

論文97-34S-9-5

다층 신경회로망을 이용한 비선형 시스템의 견실한 제어

(Robust control of Nonlinear System Using Multilayer Neural Network)

成 弘 皙 * , 李 夫 熙 **

(Hong-Seok Seong and Kwae-He Lee)

요 약

본 논문에서는 외란이 있는 미지의 비선형 시스템을 다층 신경회로망을 이용하여 제어하는 알고리즘에 대해 기술하였다. 다층 신경회로망은 임의의 연속 함수를 원하는 정확한 정도까지 근사화시키기 위해 사용할 수 있다. 이와 같은 사실을 이용하여 비선형 시스템에서 미지의 비선형 함수를 다층 신경회로망을 이용하여 근사화 한다. 외란은 모델링 오차에 포함시킨다. 그래서 다층 신경회로망의 가중치 갱신 법칙을 리아프노브 안정도 (Lyapunov Stability)가 만족하도록 유도한다. 전체적인 제어 시스템은 폐환 선형화 기법을 기반으로 하여 제어를 구성한다. 이때 비선형 함수를 구현하기 위해 사용되는 신경회로망의 가중치는 유도된 갱신 법칙에 의해 갱신된다. 컴퓨터 모의 실험을 통하여 제안된 제어 알고리즘의 성능을 검증한다.

Abstract

In this paper, we describe the algorithm which controls an unknown nonlinear system with disturbance a using multilayer neural network. The multilayer neural network can be used to approximate any continuous function to any desired degree of accuracy. With the former fact, we approximate an unknown nonlinear function on the nonlinear system by using of multilayer neural network. we include a disturbance among the modelling error, and the weight -update rule of multilayer neural network is derived to satisfy Lyapunov stability. The whole control system constitutes controller using the feedback linearization method. The weight of neural network which is used to implement nonlinear function is updated by the derived update-rule. The proposed control algorithm is verified through computer simulation.

I. 서 론

지금까지의 비선형 시스템 제어는 적응 제어, 리아프노브에 기초한 제어, 가변 구조 제어등 대표적인 접

근 방법으로 알려져 있다. 특히, 비선형 시스템의 폐환 선형화 기법이 비선형 제어기 설계에 널리 알려져 있다. 그러나, 이는 시스템의 정확한 동력학 방정식을 알고 있어야 한다^{[1]-[3]}.

신경회로망은 학습을 통하여 임의의 함수를 근사화할 수 있고, 병렬 처리와 fault tolerance를 성취시키는 용이하다. 즉, 정확히 알지 못하는 시스템의 동력학 방정식을 신경회로망을 사용하여 근사화시킬 수 있다. 제어 관점에서 가장 널리 사용되는 신경회로망 구조는 오차 역전파 알고리즘을 이용하는 다층 신경회로망이다. 3층 신경회로망은 어떤 원하는 정확한 정도

* 正會員, 韓國電子通信研究院 通話制御研究室
(Electronics and Telecomm. Research Institute
Mobile Traffic Management Section)

** 正會員, 西江大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Engineering, Sogang Univ.)

接受日字: 1996年10月1日, 수정완료일: 1997年7月14日

까지 비선형 함수를 근사화할 수 있다^[4]. 수학적으로 시스템을 정확히 모델링 하는데는 어려움이 많으므로 이를 해결하는 방법으로 다층 신경회로망에 기초한 제어가 많이 제안되었다^{[5]-[7]}.

신경회로망을 이용한 대부분의 제어 알고리즘은 신경회로망의 가중치를 갱신하는데 그래디언트(gradient) 방법을 기초로 하고 있으나, 이 갱신 법칙은 시스템의 안정성에 대한 어떠한 정보를 제공하고 있지 않다. 최근에 신경회로망을 이용한 제어 시스템의 안정성에 대한 연구가 발표되고 있다. Yesildirek는 로봇 매니퓰레이터의 동역학 방정식의 성질과 리아프노브 함수로부터 신경회로망의 가중치 갱신 법칙을 얻어 로봇 매니퓰레이터 제어를 모의 실험하였다^[8]. Jin은 신경회로망으로 RBF(radial basis function)이나 CMAC(cerebellar model articulation controller)를 사용하여 원하는 출력과 시스템 출력 사이의 오차가 한정됨을 보였다^[9]. Jin은 신경회로망의 가중치 갱신 법칙을 dead-zone 함수를 갖는 수정된 역전과 알고리즘을 사용하였으며, 출력 오차가 0으로 수렴함을 보이고, 이를 이용하여 전체 페루프 시스템이 안정함을 보였다^{[10][11]}. Renders는 RBF 신경회로망을 사용하고 리아프노브 식에 기초하여 비선형 시스템의 입력력 안정도를 증명하였다^[12]. Seong은 케환 선형화 기법을 기반으로 신경회로망의 가중치 갱신 법칙을 리아프노브 안정성이 보장되도록 유도하였다^[13].

기존에 외란이 있는 경우에 현실성 제어로 많은 연구가 진행되어 왔다. 본 논문에서는 외란이 있는 비선형 시스템에 대해 리아프노브 함수를 정의하여 리아프노브 안정성이 만족되도록 함으로서 출력 오차와 가중치 오차를 유한하게 하는 다층 신경회로망의 가중치 갱신 법칙을 유도한다. 전체 제어기는 케환 선형화 기법을 이용한 제어기로 구성된다. 케환 선형화 기법을 이용한 제어기에서 비선형 함수는 3층 신경회로망으로 구현되며, 가중치는 유도된 갱신 법칙을 이용하여 갱신한다. 본 논문의 구성은 II절에서 비선형 시스템을 제어하기 위한 케환 선형화 기법에 대해서 기술하고, III절에서 다층 신경회로망과 가중치 갱신 법칙에 대하여 논의한다. IV절에서 신경회로망을 이용하여 II절에서 기술한 제어기를 어떻게 구현하는지를 설명하고, V절에서 외란이 있는 전체적인 제어 시스템 구조와 리아프노브 안정성을 만족하는 신경회로망의 가중치 갱

신 법칙을 유도한다. VI절에서는 V절에서 설명한 제어 시스템을 비선형 시스템에 적용하여 알고리즘의 성능을 검증하고, VII절에서 결론을 맺는다.

II. 비선형 시스템

본 절에서는 시스템에 대한 가정과 비선형 시스템의 표준식을 정의하고 이 시스템을 제어하기 위한 케환 선형화 기법에 대하여 기술한다. 먼저, 시스템에 대해 다음과 같은 가정을 둔다.

- 가정 1.** $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 유한(bound)하며 $g(x) \neq 0$ 이다.
- 가정 2.** 원하는 시스템 상태(desired state)와 그것의 도함수는 유한하다.
- 가정 3.** 시스템의 상태는 측정 가능하다.

외란이 있는 하나의 입력과 하나의 출력을 갖는 비선형 시스템은

$$\dot{y}^{(n)} = f(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) + g(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})u + d(t) \quad (1)$$

처럼 표현된다. 여기서, y 는 시스템 출력이고 u 는 시스템 입력이며, $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 는 비선형 함수이다. $d(t)$ 는 외란을 나타내며 아래와 같이 유한(bound)하다고 가정한다.

- 가정 4.** 외란 $|d(t)| \leq d_u$ 이다.

상태 변수 x 을 아래와 같이 정의하여

$$\begin{aligned} x^T &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n-1)}) \end{aligned} \quad (2)$$

(1)을 상태 공간 모형(state space model)으로 표현하면,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n)u + d \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (3)$$

와 같이 표현된다. 이제, 추적 오차를 $e = y_d - y$ (y_d 는 원하는 시스템 출력이고 y 는 시스템 출력이다.)로 정의하고, 비선형 시스템의 비선형 함수 $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 을 정확히 알고 있고 외란이 없다고 가정하면 (1)의 비선형 시스템이 원하는 출력을 따라 가도록 하는 제어 입력 u 는 다음과 같이 표현할 수 있다^[2].

$$u = \frac{-f(x) + y_d^{(n)} + k^T e}{g(x)} \quad (4)$$

여기서, $\mathbf{k}^T = (k_1, \dots, k_n)$ 는 $h(s) = s^n + k_n s^{n-1} + \dots + k_1$ 이 Hurwitz식이 되도록 임의로 선택한 벡터이다. 그리고 \mathbf{e} 는 (5)처럼 정의된 추적 오차 벡터이다.

$$\mathbf{e}^T = (e, e^{(1)}, \dots, e^{(n-1)}) \\ = (y_d - y, y_d^{(1)} - y^{(1)}, \dots, y_d^{(n-1)} - y^{(n-1)}) \quad (5)$$

(1)에 제어 입력 (4)를 대입하면 다음과 같은 오차 방정식을 얻을 수 있기 때문에

$$e^{(n)} + k_n e^{(n-1)} \dots + k_1 e = 0 \quad (6)$$

\mathbf{k} 가 Hurwitz식을 만족하도록 선택된 벡터이므로 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 임을 알 수 있다. 즉, (4)와 같은 제어 입력을 사용하면 외란이 없는 (1)처럼 표현된 비선형 시스템의 출력은 원하는 시스템 출력을 따라 가게 할 수 있다.

III. 다층 신경회로망 (Multilayer Neural Network)

임의의 비선형 함수는 신경회로망을 이용하여 원하는 정확한 정도까지 근사화 시킬 수 있다. 이와 같은 사실을 다음과 같이 정리할 수 있다^[4].

정 리 : 최적의 가중치가 \mathbf{V}_f^* , \mathbf{w}_f^* , \mathbf{V}_g^* , \mathbf{w}_g^* 인 신경회로망 $\hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{V}_f^*, \mathbf{w}_f^*)$, $\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{V}_g^*, \mathbf{w}_g^*)$ 는 compact영역에서 임의의 정도 ϵ_f, ϵ_g 이내로 연속 함수 $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})$ 를 근사화 시킬 수 있다. 즉,

$$\max |\hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{V}_f^*, \mathbf{w}_f^*) - f(\mathbf{x})| \leq \epsilon_f \\ \max |\hat{g}(\mathbf{x}, \mathbf{V}_g^*, \mathbf{w}_g^*) - g(\mathbf{x})| \leq \epsilon_g, \text{ 모든 } \mathbf{x} \in C$$

여기서, C 는 유한 차수의 compact 영역이다.

이 정리를 이용하여 비선형 시스템에서의 비선형 함수를 신경회로망을 이용하여 다음과 같이 구현할 수 있다.

$$\hat{f} = \mathbf{w}_f^T s(\mathbf{V}_f^T \mathbf{x}), \quad \hat{g} = \mathbf{w}_g^T s(\mathbf{V}_g^T \mathbf{x}) \quad (7)$$

여기서, $\mathbf{V}_f, \mathbf{V}_g$ 는 각각 비선형 함수 $f(\cdot), g(\cdot)$ 을 근사화 하기 위한 다층 신경회로망의 은닉층의 가중치 행렬 ($n_i \times n_h$)이며, $\mathbf{w}_f, \mathbf{w}_g$ 는 출력층 가중치 벡터 ($n_i \times 1$)이고 n_i 는 입력층의 입력의 수이고 n_h 는 은닉층의 뉴런의 수이다. 그리고 $s(\cdot)$ 는 활성화 함수

로 다음과 같은 시그모이드(sigmoid) 함수를 사용한다^[5].

$$s(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (8)$$

(7)과 같이 정의된 다층 신경회로망의 각 가중치는 다음과 같이 갱신한다. 먼저, 은닉층의 가중치는 (9)와 같은 갱신 법칙으로 갱신된다.

$$\tilde{\mathbf{V}}_f = -\mathbf{e}^T \mathbf{Pb} \mathbf{x} \mathbf{w}_f^T \mathbf{D}_{s_f'} + \|\mathbf{e}\| \mathbf{V}_f \\ \tilde{\mathbf{V}}_g = -\mathbf{e}^T \mathbf{Pb} \mathbf{u} \mathbf{x} \mathbf{w}_g^T \mathbf{D}_{s_g'} + \|\mathbf{e}\| \mathbf{V}_g \quad (9)$$

여기서, $\mathbf{D}_{s'}$ 는 시그모이드 함수의 도함수 값을 대각선 성분으로 하는 대각선 행렬로 $\mathbf{D}_{s'} = \text{diag}[s_1', s_2', \dots, s_{nh}']$ 와 같이 표현된다. 시그모이드 함수의 도함수 s' 은 뉴런의 출력값으로 $s' = o(1-o)$ 와 같이 표현할 수 있다. 여기서, o 는 뉴런의 출력이다.

출력층의 가중치는 (10)에 의해 갱신할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{w}}_f = -\mathbf{e}^T \mathbf{Pb} (\hat{s}_f - \mathbf{D}_{s_f'} \mathbf{V}_f^T \mathbf{x}) \\ \tilde{\mathbf{w}}_g = -\mathbf{e}^T \mathbf{Pb} \mathbf{u} (\hat{s}_g - \mathbf{D}_{s_g'} \mathbf{V}_g^T \mathbf{x}) \quad (10)$$

위에서 기술한 (9)와 (10)는 V절에서 유도한다.

IV. 신경회로망을 이용한 제어기

II절에서 (1)과 같이 표현되는 비선형 시스템으로 외란이 없는 경우에 비선형 함수를 정확히 알고 있다면 제어 입력을 (4)처럼 할 수 있음을 알았다. 그러나, 실제 환경에서는 정확한 비선형 함수를 알 수가 없으며, 외란이 존재한다. 따라서, 미지의 비선형 함수를 III절에서 정의한 정리를 기초로 하여 다층 신경회로망으로 구현하여 제어 입력 \mathbf{u} 을 (11)과 같이 얻을 수 있으며 외란은 아래에서 모델 오차로 취급함으로써 (11)과 같은 제어 입력과 (9), (10)과 같은 신경회로망의 가중치 갱신 법칙으로 출력 오차와 가중치 오차를 유한하게 할 수 있음을 V절에서 보인다.

$$\mathbf{u} = \frac{-\hat{f}(\mathbf{x}) + y_d^{(n)} + \mathbf{k}^T \mathbf{e}}{\hat{g}(\mathbf{x})} \quad (11)$$

여기서, $\hat{f}(\cdot), \hat{g}(\cdot)$ 는 비선형 함수를 다층 신경회로망으로 구현한 것이다.

오차 식을 얻기 위하여 (11)을 (1)에 대입하여 정리하면

$$e^{(n)} = y^{(n)} - y_d^{(n)} = k^T e + (f(x) - \hat{f}(x)) + (g(x) - \hat{g}(x))u + a \quad (12)$$

를 얻을 수 있다. 여기서, 추적 오차 벡터 (5)를 $e^T = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ 와 같이 정의한 오차에 대한 상태 변수로 표현하여 (12)를 상태 방정식(state equation)으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{e} = A e + b[(f(x) - \hat{f}(x)) + (g(x) - \hat{g}(x))u + d] \quad (13)$$

여기서 A , b 는 다음과 같다.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \dots & \dots & -k_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

V. 리아프노브 안정성(Lyapunov Stability)

본 절에서는 외란이 있는 시스템의 비선형 함수를 다층 신경회로망으로 구현하였을 때 출력 오차를 유효하게 하는 신경회로망의 가중치 갱신 법칙((9), (10))을 유도한다. 다음과 같은 안정성 이론을 정리한다.¹¹⁴

이론 : 미분 방정식이 다음과 같이 주어졌다.

$$\dot{x} = f(x)$$

그리고 D 를 유한한 원점 주위의 영역이고 D^c 를 그것의 complement라 하자. 그러면 D^c 에서 연속적인 도함수를 갖는 스칼라 함수 $V(x)$ 가 다음을 만족하면 위에서 주어진 방정식의 해는 $t \geq 0$ 동안에 유한(bound)하게 된다.

- i) $V(x) > 0 \quad \forall x \in D^c$
- ii) $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in D^c$
- iii) $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) \rightarrow \infty$

전체적인 페루프 제어 시스템의 블록도는 그림 1과 같다.

다층 신경회로망의 가중치 갱신 법칙의 유도 과정에서 활용하기 위해 시그모이드 함수 $s(x)$ 의 특징에 대해 아래의 Lemma로 정리한다.

Lemma : 시그모이드 함수 $s(x)$ 는 다음과 같은 특성을 갖는다.

- (1) 시그모이드 함수 $s(x)$ 는 strictly increasing 하다.
- (2) $\frac{ds}{dx} \geq 0$
- (3) $\dot{s}(x_1, x_2) = s(x_1) - s(x_2) = \frac{ds}{dx} \Big|_{x=z} \hat{x}$

증명 :

- (1) (8)과 같이 시그모이드 함수의 정의에 의해 자명하다.
- (2) 시그모이드 함수는 항상 증가 함수이므로 그것의 1차 도함수는 양수이다. 즉,

$$\frac{ds}{dx} \geq 0 \quad (15)$$

이다.

- (3) (8)과 같이 정의된 $s(x)$ 는 모든 x 에 대해 연속이고 연속인 1차 도함수를 갖는다. 따라서, 평균치 정리에 의해

$$\dot{s}(x_1, x_2) = s(x_1) - s(x_2) = \frac{ds}{dx} \Big|_{x=z} (x_1 - x_2) \quad (16)$$

이다. 여기서, z 는 x_1 과 x_2 사이의 임의의 점이다. 따라서, $\dot{s}(x_1, x_2) = \frac{ds}{dx} \Big|_{x=z} \hat{x}$ 이다.

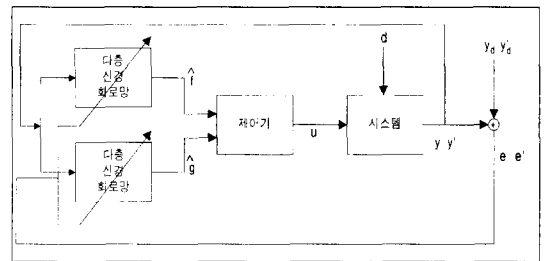


그림 1. 제어 시스템 블록도
Fig. 1. The block diagram of control system.

사 실 : 신경 회로망의 입력 x 의 norm은 다음 부등식을 만족한다.

$$\|x\| \leq c_1 \|y_d\| + c_2 \|e\| \quad (17)$$

증명 :

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2} = \sqrt{(y_d - e)^2 + (y_d' - e')^2 + \dots + (y_d^{(n-1)} - e^{(n-1)})^2} \\ &= \sqrt{(\|y_d\| + \|e\|)^2 - 2(y_d e + y_d' e' + \dots + y_d^{(n-1)} e^{(n-1)})} \\ &\leq c_1 \|y_d\| + c_2 \|e\| \end{aligned}$$

이제 다음과 같은 정리를 정의할 수 있다.

정리 : 가정 1 ~ 가정 4하에, 다층 신경회로망의 가중치를 (9)와 (10)로 갱신하면 제어 입력 (11)은 출력 오차를 유한하게 하며 신경회로망의 가중치와 최적의 가중치와의 차를 유한하게 한다.

증명 : 먼저, 앞에서 얻었던 오차 식 (12)를 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\dot{e} = A e + b[(\hat{f}^*(x) - \hat{f}(x)) + (\hat{g}^*(x) - \hat{g}(x))u] + b\varepsilon + ba \quad (18)$$

여기서, $\hat{f}^*(\cdot)$, $\hat{g}^*(\cdot)$ 는 최적의 다층 신경회로망 가중치를 사용했을 때 비선형 함수 값이고, $\hat{f}(\cdot)$, $\hat{g}(\cdot)$ 는 현 시점의 다층 신경회로망 가중치를 사용했을 때 비선형 함수 값이다. ε 은 아래 (19)와 같이 정의된다. (19)에서 $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 는 비선형 함수 실제 값이다. ε 은 최적의 가중치를 사용했을 때의 신경회로망의 출력 값과 실제 비선형 함수 값의 차이로 신경회로망에 의한 비선형 함수의 모델링 오차이다.

$$\varepsilon = \{f(x) - \hat{f}(x)\} + \{g(x) - \hat{g}(x)\}u \quad (19)$$

이제, 아래와 같은 리아프노브 함수(Lyapunov function)를 정의하자.

$$V = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2} \tilde{w}_f^T \tilde{w}_f + \frac{1}{2} \tilde{w}_g^T \tilde{w}_g + \frac{1}{2} \text{tr}[\tilde{V}_f^T \tilde{V}_f] + \frac{1}{2} \text{tr}[\tilde{V}_g^T \tilde{V}_g] \quad (20)$$

여기서, \tilde{w} 는 다층 신경회로망의 최적의 출력층 가중치와 현 시점의 출력층 가중치 사이의 차이 ($\tilde{w} = w^* - w$)이며 \tilde{V} 는 다층 신경회로망의 최적의 은닉층 가중치와 현 시점의 은닉층 가중치 사이의 차이 ($\tilde{V} = V^* - V$)이다.

(20)을 미분하여 정리하면

$$\dot{V} = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2} e^T P \dot{e} + \tilde{w}_f^T \dot{\tilde{w}}_f + \tilde{w}_g^T \dot{\tilde{w}}_g + \text{tr}[\tilde{V}_f^T \dot{\tilde{V}}_f] + \text{tr}[\tilde{V}_g^T \dot{\tilde{V}}_g] \quad (21)$$

와 같이 된다. 이 식에 앞에서 구한 오차 식 (18)을 대입하여 정리하면 아래와 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} e^T (A^T P + P A) e + e^T P b \varepsilon \\ &+ e^T P b [(\hat{f}^* - \hat{f}) + (\hat{g}^* - \hat{g})u] \\ &+ \tilde{w}_f^T \dot{\tilde{w}}_f + \tilde{w}_g^T \dot{\tilde{w}}_g \\ &+ \text{tr}[\tilde{V}_f^T \dot{\tilde{V}}_f] + \text{tr}[\tilde{V}_g^T \dot{\tilde{V}}_g] \end{aligned} \quad (22)$$

이제, 리아프노브 방정식(Lyapunov Equation)을 아래 (23)와 같이 정의 한다^[14].

$$A^T P + P A = -Q \quad (23)$$

여기서, P , Q 는 Positive Definite Symmetric Matrix이다. (22)중에서 $\hat{f}^* - \hat{f}$ 을 아래 (24)와 같이 변형할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{f}^* - \hat{f} &= w_f^{*T} s_f - w_f^T \hat{s}_f \\ &= w_f^{*T} s_f - w_f^T \hat{s}_f + w_f^{*T} \hat{s}_f - w_f^T \hat{s}_f \\ &= (w_f^* - w_f)^T \hat{s}_f - w_f^{*T} (s_f - \hat{s}_f) \\ &= \tilde{w}_f^T \hat{s}_f + w_f^{*T} \tilde{s}_f \\ &= \tilde{w}_f^T \hat{s}_f + \tilde{w}_f^T \tilde{s}_f + w_f^{*T} \tilde{s}_f \end{aligned} \quad (24)$$

또한, \tilde{s} 를 변형하기 위해 다음 변수를 정의한다.

$$\begin{aligned} y_i &= v_i^T x, \quad y_i^* = v_i^{*T} x \\ v_i &= (v_{i1} \ v_{i2} \ \dots \ v_{in_i})^T, \quad i = 1, \dots, n_h \end{aligned} \quad (25)$$

앞의 Lemma (3)에 의해 $\dot{\tilde{s}}$ 는 다음과 같이 변형 된다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{s}}_i &= \hat{s}'_i(y_i^*) - \hat{s}'_i(y_i) \\ &= \left. \frac{d\hat{s}_i}{dy} \right|_{y=z_i} (v_i^{*T} x - v_i^T x) \\ &= \left. \frac{d\hat{s}_i}{dy} \right|_{y=z_i} \tilde{v}_i^T x \end{aligned} \quad (26)$$

여기서, z_i 는 y_i 와 y_i^* 사이의 임의의 점이다. 따라서, $\dot{\tilde{s}}(V^T x)$ 는 (27)과 같이 변형 된다.

$$\dot{\tilde{s}}(V^T x) = D_s \tilde{V}^T x \quad (27)$$

여기서, $D_s = \text{diag}[s'_1 \ s'_2 \ \dots \ s'_{nh}]$ 이다. (24)에 (27)을 대입하면

$$\begin{aligned} \hat{f}^* - \hat{f} &= \tilde{w}_f^T \hat{s}_f + \tilde{w}_f^T D_s \tilde{V}_f^T x + w_f^{*T} D_s \tilde{V}_f^T x \\ &= \tilde{w}_f^T \hat{s}_f + \tilde{w}_f^T D_s (V_f^* - V_f)^T x + w_f^{*T} D_s \tilde{V}_f^T x \\ &= \tilde{w}_f^T (\hat{s}_f - D_s V_f^T x) + w_f^{*T} D_s \tilde{V}_f^T x - \tilde{w}_f^T D_s V_f^{*T} x \end{aligned} \quad (28)$$

$\hat{g}^* - \hat{g}$ 도 (28)과 비슷하게 변형할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{g}^* - \hat{g} &= \tilde{w}_g^T (\hat{s}_g - D_{s_g} V_g^T x) + w_g^{*T} D_{s_g} \tilde{V}_g^T x \\ &+ \tilde{w}_g^T D_{s_g} V_g^{*T} x \end{aligned} \quad (29)$$

(28)과 (29)를 \dot{V} 에 대입 정리하면 (30)과 같다.

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -\frac{1}{2} e^T Q e + e^T P b (\varepsilon + d) \\
& + \tilde{w}_f^T \{ \tilde{w}_f + e^T P b (\hat{s}_f - D_{s_f} V_f^T x) \} \\
& + \tilde{w}_g^T \{ \tilde{w}_g + e^T P b u (\hat{s}_g - D_{s_g} V_g^T x) \} \\
& + \text{tr} \left[\tilde{V}_f^T \left(\tilde{V}_f + e^T P b x w_f^T D_{s_f} \right) \right] \\
& + \text{tr} \left[\tilde{V}_g^T \left(\tilde{V}_g + e^T P b u x w_g^T D_{s_g} \right) \right] \\
& + e^T P b \tilde{w}_f^T D_{s_f} V_f^{*T} x + e^T P b u \tilde{w}_g^T D_{s_g} V_g^{*T} x
\end{aligned} \quad (30)$$

(30)에 다음과 같은 신경회로망의 가중치 갱신 법칙을 적용하면 (32)를 얻는다.

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{w}}_f &= -e^T P b (\hat{s}_f - D_{s_f} V_f^T x) \\
\dot{\tilde{w}}_g &= -e^T P b u (\hat{s}_g - D_{s_g} V_g^T x) \\
\dot{\tilde{V}}_f &= -e^T P b x w_f^T D_{s_f} + \|e\| V_f \\
\dot{\tilde{V}}_g &= -e^T P b u x w_g^T D_{s_g} + \|e\| V_g
\end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -\frac{1}{2} e^T Q e + e^T P b (\varepsilon + d) \\
& + \|e\| \text{tr} \left[\tilde{V}_f^T V_f \right] + \|e\| \text{tr} \left[\tilde{V}_g^T V_g \right] \\
& + e^T P b \tilde{w}_f^T D_{s_f} V_f^{*T} x + e^T P b u \tilde{w}_g^T D_{s_g} V_g^{*T} x
\end{aligned} \quad (32)$$

(32)로 부터 아래와 같은 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq & -\frac{1}{2} \|Q\| \|e\|^2 + \|e\| \|P b\| (\varepsilon_u + d_u) \\
& + \|e\| \| \tilde{V}_f \| \| V_f \| + \|e\| \| \tilde{V}_g \| \| V_g \| \\
& + \|e\| \| P b \| \| \tilde{w}_f \| \| D_{s_f} \| \| V_f^* \| \| x \| \\
& + \|e\| \| P b \| \| d \| \| \tilde{w}_g \| \| D_{s_g} \| \| V_g^* \| \| x \|
\end{aligned} \quad (33)$$

여기서, 앞에서 기술한 사실을 적용하면 (34), (35)와 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
\|e\| \| P b \| \| \tilde{w}_f \| \| D_{s_f} \| \| V_f^* \| \| x \| &\leq c_4 \|e\| \| \tilde{w}_f \| (c_1 \| y_d \| + c_2 \| e \|) \\
&\leq c_4 \|e\| \| \tilde{w}_f \| (c_1 \| y_d \| + c_2 \| e \|) \\
&\leq c_4 \| \tilde{w}_f \| \| e \| + c_5 \| \tilde{w}_f \| \| e \|^2
\end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
\|e\| \| P b \| \| d \| \| \tilde{w}_g \| \| D_{s_g} \| \| V_g^* \| \| x \| \\
\leq c_4 \| \tilde{w}_g \| \| d \| \| e \| + c_5 \| \tilde{w}_g \| \| d \| \| e \|^2
\end{aligned} \quad (35)$$

(34), (35)를 (33)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq & -\frac{1}{2} \|Q\| \|e\|^2 + \|e\| \|P b\| (\varepsilon_u + d_u) \\
& + \|e\| \| \tilde{V}_f \| \| V_f^* - \tilde{V}_f \| + \|e\| \| \tilde{V}_g \| \| V_g^* - \tilde{V}_g \| \\
& + c_4 \| \tilde{w}_f \| \| e \| + c_5 \| \tilde{w}_f \| \| e \|^2 + c_4 \| \tilde{w}_g \| \| d \| \| e \| + c_5 \| \tilde{w}_g \| \| d \| \| e \|^2
\end{aligned} \quad (36)$$

이 된다. (36)은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq & -\|e\| \left[\left\{ \frac{1}{2} \|Q\| - c_5 (\| \tilde{w}_f \| + \| \tilde{w}_g \| \| d \|) \right\} \|e\| \right. \\
& \left. - \left\{ \|P b\| (\varepsilon_u + d_u) + c_4 (\| \tilde{w}_f \| + \| \tilde{w}_g \| \| d \|) \right\} \right] \\
& - \|e\| \| \tilde{V}_f \| (\| \tilde{V}_f \| - \| V_f^* \|) - \|e\| \| \tilde{V}_g \| (\| \tilde{V}_g \| - \| V_g^* \|)
\end{aligned} \quad (37)$$

여기서, 원점을 포함하는 영역 $D((e, \tilde{V}_f, \tilde{V}_g, \tilde{w}_f, \tilde{w}_g))$ 를 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}
D((e, \tilde{V}_f, \tilde{V}_g, \tilde{w}_f, \tilde{w}_g) \mid \|e\| \leq \frac{\|P b\| (\varepsilon_u + d_u) + c_4 (\| \tilde{w}_f \| + \| \tilde{w}_g \| \| d \|)}{\frac{1}{2} \|Q\| - c_5 (\| \tilde{w}_f \| + \| \tilde{w}_g \| \| d \|)}, \\
\| \tilde{V}_f \| \leq \| V_f^* \|, \| \tilde{V}_g \| \leq \| V_g^* \|}
\end{aligned} \quad (38)$$

따라서, 영역 $D((e, \tilde{V}_f, \tilde{V}_g, \tilde{w}_f, \tilde{w}_g))$ 의 complement인 D^c 에서 $\dot{V} \leq 0$ 이 된다. 그러므로 앞에서 기술한 안정성 이론에 의해 미분 방정식 (8) (31)의 해가 유한하게 되므로 출력 오차와 신경회로망의 가중치 오차는 유한(bound)하게 된다.

VI. 모의 실험

앞에서 기술한 제어 구조와 신경회로망의 가중치 갱신 법칙을 Inverted Pendulum System에 적용하여 컴퓨터 모의 실험을 통하여 성능을 검증하였다. 사용한 시스템의 동역학 방정식은 다음과 같다^[15].

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{g \sin x_1 - \frac{m l x_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c + m}}{\left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m} \right)} + \frac{\cos x_1}{\frac{m_c + m}{m_c + m}} u + a \\
y &= x_1
\end{aligned} \quad (39)$$

여기서, $g=9.8m/s^2$, $m_c=1kg$, $m=0.1kg$, $l=0.5m$ 이다. 그리고 $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 을 독립적으로 학습시키기 위해 두 개의 3층 신경회로망을 사용하였으며, 시스템이 2차이므로 입력이 2개이고, 은닉층은 20개의 뉴런(neuron)을 사용하였다. 제어기를 구성하기 위한 각종 인수들의 값은 $k^T=[6.0 \ 8.0]$ 이고, 외란은 $d(t)=0.05 \cos t$ 를 적용하였으며, 신경회로망의 가중치의 초기값은 $[-0.5, 0.5]$, $[-2.0, 2.0]$ 사이의 난수로 했을 경우에 대해 모의 실험을 하였다. 다층 신경회로망의 학습률은 0.4로 하였다. 제어기의 샘플링 시간은 10msec로 하였다. 시스템의 초기 상태 변수 값은 $(-\frac{\pi}{60}, 0)$ 으로 하였다. 시스템과 제어기의 컴퓨터 모의 실험을 위하여 4차 Runge-Kutta 적분 방법을 사용하였다. 원하는 시스템의 출력은 $y_d = \frac{\pi}{30} \sin\left(\frac{2\pi}{6} t\right)$ 로 하였다.

그림 2는 가중치의 초기값을 $[-0.5, 0.5]$ 사이의 난수로 하였을 때의 출력과 오차에 대한 결과이며, 그림 3은 출력의 도함수와 오차이고, 그림 4는 이때 사용한 제어 입력이다.

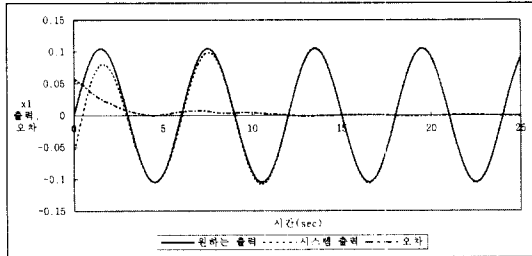


그림 2. 원하는 출력과 시스템 출력 및 오차
(가중치 초기값 : $[-0.5, 0.5]$ 사이의 난수)
Fig. 2. The Desired output and the system output and the error.
(weight initial value : $[-0.5, 0.5]$ random number)

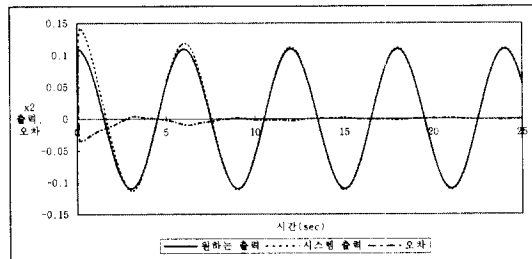


그림 3. 원하는 출력의 도함수와 시스템 출력의 도함수 및 오차
(가중치 초기값 : $[-0.5, 0.5]$ 사이의 난수)
Fig. 3. The Desired output derivative and the system output derivative and the error.
(weight initial value : $[-0.5, 0.5]$ random number)

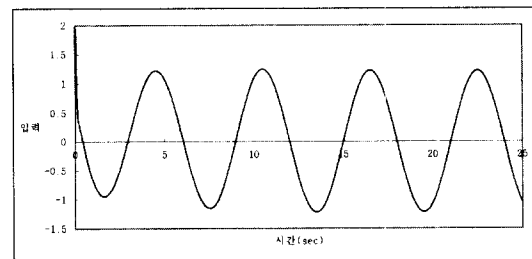


그림 4. 제어 입력 (가중치 초기값 : $[-0.5, 0.5]$ 사이의 난수)
Fig. 4. The control input. (weight initial value : $[-0.5, 0.5]$ random number)

그림 5, 6, 7은 가중치의 초기값을 $[-2.0, 2.0]$ 사이의 난수로 하였을 경우의 출력과 그 오차, 도함수의 출력과 그 오차, 그리고 제어 입력이다.

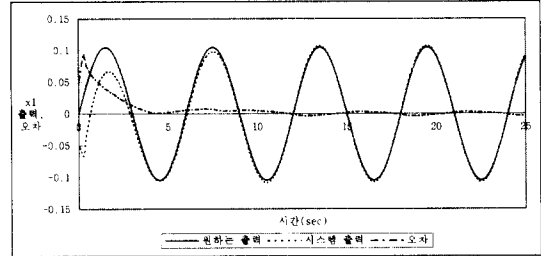


그림 5. 원하는 출력과 시스템 출력 및 오차
(가중치 초기값 : $[-2.0, 2.0]$ 사이의 난수)
Fig. 5. The Desired output and the system output and the error.
(weight initial value : $[-2.0, 2.0]$ random number)

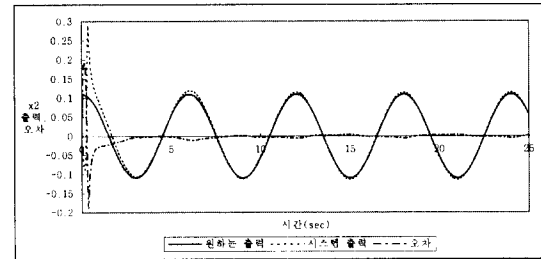


그림 6. 원하는 출력의 도함수와 시스템 출력의 도함수 및 오차
(가중치 초기값 : $[-2.0, 2.0]$ 사이의 난수)
Fig. 6. The Desired output derivative and the system output derivative and the error.
(weight initial value : $[-2.0, 2.0]$ random number)

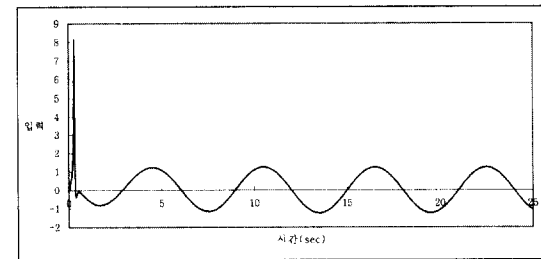


그림 7. 제어 입력 (가중치 초기값 : $[-2.0, 2.0]$ 사이의 난수)
Fig. 7. The control input. (weight initial value : $[-2.0, 2.0]$ random number)

그림 2에서 볼 수 있듯이 제안한 알고리즘에 의해 외란이 있는 비선형 시스템을 제어하였을 경우 시스템의 출력과 그 도함수가 원하는 출력과 그 도함수를 점차 따라 감을 알 수 있다. 그리고 가중치의 초기값에 따른 변화는 초기값의 설정 범위가 클수록 초반부의 제어 입력과 오차가 크음을 알 수 있다. 그러나 결국은 오차가 유한하게 되며 제어 입력도 일정한 패턴을 유지하여 초기값의 설정 범위의 크기에 거의 무관하게 결국은 시스템의 출력이 원하는 출력을 따라감을 알 수 있다.

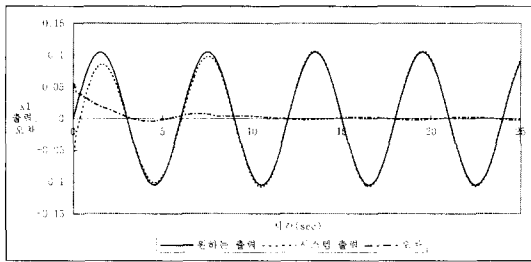


그림 8. 원하는 출력과 시스템 출력 및 오차 (은닉층 뉴런의 수 : 20)

Fig. 8. The Desired output and the system output and the error.
(The number of neuron at hidden layer : 20)

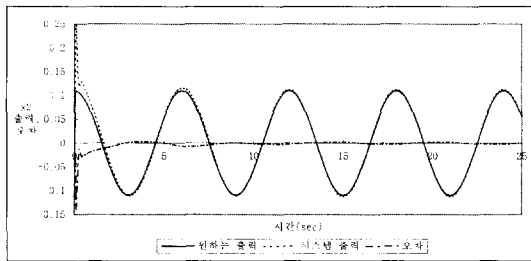


그림 9. 원하는 출력의 도함수와 시스템 출력의 도함수 및 오차 (은닉층 뉴런의 수 : 80)

Fig. 9. The Desired output derivative and the system output derivative and the error.
(The number of neuron at hidden layer : 80)

그림 8은 가중치의 초기값을 $[-0.5, 0.5]$ 사이의 난수로 하고 은닉층의 뉴런의 수를 80으로 하였을 경우의 시스템 출력과 원하는 출력 및 오차를 나타내고 있으며, 그림 9는 그 도함수들과 오차이며 그림 10은 그때의 제어 입력이다. 은닉층의 뉴런의 수가 많은 경우 적은 수의 뉴런을 갖는 경우보다 초반부에 있어서

출력 오차와 제어 입력이 큰 값을 가짐을 알 수 있다. 그러나 결국에 가서는 거의 비슷한 결과를 얻었다. 따라서, 어느 정도 이상의 은닉층의 뉴런 수에 대해서는 비슷한 결과를 가지므로 적당한 뉴런의 수를 사용하면 될 것이다. 그러나 현재 알려진 은닉층의 뉴런의 적당한 수를 구하는 것은 시행착오에 의해 얻을 수 밖에 없다.

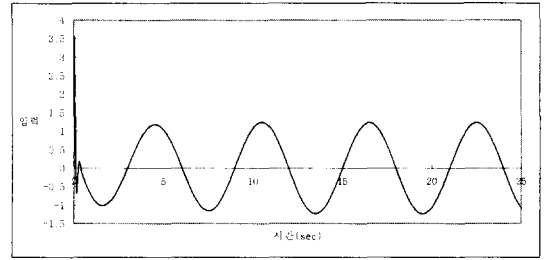


그림 10. 제어 입력 (은닉층 뉴런의 수 : 80)

Fig. 10. The control input. (The number of neuron at hidden layer : 80)

VII. 결 론

현재까지 시스템 제어 응용에 많은 사람들이 신경 회로망을 이용하였으나 제어 문제의 근본이라 할 수 있는 안정성, 수렴성 등에 대한 수학적인 해결에는 미미한 점이 많았다. 본 논문에서는 이러한 문제를 분석하고 해석하고자 다층 신경회로망을 이용하고 신경회로망의 가중치 갱신 법칙을 유도하여 출력 오차와 가중치 오차가 유한하게 됨을 보였으며 외란이 있는 비선형 시스템의 모의 실험을 통하여 성능을 고찰해 보았다. 즉, 신경회로망의 가중치를 매 샘플링 시간마다 갱신함으로써 비교적 빠른 시간 내에 출력의 오차가 유한하게 됨을 보았다. 제안된 제어기로 동력학 방정식을 정확히 알지 못하는 외란이 있는 비선형 시스템에 대한 출력의 추적 문제를 어느 정도 해결할 수 있을 것으로 본다. 본 논문에서는 신경회로망의 출력이 하나인 경우에 대해 가중치 갱신 법칙을 유도하였는데 이를 여러개의 출력을 갖는 신경회로망으로 확장할 수 있을 것인고 이것을 이용하여 다입력 다출력(MIMO) 시스템에 적용할 수 있을 것이다. 이를 향후 연구 과제로 들 수 있으며, 또한 은닉층의 층수가 둘 이상일 경우 시스템의 안정성이 보장되는 갱신 법칙이 고려되어야 할 것으로 본다.

참 고 문 헌

- [1] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems: An Introduction*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2ed, 1989.
- [2] J-J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall International, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [3] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice Hall International, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [4] K. Hornik, M. Stinchcombe, and H. White, "Multilayer feedforward networks are universal approximators," *Neural Networks*, vol.2, pp. 359-366, 1989.
- [5] D. Psaltis, A. Sideris and A.A. Yamamura, "A multilayered neural network controller," *IEEE Control System Magazine*, vol.8, no. 2, pp. 17-21, Apr. 1988.
- [6] F.C. Chen, "Back-propagation neural networks for nonlinear self tuning adaptive control," *IEEE Control System Magazine*, vol. 10, no.2, pp. 44-48, Apr. 1990.
- [7] F.C. Chen and H.K. Khalil, "Adaptive control of nonlinear systems using neural networks-a dead-zone approach," *Proceedings of American Control Conference*, vol. 1, pp. 667-672, 1991.
- [8] A. Yesildirek and F.L. Lewis, "A neural net controller for robots with hebbian tuning and guaranteed tracking," *Proceedings of the American Control Conference*, vol. 4, pp. 2784-2789, Jun. 1995.
- [9] Y. Jin, G. Pipe and A. Winfield, "Stable neural control of discrete systems," *Proceedings of the 1993 International Symposium of Intelligent Control*, pp. 110-115, Aug. 1993.
- [10] L. Jin, P.N. Nikiforuk and M.M. Gupta, "Adaptive tracking of SISO nonlinear systems using multilayered neural networks," *Proceedings of the American Control Conference*, vol. 1, pp. 56-60, 1992.
- [11] L. Jin, P.N. Nikiforuk and M.M. Gupta, "Direct adaptive output tracking control using multilayered neural networks", *IEEE Proceedings-D*, vol. 140, No. 6, pp. 393-398. Nov. 1993.
- [12] J.M. Renders, M. Saerens and H. Bersini, "Adaptive neurocontrol of MIMO systems based on stability theory", *IEEE International Conference on Neural Network*, vol. 4, pp. 2476-2481, 1994.
- [13] 성홍석, 이쾌희, "리아프노프 안정성이 보장되는 신경회로망을 이용한 비선형 시스템 제어", *제어·자동화·시스템공학 논문지*, 제2권 제3호, pp. 142-147, 1996
- [14] K.S. Narendra and A.M. Annaswamy, *Stable Adaptive Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [15] Li-in Wang, *Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and Stability Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.

저 자 소 개



成 弘 (正會員)
 1986년 2월 서강대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1988년 2월 서강대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사). 1997년 2월 서강대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학박사).
 1988년 2월 ~ 현재 한국전자통신연구원 재직. 주관심 분야는 적응 제어, 비선형 시스템 제어, 신경회로망 등임.

李 夫 熙 (正會員) 第 33 卷 B編 第 4 號 參照
 현재 서강대학교 전자공학과 교수