)$는 그 첫 $(ns-q)$ 개는 각 요소가 $-P(T)$ 각각의 요소로, 나중 q 개는 $-Q$ 각각의 요소로 이루어진 $ns\times 1$ 차원의 벡터이다. 이 때, 식 (10)가 해가 존재하는 경우, $M(T)$의 역이 존재하고, 해는

$$X(T) = (det(M(T))^{-1}\ adj(M(T))\ N(T)$$

으로 표현된다. 이때, $det(M(T))$의 T 에 대한 최저차가 k 라면, 행렬 $adj(M(T))$의 T 에 대한 최저차는 첫 $(ns-q)$ rows 의 경우, $(k-1)$ 이고, 나중 q rows 는 k 임을 알 수 있다. 또한, $N(T)$의 경우, 첫 $(ns-q)$ 개 는 각 요소가 $-P(T)$ 각각의 요소로 구성되어 있으므로, T 에 대한 최저차는 1 이고, 나중 q 개는 각 요소가 $-Q$ 각각의 요소로 이루어져 있으므로, T 에 대해 0 차 이다. 따라서, $adj(M(T))\ N(T)$ 의 각 요소는 T 에 대한 최저차는 k 이다. 그러므로, $(det(M(T))^{-1}\ adj(M(T))\ N(T)$ 는 분모가 T 에 대한 최저차 k , 분자의 각요소도 T 에 대한 최저차 k 를 갖으므로, $X(T)$ 즉, $\Pi(T)$ 는 충분히 작은 T 에 대해, T 에 대해 해석적(analytic)임을 알 수 있다. 또한, 독립적인 식의 갯수가 ns 미만의 $(ns-\alpha)$이면, 미지수 $\Pi(T)_{11},\cdots,\Pi(T)_{ns}$ 중 α개는 임의로 선택할 수있으므로 이 α 개를 $T=0$ 에서 해석적(analytic) 함수로 택하면, 나머지 $ns-\alpha$ 개의 미지수에 대해 독립적인 식이 $ns-\alpha$ 이므로, 앞의 경우와 같은 논의로써, 어렵지 않게 해가 존재하는 경우, 식 (10)의 $T=0$ 에서 해석적 해 존재를 증명할 수 있다.

마찬가지 논의로, 식 (11)에서도 (해가 존재하는 경우) $T=0$ 에서 해석적 해 $\Pi(T)$와 $V(T)$의 존재를 쉽게 알 수있다.

먼저 '출력 조절됨'에 대한 샘플링 영향을 조사한다.

정리 3.1: 다음의 두 기술은 등가이다.

(a) A 는 안정, S 는 반안정 이고, 시스템 Σ 는 출력 조절됨을 만족한다.

(b) 다음을 만족하는 $T^*(T^*>0)$가 존재한다. 모든 $T\in(0, T^*)$에 대해, $A(T)$는 안정이고, $S(T)$ 는 반안정이며, 이산 시스템 $\Sigma(T)$ 는 출력 조절됨을 만족한다.

(증명) (a)⇒(b) 시스템 Σ가 출력 조절됨이므로, 보조정리 2.1에 의해, 다음의 방정식 (13)을 만족하는 행렬 Π 가 존재한다.

$$A\Pi + P = \Pi S \quad (13a)$$
$$C\Pi + Q = 0 \quad (13b)$$

(13a)로부터, 다음의 방정식이 성립함을 쉽게 알수 있다.

$$(sI-A)^{-1}\Pi + (sI-A)^{-1}P(sI-S)^{-1} = \Pi(sI-S)^{-1} \quad (14)$$

(여기서, s는 라플라스 변환의 변수)

이제, (14)의 양변에 대해 라플라스 역변환을 취하면, 다음을 얻는다.

$$e^{tA}\Pi + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Pe^{\tau S}d\tau = \Pi e^{tS} \quad (15)$$

(15)에서, $t=T$ 이라 하면, 다음을 얻는다.

$$A(T)\Pi + P(T) = \Pi S(T) \quad (16)$$

안정도는 시간 샘플링에 대해 보존되므로, A 가 안정이고, S 가 반안정이면, $A(T)$ 와 $S(T)$ 각각 안정과 반안정이 보장된다. 따라서, 이 사실과 (16) 과 (13b)가 (a)⇒(b) 을 증명한다.

(b)⇒(a) 먼저, $\sigma(e^{TA}) = e^{T\sigma(A)}$이므로, $A(T)$ 와 $S(T)$ 의 안정성과 반안정성이 A와 S 의 안정성과 반안정성을 보장한다. 또, 선형 이산 시스템 $\Sigma(T)$ 가 출력조절되므로, $0<T<T^*$ 에서, 다음의 행렬 방정식 (17)을 만족하는 $T=0$에서 해석적인 해 $\Pi(T)$가 존재한다.

$$A(T)\Pi(T) + P(T) = \Pi(T)S(T) \quad (17a)$$
$$C(T)\Pi(T) + Q = 0 \quad (17b)$$

이때, $A(T)$, $S(T)$, $P(T)$를 각각 T 에 대해 Taylor 급수 전개를 하면,

$$A(T) = I + TA + \frac{1}{2}T^2A^2 + \frac{1}{6}T^3A^3 + \cdots \quad (18a)$$

$$S(T) = I + TS + \frac{1}{2}T^2S^2 + \frac{1}{6}T^3S^3 + \cdots \quad (3.10b) \quad (18b)$$

$$P(T) = TP + \frac{1}{2}T^2(AP+PS) + \frac{1}{6}T^3(A^2P + APS + PS^2) + \cdots \quad (18c)$$

또, $\Pi(T)$가 $T=0$ 에서 해석적이므로 T 에 대해 Taylor 급수 전개를 하여

$$\Pi(T) = \Pi_0 + T\Pi_1 + \frac{1}{2}T^2\Pi_2 + \cdots \quad (19)$$

라 표현하고, 이 (18)과 (19)를 관계식 (17a)에 대입하여, T 에 대한 1차 계수를 비교하면,

$$A\Pi_0 + P = \Pi_0 S \quad (20a)$$

또, (19)를 (17b)에 대입하고, T 에 대한 상수계수를 비교하면,

$$C\Pi_0 + Q = 0 \quad (20b)$$

따라서, 식 (3.12)과 보조정리 2.1에 의해, 연속시간 시스템 Σ 가 출력 조절됨을 만족함을 알 수 있다.

정리 3.1 은 '출력 조절됨'이 샘플링에 대해 보존됨을 보인다. 다음의 정리 3.2 는 선형 샘플치 시스템이 '출력 조절가능'하기 위해서는 원래의 연속시간 선형 시스템이 '출력 조절가능'해야 함을 보여준다.

정리 3.2: $T^*>0$ 인 어떤 T^*가 존재하여 $0<T<T^*$ 인 T 의 이산 시스템 $\Sigma(T)$에 대해, $(A(T), B(T))$가 안정가능, $\Sigma(T)$가 검출가능하고 $S(T)$가 반안정하며 $\Sigma(T)$가 '출력 조절가능'할 때 원래의 연속시간 선형 시스템 Σ 도 '출력 조절가능'하다.

(증명) 안정화가능성, 검출가능성, 반안정성 등은 샘플링에 대해 보존되므로, $(A(T), B(T))$ 가 안정가능, $\Sigma(T)$가 검출가능하고 $S(T)$가 반안정하면, (A, B) '안정화가능', Σ 가 '검출가능', S 가 '반안정'이다. 또 $\Sigma(T)$가 출력 조절가능하면 다음의 식 (21)을 만족하는

$$A(T)\Pi(T) + B(T)V(T) + P(T) = \Pi(T)S(T) \quad (21a)$$
$$C\Pi(T) + Q = 0 \quad (21b)$$

$T=0$ 에서 해석적인 해 $\Pi(T)$ 와 $V(T)$ 가 각각 존재한다.

$\Pi(T)$ 와 $V(T)$ 는 $T=0$에 대해 해석적이므로 각각 T 에 대해 Taylor 급수 전개를 하여 다음과 같이 표기하자.

$$\Pi(T) = \Pi_0 + T\Pi_1 + \frac{1}{2!}T^2\Pi_2 + \cdots \quad (22a)$$

$$V(T) = V_0 + TV_1 + \frac{1}{2!}T^2V_2 + \cdots \quad (22b)$$

또, $A(T), B(T)$, $S(T)$, $P(T)$를 각각 T 에 대해 Taylor급수 전개를 한 결과와 (22)를 각각, (21a)에 대입하고 T 에 대한 1차계수를 비교하고, (21b)에 대입하여 T 에 대한 상수계수를 비교하면 다음의 식을

얻는다.

$$A\Pi_0 + BV_0 + P = \Pi_0 S \quad (23a)$$

$$C\Pi_0 + Q = 0 \quad (23b)$$

따라서, 정리 2.2에 의해 시스템 Σ 는 출력 조절가능하다.

정리 3.2 는 샘플치 선형 시스템에 조절기설계가 가능하기 위해서 원래의 연속시간 선형 시스템에 조절기 설계가 가능해야 함을 보여준다. 그러면 그 역은 성립하는가? 즉, 원래의 연속시간 선형 시스템에 조절기설계가 가능할 때, 이 시스템을 이산화하여 얻어진 샘플치 시스템에도 조절기 설계가 가능할까? 다음의 예는 일반적으로 출력 조절기 문제의 해 존재가능성이 샘플링에 대해서 보존되지 않음을 보여준다.

(예1)

$$\Sigma_1: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Pw \\ \dot{w} = Sw \\ e = Cx + Qw \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{c} A := \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,0 \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ S := 1 \\ C := \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,1 \end{pmatrix},\ Q := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

이 경우, (A, B): : 안정화가능, $\{(C, Q), \begin{pmatrix} A & P \\ 0 & S \end{pmatrix}\}$: 검출가능, S : 반안정 의 조건들을 만족한다. 또한, 식 (14)를 만족하는 해가 존재함을 쉽게 점검할 수 있다.

이제, 시스템 Σ_1 을 이산화하면,

$$\Sigma_1(T): \begin{cases} x_{k+1} = A(T)x_k + B(T)u_k + P(T)w_k \\ w_{k+1} = S(T)w_k \\ e_k = Cx_k + Qw_k \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{c} A(T) := \begin{pmatrix} 1,T \\ 0,1 \end{pmatrix},\ B(T) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}T^2 \\ T \end{pmatrix},\ P(T) := \begin{pmatrix} e^T - T - 1 \\ e^T - 1 \end{pmatrix}, \\ S(T) := e^T,\ C = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

이산화된 시스템 $\Sigma_1(T)$의 경우, 식 (11)을 만족하는 해가 존재하지 않음을 알 수 있다.

그러면, 어떤 부류의 시스템에 대해 출력 조절가능성이 샘플링에 대해 보존될까? 단일 입출력 시스템의 경우, 출력조절 가능성이 샘플링에 대해 보존됨을 볼 수 있다. 또한, 견실 출력 가능성도 샘플링에 대해 보존된다. 먼저, 견실 출력 가능성에 대한 샘플링 영향을 살펴보자. 이를 위하여 다음의 보조정리가 필요하다.

보조정리 3.3: 시스템 Σ 에 대해 (8)이 성립하면, 다음이 성립하는 어떤 T^* $(T^*>0)$이 존재한다.

$T \in (0, T^*)$ 인 모든 T 에 대해 시스템 Σ 를 이산화하여 얻어진 샘플치 시스템 $\Sigma(T)$에 대해

$$rank \begin{pmatrix} \mu(T)I - A(T) & -B(T) \\ C & 0 \end{pmatrix} = n + p$$

($\mu(T)$는 $S(T)$의 모든 고유치)

(증명)

$$\begin{pmatrix} \mu(T)I - A(T) & -B(T) \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T\mu I - TA, & -TB \\ C, & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{1}{2!}T^2\mu^2 I - \frac{1}{2}T^2A^2, & -\frac{1}{2}T^2AB \\ 0, & 0 \end{pmatrix} + O(T^3)$$

식 (8)이 성립하면, 행렬 $\begin{pmatrix} T\mu I - TA, & -TB \\ C, & 0 \end{pmatrix}$는 $T \neq 0$ 인 T 에 대해

$$rank \begin{pmatrix} T\mu I - TA, & -TB \\ C, & 0 \end{pmatrix} = n + p$$

가 성립한다. 따라서, 충분히 작은 어떤 T^* $(T^*>0)$가 존재하여, $T \in (0, T^*)$ 인 모든 T 에 대해,

$$rank \begin{pmatrix} \mu(T)I - A(T), & -B(T) \\ C, & 0 \end{pmatrix} = n + p$$

가 성립함을 알수 있다.

정리 3.4: 시스템 Σ 가 견실 출력 조절가능이면, $\Sigma(T)$도 견실 출력 조절가능이다.

(증명) 보조정리 3.3 으로부터 증명된다.

단일 입출력의 경우(시스템 Σ 에서 $m=1, p=1$ 인 경우), 출력 조절가능성이 샘플링에 대해 보존되는데, 이를 증명하기 위해 먼저 다음의 보조정리가 필요하다.

보조정리 3.5: 시스템 Σ 가 단일 입출력 시스템이라 하자. 또한, (A, B) 가 '안정화가능'하고 Σ 가 '검출가능'하다고 하자. 또한 S 가 반안정하다고 하자. 이 때, 시스템 Σ 가 '출력 조절가능'이기 위한 필요 충분 조건은 시스템 $\Sigma(w=0)$ 이 S 의 고유치와 같은 영점을 하나라도 갖지 않는 것이다.

(증명) (충분조건) 정리 2.5 로부터 시스템 $\Sigma(w=0)$ 이 S 의 고유치와 같은 영점을 하나라도 갖지 않으면, '견실 출력 조절가능' 이고, 이는 당연히 '출력 조절가능'을 의미하므로 쉽게 증명된다.

(필요조건) 증명은 모순을 유도하므로써, 증명한다. 시스템 Σ 는 출력 조절가능하고, 시스템 Σ 은 S 의 고유치와 같은 어떤 영점 λ 을 갖는다고 하자. 이때,

시스템 Σ 는 출력 조절가능하므로, 다음의 식을 만족하는 행렬 (Π, V) 가 존재한다.

$$A\Pi + BV + P = \Pi S \tag{24a}$$
$$C\Pi + Q = 0 \tag{24b}$$

(24a) 의 양단에 $-\lambda\Pi$ 을 더하면,

$$BV + P = (\lambda I - A)\Pi + \Pi(S - \lambda I) \tag{25}$$

(25)에서, $C(\lambda I - A)^{-1}$ 을 양변에 곱하면,

$$C(\lambda I - A)^{-1}(BV + P) = C\Pi + C(\lambda I - A)^{-1}\Pi(S - \lambda I) \tag{26}$$

λ 가 시스템 $\Sigma(w=0)$ 의 영점이므로, $C(\lambda I - A)^{-1}B = 0$. 또한, (24b)에서, $C\Pi + Q = 0$. 이를 이용하여 정리하면, (26)은 다음과 같다.

$$C(\lambda I - A)^{-1}(P - \Pi(S - \lambda I)) + Q = 0 \tag{27}$$

이제, λ가 S의 고유치이므로, $(S - \lambda I)\beta = 0$ 을 만족하는 0 이 아닌 벡터 β 가 존재한다.

이때, α 를 $\alpha := (\lambda I - A)^{-1}(P - \Pi(S - \lambda I))\beta$ 라 하자. 이때 다음의 식을 만족하는 벡터 α, β 가 존재한다.

$$\begin{cases} C\alpha + Q\beta = 0 & (28a) \\ (A - \lambda I)\alpha + P\beta = 0 & (28b) \\ (S - \lambda I)\beta = 0 & (28c) \end{cases}$$

식 (28)은 다음을 의미한다.

$$\ker\begin{pmatrix} A - \lambda I, & P \\ 0, & S - \lambda I \end{pmatrix} \cap \ker(C, \ Q) \neq \varnothing \tag{29}$$

식 (29)는 시스템 Σ 가 검출가능 하다는 가정에 위배된다.

다음의 예는 보조정리 3.5 의 사실을 잘 보여 주는 경우다.

(예 2)

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Pw \\ \dot{w} = Sw \\ e = Cx + Qw \end{cases}$$

$$\left(A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \ B := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ P := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ S := 1 \ C := (1, 0), \ Q := 1 \right)$$

이 경우, (A, B): : 안정화가능, $\{(C, Q), \begin{pmatrix} A & P \\ 0 & S \end{pmatrix}\}$: 검출가능, S : 반안정 의 조건들을 만족한다.

시스템 Σ_2 은 전달함수 $\frac{s-1}{s^2+s+1}$ 을 가지므로, S 의 고유치 1 과 같다. 이 경우 식 (4)를 만족하는 Π, V 는 존재하지 않음을 쉽게 점검할 수 있다.

정리 3.6: 단일 입출력 시스템 Σ 의 '출력 조절가능성'은 샘플링에 대해 보존된다.

(증명) 단일 입출력 시스템 Σ 의 출력 조절가능은 보조정리 3.5 에 의해 다음이 성립함을 의미한다.

행렬 S 의 모든 고유치 μ 에 대해,

$$rank\begin{pmatrix} \mu I - A, & -B \\ C, & 0 \end{pmatrix} = n + 1 \tag{30}$$

식 (30)은 정리 2.5 에 의해, 견실 출력 조절가능을 의미한다. 정리 3.4 에 의해 견실 출력 조절가능은 샘플링에 보존되며, 견실 출력 조절가능이면, 당연히 출력 조절가능이므로, 단일 입출력 시스템 Σ 을 이산화 얻어진 시스템 $\Sigma(T)$ 도 출력 조절가능이다.

Ⅳ. 결 론

선형 출력조절 문제에 있어서, '출력 조절됨'은 샘플링에 대해 보존되나, 일반적으로 '출력 조절가능성'은 보존되지 않음을 살펴 보았다. 그러나, '견실 출력 조절가능성' 과 단일 입출력의 경우에 있어서의 '출력 조절가능성'이 샘플링에 대해 보존됨을 보였다. 따라서, 일반적으로 연속시간 선형 시스템에서 출력 조절기 설계가 가능하더라도 이산화시스템에 대해서는 직접 '정확한 샘플치 출력 조절기' 설계가 보장되지 않으므로, 이 경우, 원래의 연속시간 시스템에 대해 설계된 연속시간 조절기를 빠른 샘플링을 통한 샘플치 출력 조절기 구현을 고려할 수가 있다. 그러나, 이렇게 구현된 샘플치 출력 조절기는 샘플링 시간 T 에 대해 1차 근사인 출력 조절기임을 불과함을 쉽게 알 수 있다. 따라서, 샘플링 시간 T 에 대해 보다 개선된 근사 샘플치 출력조절기를 구할 필요가 있다.

앞으로, 어떤 구조를 갖는 선형 시스템에 정확한 샘플치 조절기를 설계할 수 있는 지를 더 자세히 살펴보고, 또, 샘플링 시간 T 에 대해 1차 근사보다 나은 샘플치 선형 출력 조절기를 설계할 수 있기 위해서는 원래의 연속시간 선형 시스템이 어떠한 구조를 가져야 하는 지가 연구되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] C.I. Byrnes and A. Isidori, "Steady State Response, Separation Principle, and The Output Regulation of Nonlinear Systems," 28th Proc. conf. on Decision and Control, vol. 3, pp. 2247-2251, 1989.

[2] C.T. Chen, *Linear System Theory and Design,* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970.

[3] B. A. Francis, "The Linear Multivariable Regulator Problem," SIAM J. Contr. Optimiz., vol. 15, pp. 486-505, 1987.

[4] B. A. Francis and W. M. Wonham, "The role of transmission zeros in linear multivariable regulators," Int. J. Control, vol. 22, no. 5., pp. 657-681, 1975.

[5] M. Hautus, "Linear Matrix Equations with Applications to the Regulator Problem," in Outils and Modèles Math. pour l'Auto., I.D. Landau, Ed. Paris: C.N.R.S., pp. 399-412, 1983.

[6] A. Isidori, and C.I. Byrnes, "Output Regulation of Nonlinear Systems," IEEE trans.. Aut. Contr., AC-35, pp. 131-140, 1990.

[7] W. M. Wonham, *Linear Multivariable Control: a Geometric Approach, Springer-Verlag,* New York, 1979.

저 자 소 개

鄭 善 太(正會員)

1960年 3月 10日生. 1983年 2月 서울대학교 전자공학과 졸업(학사). 1990年 12月 미국 The Univ. of Michigan, Ann Arbor) 전기 및 컴퓨터공학과 졸업(박사). 1991년 ~ 현재 숭실대학교 전자공학과 부교수 재직. 주관심분야는 디지털 제어, 실시간 시스템, 비선형 제어 등임.