

이산시스템의 positive real 특성을 유지하는 일반화된 특이 섭동 근사화

(Generalized singular perturbation approximation preserving positive real property of discrete system)

吳道昌*, 金載權**, 方敬皓***, 朴烘培****

(Do Chang Oh, Jae Gwon Kim, Kyung Ho Bang, and Hong Bae Park)

요 약

본 논문에서는 이산 PR(positive real) 성질을 유지하는 일반화된 특이 섭동 근사화(generalized singular perturbation approximation: GSPA)를 제시한다. 이산 PR 시스템을 확률론적 균형화시스템(stochastically balanced system)으로 변환하고 이 시스템의 GSPA로부터 저차의 이산모델을 얻는다. 특히 GSPA의 자유매개변수가 ± 1 인 경우에는 저차의 이산모델이 안정성, 최소성(minimality)과 PR, 및 확률론적 균형성(stochastic balancing)등을 그대로 유지함을 보인다. 또한 제시한 방법에 의해서 얻은 저차의 이산 SPR(strictly PR) 시스템에 대하여 저차의 모델과 원래의 모델 사이에 ∞ -노름(norm) 오차한계치를 구한다. 마지막으로 예제를 통하여 제시된 방법에 의하여 구해진 저차의 모델이 가지는 성질을 확인하고 기존의 GSPA 및 균형화된 확률론적 절단(balanced stochastic truncation: BST)에 의한 저차의 모델들과 비교 분석한다.

Abstract

This paper is on the generalized singular perturbation approximation (GSPA) preserving the discrete positive real property. We transform the discrete positive real(PR) system into a stochastically balanced system and get the reduced order discrete system from the GSPA of the full order stochastically balanced system. Especially, when the free parameter of the GSPA is ± 1 , we show that the reduced order discrete system retains stability, minimality, and positive real and stochastically balancing properties. And we derive the ∞ -norm error bound with the reduced order discrete strictly positive real(SPR) system by the proposed method. Finally, we give an example to ascertain the properties of the proposed reduced order discrete system and to compare with the conventional methods.

* 正會員, 建陽大學校 情報電子工學部 制御計測

(Dept. of Information and Electronics, Konyang Univ.)

** 正會員, 現代重工業 産業技術研究所, 自動化研究室
(Automation Research Dept., Industrial Research Institute, Hyundai Heavy Industries)

*** 正會員, 慶北大學校 電子電氣工學部
(School of Elec. & Electrical Eng., Kyungpook Nat'l Univ.)

接受日字: 1996年6月5日, 수정완료일: 1997年8月19日

I. 서 론

연속 및 이산시간에서 동적시스템의 차수를 줄이는 문제는 H^∞ 이론이 활성화되면서 더욱 많은 관심을 끌게 되었다.^[1,2] 최근에는 H^∞ 에 속하는 연속 및 이산시스템에서 가제어성(controllability)과 가관측성(observability) gramian을 균형화하여 균형화시스템을 얻은 후 BT(balanced truncation)^[1]나 특이 섭동 근사화(SPA)^[3,4]를 이용하여 저차의 모델을 얻는 방법들이 제시되었고 이러한 근사화 기법을 통합하여

Al-Saggaf^[5]와 Liu^[6] 등은 연속 및 이산 균형화 시스템의 GSPA를 제안하였다.

Desai^[7,8] 등은 확률론적 균형화구현(stochastically balanced realization)을 정의하고 positive real인 형태로 표현되는 연속 및 이산시스템의 BST를 제시하였다. Harshavardhana^[9] 등은 이 BST에 의한 저차의 연속시스템은 안정성, 최소성과 PR, 및 확률론적 균형성(stochastic balancing)을 그대로 유지함을 보였다. 따라서 BST는 기존의 BT에서는 불가능하였던 PR과 확률론적 균형성의 보존을 보장할 수 있다. 이러한 PR성질의 보존성은 수동성(passivity)^[10]의 보존이라는 측면에서, 또한 positive real인 제어기로서 페루프시스템의 안정성과 H^∞ 성능을 보존하는^[11,12] 측면에서 모델 및 제어기 축소 이론에서 중요한 특성이다. Green^[13]과 Wang^[14,15] 등은 연속 및 이산 확률론적 균형화시스템의 BST에서 상대적인 오차한계치를 구하였다. Chen^[11] 등은 연속 ESPR(extended SPR) 시스템의 BST에서 Wang의 방법과 다른 절대적 ∞ -노음 오차한계치를 구하였다. ∞ -노음 오차한계치는 모델을 축소하기 전에 미리 그 오차의 한계치를 알 수 있다는 측면에서 중요하며, 원래의 모델이 가지는 여러가지 특성과 더불어 모델축소 알고리즘의 성능을 가늠하는 성능지수이다. 이러한 BST는 고주파영역에 비하여 저주파영역에서 매우 큰 오차를 가진다. 따라서 특정주파수에서 원래의 시스템과 일치하는 GSPA 기법을 연속 및 이산 확률론적 균형화시스템에 적용할 필요성이 대두된다. 이러한 확률론적 균형화시스템의 GSPA와 기존의 균형화시스템의 GSPA에서는 서로 다른 Lyapunov 방정식의 해를 이용한다는 측면에서 서로 완전히 다른 저차의 모델들을 얻는다. 여기서 가장 중요한 것은 확률론적 균형화시스템에 GSPA를 적용하였을 경우 저차의 모델이 가지는 성질들, 즉 안정성, 최소성과 PR, 및 확률론적 균형성을 보존함을 보이고, ∞ -노음 오차한계치를 구하는 것이다. 연속 확률론적 균형화시스템의 경우 BST와 Muscato^[16] 등이 제시한 SPA는 GSPA의 특수한 경우들이고, Muscato 등은 SPA로부터 얻어진 저차의 모델에 대한 특성을 규명하였으나 ∞ -노음 오차한계치는 구하지 못하였다. 또한 이산 확률론적 균형화시스템의 GSPA 및 GSPA에 의한 저차의 모델에 관한 성질들과 ∞ -노음 오차한계치는 지금까지 규명된 바 없다.

따라서, 본 논문에서는 연속 및 이산 확률론적 균형화시스템의 GSPA를 정의하고, 복소평면의 ± 1 인 점에서 이산 GSPA의 경우에 저차의 이산모델은 안정성, 최소성과 PR, 및 확률론적 균형성을 유지한다는 것을 증명한다. 그리고 연속 확률론적 균형화시스템의 SPA에서 ∞ -노음 오차한계치를 구하고, 이것을 이용하여 복소평면의 ± 1 인 점에서 이산 GSPA의 경우 ∞ -노음 오차한계치를 구한다. 예제를 통하여 제시된 방법에 의하여 구해진 저차의 이산모델이 가지는 성질들을 확인하고 기존의 이산 GSPA^[6] 및 BST^[15]에 의한 저차의 모델들과 비교분석한다.

II. 예비지식

이 장에서는 본 논문에 필요한 정의와 연속 및 이산 PR 시스템에 대하여 알아본다.

1. RH^∞ 및 RH_D^∞ 공간

전달함수 $G(s)$ 가 개우반부(open right half plane)에서 해석적이고 ∞ -노음 $\|G(s)\|_\infty \triangleq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega))$ 이 유한한 실유리(real rational) Hardy 공간을 RH^∞ 공간이라 정의한다. 여기서 \mathbb{R} 은 실수공간이다.

전달함수 $F(z)$ 가 개단위원(open unit disc)의 바깥쪽에서 해석적이고 ∞ -노음 $\|F(z)\|_\infty \triangleq \sup_{\theta} \bar{\sigma}(F(e^{j\theta}))$ 이 유한한 실유리 Hardy 공간을 이산 RH_D^∞ 공간이라 정의한다. 여기서 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 이다.

2. 연속 및 이산 PR 시스템

RH^∞ 공간에 속하고 최소구현(minimal realization)이며 정방인 연속시스템 $G(s) \triangleq (A, B, C, D)$ 가 PR(SPR)일 필요충분조건은

$$G(s) + G^T(-s) \geq 0 (>0), \quad \forall \text{Re}(s) > 0 (>0), \quad s \in \mathbb{C} \quad (1)$$

이다. 여기서 \mathbb{C} 는 복소수공간이며, $G(j\infty) + G^T(-j\infty) > 0$ 이면 ESPR이라고 정의한다. RH_D^∞ 공간에 속하고 최소구현이며 정방인 이산시스템 $F(z) \triangleq (\Phi, \Gamma, H, E)$ 가 PR(SPR)일 필요충분조건은

$$F(z) + F^T(z^{-1}) \geq 0 (>0), \quad \forall |z| > 1 (>1), \quad z \in \mathbb{C} \quad (2)$$

이다.^[10,11,15]

3. 가역시스템^[16,16]

RH^∞ 공간에 속하는 연속시스템 $G(s) = (A, B, C, D)$ 에서 A 가 비특이 행렬일때 가역사상 (RM: reciprocal mapping)은 $RM[G(s)] = G(s^{-1}) \triangleq R(s)$ 로 정의하고 가역시스템 $R(s)$ 의 상태공간 표현 $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ 를

$$\hat{A} \triangleq A^{-1}, \hat{B} \triangleq -A^{-1}B, \hat{C} \triangleq CA^{-1}, \hat{D} \triangleq D - CA^{-1}B \quad (3)$$

와 같이 표현한다. 여기서 가역사상은 전단사사상 (bijective mapping)이다. 즉 $R(s)$ 의 가역시스템은 $G(s)$ 이다.

Ⅲ. 연속 및 이산 PR 시스템에서 확률론적 균형화

이 장에서는 연속 및 이산 PR 시스템의 확률론적 균형화^[11,14,15,17]에 대하여 알아본다. 여기서 “확률론적 시스템” 혹은 “확률론적 구현”이라는 용어는 PR성질을 가지는 전달함수형태의 시스템을 의미한다.^[19]

1. 연속 PR 시스템의 확률론적 균형화^[11,14]

RH^∞ 공간에 속하고 최소구현이며 정방인 연속시스템 $G(s) = (A, B, C, D)$ 가 확률론적 균형화구현일 필요충분조건은

$$XA + A^T X = -K_C^T K_C \quad (4)$$

$$C^T - XB = K_C^T W_C \quad (5)$$

$$D + D^T = W_C^T W_C \quad (6)$$

$$AX + XA^T = -L_C L_C^T \quad (7)$$

$$B - XC^T = L_C V_C^T \quad (8)$$

$$D + D^T = V_C V_C^T \quad (9)$$

$$X = \text{diag}(X_1, X_2) = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n) \\ 1 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} \geq \dots \geq \sigma_n > 0 \quad (10)$$

을 만족하는 $X = X^T > 0$, K_C, W_C, L_C, V_C 가 존재하는 것이다. 여기서 n 은 행렬 A 의 차원이고 $\sigma_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 는 $K_C(sI - A)^{-1} L_C$ 의 Hankel 특이치(Hankel singular value)이다. 또한 $V_{CS}(s) \triangleq V_C + C(sI - A)^{-1} L_C$ 와 $W_{CS}(s) \triangleq W_C + K_C(sI - A)^{-1} B$ 로 정의하면 $G(s) + G^T(-s) = V_{CS}(s) V_{CS}^T(-s) = W_{CS}^T(-s) W_{CS}(s)$ 를 만족하고, $V_{CS}(s)$ 와 $W_{CS}(s)$ 는 $(G(s) + G^T(-s))$ 의 spectral 요소들이다.

2. 이산 PR 시스템의 확률론적 균형화^[15]

RH_D^∞ 공간에 속하고 최소구현이며 정방인 이산시스템 $F(z) = (\Phi, \Gamma, H, E)$ 가 확률론적 균형화구현일 필요충분조건은

$$\Phi^T Y \Phi - Y = -K_{DC}^T K_{DC} \quad (11)$$

$$H^T - \Phi^T Y \Gamma = K_{DC}^T W_{DC} \quad (12)$$

$$E + E^T - \Gamma^T Y \Gamma = W_{DC}^T W_{DC} \quad (13)$$

$$\Phi Y \Phi^T - Y = -L_{DC} L_{DC}^T \quad (14)$$

$$\Gamma^T - H Y \Phi^T = V_{DC} L_{DC}^T \quad (15)$$

$$E + E^T - H Y H^T = V_{DC} V_{DC}^T \quad (16)$$

$$Y = \text{diag}(Y_1, Y_2) = \text{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \xi_{r+1}, \dots, \xi_m) \\ 1 \geq \xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots \geq \xi_r > \xi_{r+1} \geq \dots \geq \xi_m > 0 \quad (17)$$

을 만족하는 $Y = Y^T > 0$, $K_{DC}, W_{DC}, L_{DC}, V_{DC}$ 가 존재하는 것이다. 여기서 m 은 행렬 Φ 의 차원이고 $\xi_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 는 $K_{DC}(zI - \Phi)^{-1} L_{DC}$ 의 Hankel 특이치이다. 또한 $V_{DS}(z) \triangleq V_{DC} + H(zI - \Phi)^{-1} L_{DC}$ 와 $W_{DS}(z) \triangleq W_{DC} + K_{DC}(zI - \Phi)^{-1} \Gamma$ 로 정의하면 $F(z) + F^T(z^{-1}) = V_{DS}(z) V_{DS}^T(z^{-1}) = W_{DS}^T(z^{-1}) W_{DS}(z)$ 를 만족하고, $V_{DS}(z)$ 와 $W_{DS}(z)$ 는 $(F(z) + F^T(z^{-1}))$ 의 spectral 요소들이다.

정리 1

연속 및 이산 확률론적 균형화시스템 $G(s)$ 와 $F(z)$ 가 양선형사상의 관계, 즉

$$A = (I + \Phi)^{-1} (\Phi - I) \\ B = \sqrt{2} (I + \Phi)^{-1} \Gamma \\ C = \sqrt{2} H (I + \Phi)^{-1} \\ D = E - H (I + \Phi)^{-1} \Gamma \quad (18)$$

을 만족할때 $X = Y$ 이다.

증명 식 (18)을 이용하여 식 (4)~(10)으로부터 식 (11)~(17)을 얻는 과정으로 증명한다. 먼저 식 (4)~(10)에서

$$K_{DC} \triangleq \sqrt{2}K_C(I-A)^{-1}, \quad W_{DC} \triangleq W_C + K_C(I-A)^{-1}B \quad (19)$$

$$L_{DC} \triangleq \sqrt{2}(I-A)^{-1}L_C, \quad V_{DC} \triangleq V_C + C(I-A)^{-1}L_C \quad (20)$$

라 정의하고 식 (18)을 이용하면

$$K_{DC} = \frac{1}{\sqrt{2}}K_C(I+\Phi), \quad W_{DC} = W_C + K_{DC}(I+\Phi)^{-1}\Gamma \quad (21)$$

$$L_{DC} = \frac{1}{\sqrt{2}}(I+\Phi)L_C, \quad V_{DC} = V_C + H(I+\Phi)^{-1}L_{DC} \quad (22)$$

임을 알 수 있다. 식 (18),(21),(22)를 이용하여 식 (4)와 (7)을 다시 표현하면

$$\begin{aligned} X(I+\Phi)^{-1}(\Phi-I) + (\Phi^T-I)(I+\Phi^T)^{-1}X \\ = -2(I+\Phi^T)^{-1}K_{DC}^TK_{DC}(I+\Phi)^{-1} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} (I+\Phi)^{-1}(\Phi-I)X + X(\Phi^T-I)(I+\Phi^T)^{-1} \\ = -2(I+\Phi)^{-1}L_{DC}L_{DC}^T(I+\Phi^T)^{-1} \end{aligned} \quad (24)$$

이다. 식 (23)의 앞뒤로 $(I+\Phi^T)$ 와 $(I+\Phi)$ 를 각각 곱하고, 식 (24)의 앞뒤로 $(I+\Phi)$ 와 $(I+\Phi^T)$ 를 각각 곱하여 정리하면

$$\Phi^TX\Phi - X = -K_{DC}^TK_{DC} \quad (25)$$

$$\Phi X\Phi^T - X = -L_{DC}L_{DC}^T \quad (26)$$

이다. 다음으로 식 (18)을 이용하여 식 (5)와 (6), 및 (8)과 (9)를 각각 변형하면

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(I+\Phi^T)^{-1}H^T - X\sqrt{2}(I+\Phi)^{-1}\Gamma \\ = \sqrt{2}(I+\Phi^T)^{-1}K_{DC}^TW_{DC} - \sqrt{2}(I+\Phi^T)^{-1}K_{DC}^TK_{DC}(I+\Phi)^{-1}\Gamma \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} E - H(I+\Phi)^{-1}\Gamma + E^T - \Gamma^T(I+\Phi^T)^{-1}H^T \\ = W_{DC}^TW_{DC} - W_{DC}^TK_{DC}(I+\Phi)^{-1}\Gamma - \Gamma^T(I+\Phi^T)^{-1}K_{DC}^TW_{DC} \\ + \Gamma^T(I+\Phi^T)^{-1}K_{DC}^TK_{DC}(I+\Phi)^{-1}\Gamma \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(I+\Phi)^{-1}\Gamma - X\sqrt{2}(I+\Phi^T)^{-1}H^T \\ = \sqrt{2}(I+\Phi)^{-1}L_{DC}V_{DC}^T - \sqrt{2}(I+\Phi)^{-1}L_{DC}L_{DC}^T(I+\Phi^T)^{-1}H^T \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} E - H(I+\Phi)^{-1}\Gamma + E^T - \Gamma^T(I+\Phi^T)^{-1}H^T \\ = V_{DC}V_{DC}^T - V_{DC}L_{DC}^T(I+\Phi^T)^{-1}H^T - H(I+\Phi)^{-1}L_{DC}V_{DC}^T \\ + H(I+\Phi)^{-1}L_{DC}L_{DC}^T(I+\Phi^T)^{-1}H^T \end{aligned} \quad (30)$$

와 같이 표현할 수 있으며, 식 (25)과 (26)을 이용하여 식 (27)과 (29)를 다시 정리하면

$$H^T - \Phi^TX\Gamma = K_{DC}^TW_{DC} \quad (31)$$

$$\Gamma^T - HX\Phi^T = V_{DC}L_{DC}^T \quad (32)$$

이다. 식 (25)와 (26), 및 식 (31)과 (32)를 이용하면 식 (28)과 (30)은

$$E + E^T - \Gamma^TX\Gamma = W_{DC}^TW_{DC} \quad (33)$$

$$E + E^T - HXH^T = V_{DC}V_{DC}^T \quad (34)$$

이다. 식 (25),(31),(33)과 식 (11),(12),(13)을 비교하고, 식 (26),(32),(34)와 식 (14),(15),(16)을 비교할때 $Y = X$ 임을 알 수 있다. ■

여기서 주목할 것은 연속 및 이산시간에서 $G(s)$ 와 $F(z)$ 가 식 (18)을 만족하는 양선형사상, $z = (1+s)/(1-s)$, 의 관계에 있을때 정리 1에 의하면 PR 및 확률론적 균형성을 그대로 유지한다는 것이다.

IV. PR의 성질을 유지하는 이산 GSPA

이 장에서는 Liu^[6] 등이 제시한 기존의 균형화시스템에 대한 연속 및 이산 GSPA를 확률론적 균형화시스템에 적용하고, 연속 확률론적 균형화시스템에 대한 GSPA의 특수한 경우에 대하여 ∞ -노움 오차한계치를 구한다. 이 결과와 Chen^[11]의 BST에 대한 결과를 기초로 하여 궁극적으로 이산 확률론적 균형화시스템의 GSPA를 제시하고, PR성질을 포함한 여러가지 성질들의 보존성을 보이며 ∞ -노움 오차한계치를 구한다.

1. 연속 확률론적 균형화시스템의 GSPA에 의한 모델 차수줄임

RH^∞ 공간에 속하는 연속 확률론적 균형화시스템 $G(s) = (A, B, C, D)$ 를 $\text{diag}(X_1, X_2)$ 와 차원이 일치하도록

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = [C_1 \ C_2] \quad (35)$$

로 분리한다. 여기서 연속 GSPA에 의한 전달함수형태의 저차의 모델은

$$G_r(s, s_0) = C_r(s_0)(sI - A_r(s_0))^{-1}B_r(s_0) + D_r(s_0), \quad (36)$$

$$\begin{aligned} A_r(s_0) &\triangleq A_{11} + A_{12}(s_0I - A_{22})^{-1}A_{21} \\ B_r(s_0) &\triangleq B_1 + A_{12}(s_0I - A_{22})^{-1}B_2 \\ C_r(s_0) &\triangleq C_1 + C_2(s_0I - A_{22})^{-1}A_{21} \\ D_r(s_0) &\triangleq D + C_2(s_0I - A_{22})^{-1}B_2 \end{aligned} \quad (37)$$

와 같이 정의된다. 여기서 s_0 는 복소평면상의 한점이다. 이러한 근사화방법을 연속 확률론적 균형화시스템의 GSPA라 하고 일반적인 균형화시스템의 경우와 같이 저차의 연속모델은 $s = s_0$ 에서 원래의 연속모델과 같은 응답을 가진다. 여기서 $s_0 \rightarrow \infty$ 일때 $G_r(s, \infty)$ 은 Desai와 Wang 등이 제시한 BST이고 $s_0 = 0$ 일때 $G_r(s, 0)$ 는 Muscato 등이 제시한 SPA와 같다.

보조정리 1^[9,16,17]

연속 확률론적 균형화구현 $G(s) = (A, B, C, D)$ 의 BST와 SPA에 의한 저차의 모델 $G_r(s, \infty) = (A_{11}, B_1, C_1, D)$ 와 $G_r(s, 0) = (A_r(0), B_r(0), C_r(0), D_r(0))$ 는 안정성, 최소성과 PR, 및 확률론적 균형성을 각각 보존한다. ■

보조정리 2^[11]

$G(s) = (A, B, C, D)$ 를 연속 ESPR 시스템이라 가정하면 BST에 의한 저차의 시스템 $G_r(s, \infty) = (A_{11}, B_1, C_1, D)$ 에 대한 ∞ -노움 오차한계치는

$$\|G(j\omega) - G_r(j\omega, \infty)\|_{\infty} \leq \lambda_{\max}(D + D^T) \sum_{i=1}^n \frac{2\sigma_i}{(1 - \sigma_i)^2} \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{2\sigma_j}{(1 - \sigma_j)}\right)^2 \quad (38)$$

이다. 여기서 $\sigma_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 는 식 (10)에 정의된 것과 같이 $K_C(sI - A)^{-1}L_C$ 의 Hankel 특이치이고 r 은 $G_r(s, s_0)$ 의 McMillan degree이다. ■

연속 확률론적 균형화시스템의 SPA에서 ∞ -노움 오차한계치를 구하는 보조정리 4의 증명을 위하여 필요한 가역사상의 성질을 보조정리 3에서 보인다.

보조정리 3

가역사상은 $\text{RM}[G(s) - G_a(s)] = \text{RM}[G(s)]$

$-\text{RM}[G_a(s)]$ 의 성질을 가진다. 여기서 $G(s)$ 와 $G_a(s)$ 는 RH^∞ 공간에 속하는 임의의 연속시스템이다.

증명) $G(s) = (A, B, C, D)$ 라 두고 $G_a(s) \triangleq (A_a, B_a, C_a, D_a)$ 라 정의하면

$$G(s) - G_a(s) = \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ B_a \end{bmatrix}, [C \quad -C_a], D - D_a \right) \quad (39)$$

임을 쉽게 알 수 있고, $\text{RM}[G(s) - G_a(s)]$ 의 상태공간 표현을 $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ 라 두었을때 식 (3)을 이용하면

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_a \end{bmatrix}^{-1} \\ \tilde{B} &= -\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ B_a \end{bmatrix} \\ \tilde{C} &= [C \quad -C_a] \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_a \end{bmatrix}^{-1} \\ \tilde{D} &= -[C \quad -C_a] \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_a \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ B_a \end{bmatrix} + D - D_a \end{aligned} \quad (40)$$

이다. 식 (39)의 표현방법과 식 (3)을 이용하여 $(\text{RM}[G(s)] - \text{RM}[G_a(s)])$ 의 상태공간 표현을 구하면

$$\begin{aligned} &\left(\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A_a^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -A^{-1}B \\ -A_a^{-1}B_a \end{bmatrix}, [CA^{-1} \quad -C_aA_a^{-1}], D - D_a - CA^{-1}B + C_aA_a^{-1}B_a \right) \\ &= (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}) = \text{RM}[G(s) - G_a(s)] \end{aligned} \quad (41)$$

임을 알 수 있다. ■

보조정리 4

$G(s) = (A, B, C, D)$ 를 연속 ESPR 시스템이라 가정하면 연속 확률론적 균형화시스템의 SPA에 의한 저차의 시스템 $G_r(s, 0) = (A_r(0), B_r(0), C_r(0), D_r(0))$ 의 ∞ -노움 오차한계치는

$$\|G(j\omega) - G_r(j\omega, 0)\|_{\infty} \leq \lambda_{\max}(\tilde{D} + \tilde{D}^T) \sum_{i=1}^n \frac{2\sigma_i}{(1 - \sigma_i)^2} \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{2\sigma_j}{(1 - \sigma_j)}\right)^2 \quad (42)$$

이다. 여기서 $\tilde{D} = D - CA^{-1}B$ 이고 σ_i 는 식 (10)에 정의된 것과 같다.

증명) $G(s)$ 의 가역시스템을 $R(s)$ 라 가정하였을때 참고문헌 [11]에 있는 정리 2의 증명을 이용하면

$$\|R(j\omega) - R_r(j\omega, \infty)\|_{\infty} \leq \lambda_{\max}(\tilde{D} + \tilde{D}^T) \sum_{i=1}^n \frac{2\sigma_i}{(1 - \sigma_i)^2} \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{2\sigma_j}{(1 - \sigma_j)}\right)^2 \quad (43)$$

이다. 여기서 $R_r(s, \infty)$ 은 가역시스템 $R(s)$ 의 BST에 의한 저차의 모델이다. 또한 SPA 이론^[16]에 따르면 $RM[R_r(s, \infty)] = G_r(s, 0)$ 임을 쉽게 알 수 있다. 이러한 관계를 도식적으로 표현하면 그림 1과 같다.

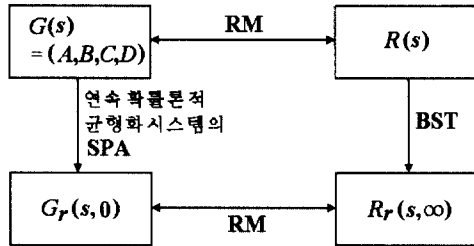


그림 1. 연속 확률론적 균형화시스템에 대한 BST와 SPA의 가역사상

Fig. 1. Reciprocal mapping between continuous BST and SPA for stochastically balanced system.

보조정리 2를 이용하면 $RM[R_r(s, \infty) - R(s)] = G_r(s, 0) - G(s)$ 이며 가역사상은 ∞ -노음을 보존하므로^[16] $\|G_r(j\omega) - G_r(j\omega, 0)\|_\infty = \|R_r(j\omega, \infty) - R(j\omega)\|_\infty$ 이다. 따라서 $G(s)$ 의 SPA에 대한 ∞ -노음 오차한계치는 식 (42)와 같다. ■

여기서 주목할 것은 보조정리 4의 결과는 확률론적 균형화시스템이 아닌 일반적인 균형화시스템의 경우와 다르다는 것이다. 즉 Pernebo^[11] 등의 일반적인 균형화시스템에서는 BT와 SPA의 ∞ -노음 오차한계치가 같으나^[5,6], 확률론적 균형화시스템에서는 BST와 SPA의 ∞ -노음 오차한계치가 각각 다르게 나타난다. 이러한 연속 SPA에서의 결과를 이용하여 4.2절에서는 이산 확률론적 균형화시스템의 경우로 확장한다.

2. 이산 확률론적 균형화시스템의 GSPA에 의한 모델 차수줄임

본 절에서는 이산 확률론적 균형화시스템의 GSPA를 제시한다. 식 (11)부터 식 (17)을 만족하는 이산 확률론적 균형화시스템 $F(z) = (\Phi, \Gamma, H, E)$ 를 $\text{diag}(Y_1, Y_2)$ 와 차원이 일치하도록 분리하고, i 와 j 가 각각 1 혹은 2일때 그 부행렬을 각각 Φ_{ij}, Γ_j, H_i 라 두면 전달함수형태의 저차의 모델은

$$F_r(z, z_0) = H_r(z_0)(zI - \Phi_r(z_0))^{-1}\Gamma_r(z_0) + E_r(z_0), \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \Phi_r(z_0) &= \Phi_{11} + \Phi_{12}(z_0I_{n-r} - \Phi_{22})^{-1}\Phi_{21} \\ \Gamma_r(z_0) &= \Gamma_1 + \Phi_{12}(z_0I_{n-r} - \Phi_{22})^{-1}\Gamma_2 \\ H_r(z_0) &= H_1 + H_2(z_0I_{n-r} - \Phi_{22})^{-1}\Phi_{21} \\ E_r(z_0) &= E + H_2(z_0I_{n-r} - \Phi_{22})^{-1}\Gamma_2 \end{aligned} \quad (45)$$

이다. 여기서 z_0 는 복소평면상의 한점이다. 이러한 근사화방법을 이산 확률론적 균형화시스템의 GSPA라고 하고 일반적인 균형화시스템의 경우와 같이 저차의 이산모델은 $z = z_0$ 에서 원래의 이산모델과 같은 응답을 가진다. 또한 기존의 이산 BST는 제시된 확률론적 균형화시스템의 GSPA에서 $z_0 \rightarrow \infty$ 인 특수한 경우이다. 정리 2에서는 z_0 가 ± 1 의 값을 가지는 것으로 가정하고 이산 확률론적 균형화시스템의 GSPA에 의한 저차의 모델이 가지는 성질을 규명한다.

정리 2

이산 확률론적 균형화시스템의 GSPA에서 Y_1 과 Y_2 가 식 (17)과 같이 공통의 대각요소가 없다고 가정하면 $z_0 = \pm 1$ 인 경우 저차의 모델은 안정성, 최소성과 PR, 및 확률론적 균형성이 각각 보존된다.

증명) 양선형사상, 즉 식 (18)의 관계를 만족하는 연속 및 이산시스템은 안정성과 최소성을 그대로 유지한다.^[5,6] 또한 정리 1에 따르면 식 (18)의 관계를 만족하는 연속 및 이산 확률론적 균형화시스템은 PR과 확률론적 균형을 그대로 유지한다. 양선형사상 $z_0 = (1 + s_0)/(1 - s_0)$ 에 의해 $z_0 = 1$ 과 $z_0 = -1$ 은 각각 연속시스템에서 $s_0 = 0$ 과 $s_0 \rightarrow \infty$ 에 대응된다. 따라서 보조정리 1에서 주어진 연속시스템에서 BST와 SPA가 가지는 성질들이 이산시스템에서도 그대로 만족함을 보이려면 $F_r(z, -1)$ 과 $G_r(s, \infty)$, 및 $F_r(z, 1)$ 과 $G_r(s, 0)$ 가 각각 양선형사상의 관계를 가짐을 보이면 증명은 완료된다. Liu^[6]는 단지 $z_0 = 1$ 인 경우에 국한하여 $F_r(z, 1) = (\Phi_r(1), \Gamma_r(1), H_r(1), E_r(1))$ 가 $G_r(s, 0) = (A_r(0), B_r(0), C_r(0), D_r(0))$ 의 양선형사상을 보였다. 이러한 Liu의 결과를 복소평면의 모든 s_0 와 z_0 에 대하여 일반화한 참고문헌 [18]에서 정리 2의 증명을 이용하면, 저차의 시스템 $F_r(z, -1) = (\Phi_r(-1), \Gamma_r(-1), H_r(-1), E_r(-1))$ 의 양선형사상은 $G_r(s, \infty) = (A_{11}, B_1, C_1, D)$ 임을 알 수 있다. 따라서 $F_r(z, \pm 1) = (\Phi_r(\pm 1), \Gamma_r(\pm 1), H_r(\pm 1),$

$E, (\pm 1)$)는 각각 안정하고 최소화구현이고 PR이며 확률론적 균형화구현이다. ■

보조정리 2와 보조정리 4의 결과를 이용하여 이산 확률론적 균형화시스템의 GSPA에서 ∞ -노움 오차한 계치를 구하기 위하여 필요한 양선형사상의 성질을 보조정리 5에서 보인다.

보조정리 5

식 (18)의 양선형사상(bilinear mapping: BM)은 $BM[G(s) - G_a(s)] = BM[G(s)] - BM[G_a(s)]$ 을 만족한다. 여기서 $G(s)$ 와 $G_a(s)$ 는 RH^∞ 공간에 속하는 임의의 함수이다.

증명) 보조정리 2와 같은 방법으로 쉽게 증명할 수 있으므로 생략한다. ■

정리 3

이산 확률론적 균형화시스템 $F(z) = (\Phi, \Gamma, H, E)$ 를 SPR 시스템이라 가정하면 이산 확률론적 균형화시스템의 GSPA에서 $z_0 = -1$ 과 $z_0 = 1$ 인 경우 ∞ -노움 오차한계치는 각각

$$\|F(e^{j\omega}) - F_r(e^{j\omega}, -1)\|_\infty \leq \lambda_{\max}(\bar{E} + \bar{E}^T) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{2\xi_i}{(1-\xi_i)^2} \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{2\xi_j}{(1-\xi_j)}\right)^2 \quad (46)$$

$$\|F(e^{j\omega}) - F_r(e^{j\omega}, 1)\|_\infty \leq \lambda_{\max}(\hat{E} + \hat{E}^T) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{2\xi_i}{(1-\xi_i)^2} \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{2\xi_j}{(1-\xi_j)}\right)^2 \quad (47)$$

이다. 여기서 $\bar{E} \triangleq E - H(I + \Phi)^{-1}\Gamma$, $\hat{E} \triangleq E + H(I - \Phi)^{-1}\Gamma$ 이고 $\xi_i (i=1, 2, \dots, n)$ 는 식 (17)에 정의된 것과 같이 $K_{DC}(zI - \Phi)^{-1}L_{DC}$ 의 Hankel 특이치이며 r 은 $F_r(z, \pm 1)$ 의 McMillan degree이다.

증명) $F(z)$ 를 식 (18)의 양선형사상하여 연속시스템으로 변환한 후 이 연속시스템의 확률론적 균형화구현을 구한다. 연속 BST와 SPA에 의해서 저차의 연속모델들을 얻고 이 저차의 연속모델들을 양선형사상하면 구하려는 저차의 이산모델들을 얻는다. 정리 2에 따르면 이산시스템에서 $z_0 = -1$ 과 $z_0 = 1$ 에서의 GSPA는 원래의 이산시스템을 양선형사상한 연속시스템에서 BST와 SPA에 의해 구해진 저차의 시스템임

을 알 수 있다. $BM[F(z)] = G(s)$ 라 두고, 이러한 관계를 도식적으로 표현하면 그림 2과 같다.

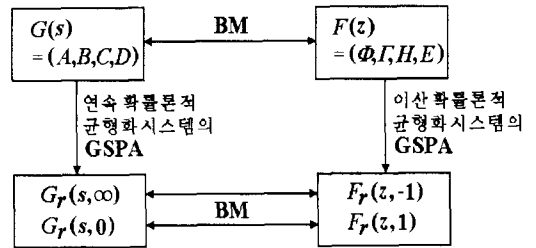


그림 2. 연속 및 이산 확률론적 균형화시스템에 대한 GSPA들의 양선형사상

Fig. 2. Bilinear mapping between GSPAs for continuous and discrete stochastically balanced systems.

여기서 보조정리 5와 ∞ -노움을 보존하는 양선형사상의 성질^[19]에 의해서

$$\begin{aligned} \|F(e^{j\omega}) - F_r(e^{j\omega}, -1)\|_\infty &= \|BM[F(e^{j\omega})] - F_r(e^{j\omega}, -1)\|_\infty \\ &= \|BM[F(e^{j\omega})] - BM[F_r(e^{j\omega}, -1)]\|_\infty \\ &= \|G(j\omega) - G_r(j\omega, \infty)\|_\infty, \quad (48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|F(e^{j\omega}) - F_r(e^{j\omega}, 1)\|_\infty &= \|BM[F(e^{j\omega})] - F_r(e^{j\omega}, 1)\|_\infty \\ &= \|BM[F(e^{j\omega})] - BM[F_r(e^{j\omega}, 1)]\|_\infty \\ &= \|G(j\omega) - G_r(j\omega, 0)\|_\infty \quad (49) \end{aligned}$$

이다. 또한 식 (18)에 의해서 $F_r(z, -1)$ 와 $F_r(z, 1)$ 를 각각 양선형사상한 연속시스템 $G_r(s, \infty)$ 와 $G_r(s, 0)$ 의 D-행렬은 각각 \bar{E} 와 \hat{E} 로 구해진다. ■

V. 예 제

식 (50)과 같이 주어진 이산 PR 시스템에 대하여 확률론적 균형화시스템을 구한 후, 그 시스템들의 GSPA를 고려한다. 여기서 식 (11)~(17)의 해는 MAT-LAB Toolbox를 이용하여 구하며, Y , K_{DC} , W_{DC} , L_{DC} , V_{DC} 는 각각 (51)에 나타나 있다. 식 (44)에 의하여 구해진 3차의 $F_r(z, 1)$ 와 $F_r(z, -1)$ 는 각각 식 (52)과 (53)로 주어진다.

$$F(z) = \frac{1.057 z^6 - 0.1718 z^5 - 1.229 z^4 - 0.5724 z^3 + 0.5468 z^2 - 0.1718 z - 0.03024}{z^6 - 0.1718 z^5 - 0.3706 z^4 - 0.5724 z^3 - 0.3119 z^2 - 0.1718 z - 0.02682} \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
 W_{DC} &= 0.8745, \quad V_{DC} = 0.8745 \\
 K_{DC} &= [0.2364 \quad 0.6819 \quad 0.1814 \quad 0.2124 \quad -0.0205 \quad -0.0033] \\
 L_{DC}^T &= [0.2364 \quad -0.6819 \quad 0.1814 \quad -0.2124 \quad -0.0205 \quad 0.0033]^T \\
 Y &= \text{diag}(0.9288, 0.8425, 0.5267, 0.1526, 0.0208, 0.0012)
 \end{aligned} \tag{51}$$

$$F_r(z, 1) = \frac{1.04 z^3 - 0.09554 z^2 - 0.7104 z + 0.483}{z^3 - 0.5093 z^2 + 0.1988 z - 0.6293} \tag{52}$$

$$F_r(z, -1) = \frac{1.074 z^3 - 0.5886 z^2 + 1.022 z + 0.04268}{z^3 - 0.8387 z^2 + 0.3347 z - 0.4683} \tag{53}$$

$$F_r(z, \infty) = \frac{1.057 z^3 - 0.3188 z^2 + 0.8516 z + 0.2841}{z^3 - 0.6538 z^2 + 0.252 z - 0.5484} \tag{54}$$

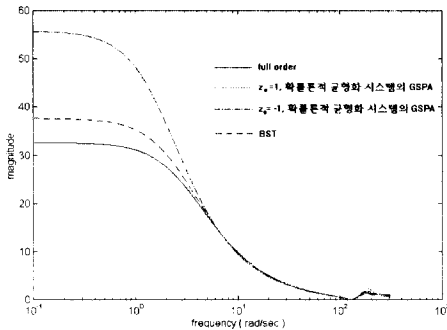


그림 3. 저차모델의 주파수응답 비교
 Fig. 3. Comparison of frequency responses of reduced order models.

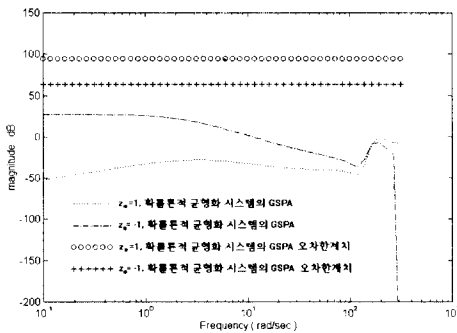


그림 4. ∞-노름 오차한계치와 실제오차
 Fig. 4. ∞-norm error bound and actual error.

기존의 이산 BST와 제안된방법에 의한 저차의 모델들의 주파수응답을 그림 3에서 비교한다. 저주파영역에서 제시된 방법에 의한 $F_r(z, 1)$ 는 기존의 이산 BST보다 원래의 모델에 더욱 가깝고, $F_r(z, -1)$ 는 이산 BST보다 성능이 떨어진다. ∞-노름 오차한계치

는 그림 4와 같이 실제오차와 상당한 차이를 보이지만, 최근 PR 시스템의 차수축소^[11,15] 방법에서 제시된 ∞-노름 오차한계치들은 모두 비슷한 결과를 보이며, 좀 더 조밀한 ∞-노름 오차한계치를 구하는 것이 필요하다.

여기서는 표본화 시간이 $T=10\text{ms}$ 로 두고 시뮬레이션 하였다.

그림 5와 6는 본 논문에서 가장 중요한 결과인 PR 성질의 보존성을 보인다. 기존의 균형화시스템에 대한 GSPA는 1 [rad] ~ 1.5 [rad] 영역에서 이산 PR성질을 보존하지 않으며 제시된 확률론적 균형화시스템의 GSPA는 이산 PR성질을 보존한다.

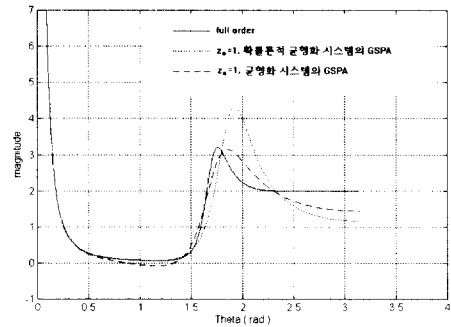


그림 5. PR성질의 보존성 비교($z_0=1$, GSPA)
 Fig. 5. Comparison for preservation of positive real property($z_0=1$, GSPA).

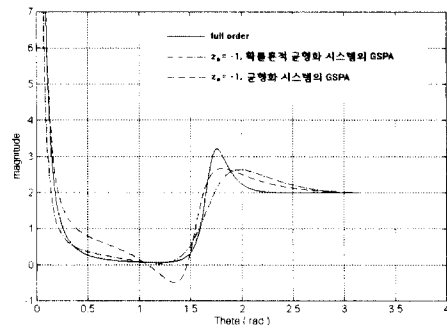


그림 6. PR성질의 보존성 비교($z_0=-1$, GSPA)
 Fig. 6. Comparison for preservation of positive real property($z_0=-1$, GSPA).

그림 5와 6의 세로축은 각각 $|F_r(z, 1) + F_r^T(z^{-1}, 1)|$ 와 $|F_r(z, -1) + F_r^T(z^{-1}, -1)|$ 이다. $z_0 = 1$ 인 경우

저차의 모델은 영(zero)주파수에서 원래의 모델과 일치하므로 저주파수영역에서 원래의 모델과 비교적 비슷한 응답을 보이고 $z_0 = -1$ 인 경우는 Nyquist 주파수에서 원래의 모델과 일치하므로 고주파수영역에서 원래의 모델과 비교적 비슷한 응답을 보인다. 그림 5에서는 '0' 주파수에서 원래의 모델과 일치하며, 그림 6에서는 Nyquist 주파수에서 원래의 모델과 일치함을 알 수 있다.

VI. 결 론

본 논문에서는 이산 PR성질을 유지하는 일반화된 특이 섭동 근사화(GSPA)를 제시하였다. 이산 확률론적 균형화시스템에서 GSPA의 자유매개변수가 ± 1 인 경우에는 저차의 이산시스템이 안정성, 최소성과 PR, 및 확률론적 균형성등을 그대로 유지함을 보였다. 또한 연속 확률론적 균형화시스템의 SPA에서 ∞ -노음 오차한계치를 구하고, 이것을 이용하여 이산시스템이 SPR일때 원래 이산모델과 저차의 이산모델 사이에 ∞ -노음 오차한계치를 구하였다. 기존의 이산 GSPA와 비교하여 보면 PR성질을 유지하는 장점이 있으나 상대적으로 ∞ -노음 오차한계치가 다소 커지는 단점이 있다. 또한 PR성질을 유지하는 기존의 이산 BST와 비교하면 저주파성능이 크게 개선되었음을 알 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] L. Pernebo and L. M. Silverman, "Model reduction via balanced state space representations," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 27, no. 2, pp. 382-387, April 1982.
- [2] D. Enns, "Model reduction for control system design," Ph.D. Dissertation, Dept. of Aeronautics, Standford, CA, 1984.
- [3] K. V. Fernando and H. Nicholson, "Singular perturbational model reduction of balanced systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 27, no. 2, pp. 466-468, April 1982.
- [4] K. V. Fernando and H. Nicholson, "Singular perturbational approximations for discrete time balanced systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 28, no. 2, pp. 240-242, Feb. 1983.
- [5] U. M. Al-saggaf and G. F. Franklin, "Model reduction via balanced realizations: An extention and frequency weighting techniques," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, no. 7, pp. 687-692, July 1988.
- [6] Y. Liu and B. D. O. Anderson, "Singular perturbation approximation of balanced systems," *Int. J. Contr.*, vol. 50, no. 4, pp. 1379-1405, April 1989.
- [7] U. B. Desai "Approximation of stochastic systems: Reduced-order estimator and controller," in *Proc. 22nd IEEE Conf. Decision Contr.*, pp. 1254-1259, Dec. 1983.
- [8] U. B. Desai and D. Pal, "A transformation approach to stochastic model reduction," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 29, no. 12, pp. 1097-1100, Dec. 1984.
- [9] P. Harshavardhana, E. A. Jonckheere, and L. M. Silverman, "Stochastic balancing and approximation-Stability and minimality," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 29, no. 8, pp. 744-746, Aug. 1984.
- [10] D. C. McFarlane and K. Glover, *Robust Controller Design*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 138, Springer-Verlag, 1990.
- [11] X. Chen and J. T. Wen, "Positive realness preserving model reduction with H^∞ norm error bounds," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 42, no. 1, pp. 23-29, Jan. 1995.
- [12] X. Chen and J. T. Wen, "Positive real controller design-An LMI approach," in *Proc. Amer. Contr. Conf.*, Samore, Washington, June 1995.
- [13] M. Green, "A relative error bound for balanced stochastic truncation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, no. 10, pp. 961-965, Oct. 1988.
- [14] W. Wang and M. G. Safonov, "A tighter relative-error bound for balanced stochastic truncation," *Systems and Control Lett.*, vol. 14, no. 4, pp. 307-317, 1990.
- [15] W. Wang and M. G. Safonov, "Relative-error bound for discrete balanced stochastic truncation," *Int. J. Contr.*, vol.

- 54, no. 3, pp. 593-612, 1991.
- [16] G. Muscato, G. Nunnari, and L. Fortuna, "Singular perturbation approximation of bounded real and of positive real transfer matrices," in *Proc. Amer. Contr. Conf.*, Baltimore, Maryland, June 1994.
- [17] P. C. Opatenacker and E. A. Jonckheere, "A contraction mapping preserving balanced reduction scheme and its infinity norm error bounds," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, vol. 35, no. 2, pp. 184-189, Feb. 1988.
- [18] 오도창, 정은태, 박홍배, "Bounded real 전달함수의 이산모델 차수줄임," 대한전자공학회 논문지, 제 33B권, 제 5호, pp. 33-40, 1996
- [19] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their L^∞ error bounds," *Int. J. Contr.*, vol. 39, no. 6, pp. 1115-1193, June 1984.

저 자 소 개

吳道昌(正會員) 第33卷 B編 第5號 參照
 현재 건양대학교 정보전자공학부
 제어계측전공 교수



金載權(正會員)
 1969년 3월 26일생. 1994년 2월
 경북대학교 전자공학과 졸업. 1997
 년 동 대학원 공학석사 취득. 현재
 현대중공업 산업기술연구소 자동화
 연구실 연구원. 주관심분야는 H^∞
 제어, 모델 및 제어기 차수축소 등

임

方敬皓(正會員) 第33卷 B編 第5號 參照
 현재 대우중공업 우주 항공연구소
 근무

朴烘培(正會員) 第33卷 B編 第5號 參照
 현재 경북대학교 전자전기공학부
 교수