

## 복합적층원통셸의 좌굴거동

원종진\*, 이종선\*\*, 홍석주\*\*\*

### Buckling Behavior of Laminated Composite Cylindrical Shells

Chong-Jin Won\*, Jong-Sun Lee\*\*, Suk-Ju Hong\*\*\*

#### Abstract

The objective of this study is to investigate effects of prebuckling on the buckling of laminated composite cylindrical shells. Both axial compression and lateral pressure are considered for laminated composite cylindrical shells with length to radius ratios. The shell walls are made of a laminate with several symmetric ply orientations. The study was made using finite difference energy method, utilizing the nonlinear bifurcation branch with nonlinear prebuckling displacements. The results are compared to the buckling loads determined when membrane prebuckling displacements are considered.

Keywords : Buckling Behavior(좌굴거동), Laminated Composite Cylindrical Shell(복합적층원통셸), Membrane Prebuckling(막전좌굴), Buckling Mode(좌굴모드)

### 1. 서론

최근에는 항공기나 자동차 등의 구조물에 높은 비강성과 비강도 및 낮은 열팽창률 등의 우수한 기계적 성질

을 갖는 섬유강화 복합재료의 사용이 급격히 확산되고 있으며 금속재료에 비해서 상당한 중량감소를 얻을 수 있는 Graphite, Glass, Boron 등과 같은 복합재료는 기존의 재료를 대체해 나가는 추세이다. 복합적층구조물

\* 국민대학교 기계·자동차공학부  
\*\* 대전대학교 기계설계공학과  
\*\*\* 조선대학교 기계공학과

은 각 단층(Lamina)의 방향성과 적층구조에 의한 이방성으로 복잡한 기계적 거동을 보인다. 특히 복합적층원통셸의 좌굴현상은 갑작스런 붕괴를 일으키므로 그에 대한 좌굴거동은 중요 관심사이다. 일반적으로 복합적층원통셸은 후좌굴강도를 가질 수 있으나 과도한 좌굴은 최대변형률제한이나 반복하중에 따른 피로한도와 관련된 파손에 이를 수 있다. 등방성 원통셸의 경우 반경대 두께비, 길이대 반경비, 초기결함, 전좌굴변형 그리고 좌굴지지조건에 따른 좌굴강도 등의 변화에 대한 많은 연구가 수행되었다.

복합적층원통셸의 경우 Jones 등<sup>1)</sup>은 단순지지된 비대칭 복합직교적층원통셸의 전좌굴이 좌굴강도에 미치는 영향에 대하여 연구하였으며 Harper 등<sup>2)</sup>은 축하중 또는 횡하중이 작용하는 고정지지된 복합적층원통셸의 전좌굴의 영향에 대하여 연구하였다. 또한 Becker 등<sup>3)</sup>은 복합적층 원통형패널의 경우 유한차분에너지법<sup>4)</sup>에 의한 선형좌굴해석과 실험을 통하여 패널길이대 폭비와 지지조건 등의 영향에 대하여 연구하였다.

본 논문에서는 축압축 또는 횡압력이 작용하는 복합적층원통셸의 경우 지지조건, 길이대 반경비 및 적층각의 변화에 따른 전좌굴의 영향을 고찰하기 위하여 고전좌굴하중과 실제 좌굴하중을 구하여 이를 비교, 검토한다.

## 2. 이론

Fig. 1과 같은 복합적층원통셸의 좌굴하중을 산정하기 위하여 Fig. 2와 같은 막전좌굴상태로부터 고전좌굴하중을 구하고 유한차분에너지법을 사용하여 실제전좌굴상태로부터 실제좌굴하중을 구한다.

### 2.1 고전좌굴하중

고전좌굴하중은 복합적층원통셸이 막변형률상태에 있다는 가정하에서 막변형률  $\epsilon_x^0$ ,  $\epsilon_y^0$ ,  $\gamma_{xy}^0$ 는 인장강성  $A_{ij}$ <sup>5)</sup>와 합응력  $N_x^0$ ,  $N_y^0$ ,  $N_{xy}^0$ 로 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N_x^0 \\ N_y^0 \\ N_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

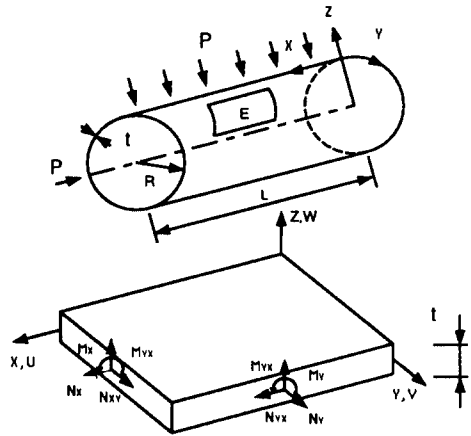


Fig. 1 Sign conventions and notation

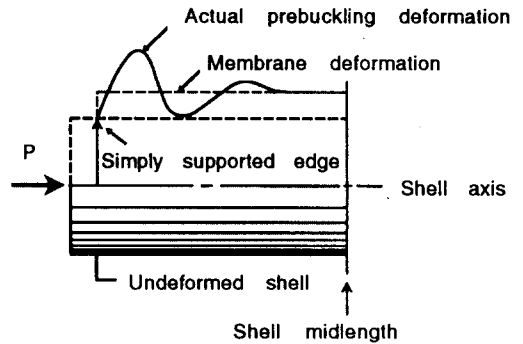


Fig.2 Actual and membrane prebuckling deformation near the end of a simply supported circular cylindrical shell

여기서  $A_{ij}$ 는 변환된 축소강성행렬  $\bar{Q}_{ij}$ 로 다음과 같다.

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (2)$$

전단 및 불균형적층을 고려하여 x, y, z축방향 변위성분 u, v, w를 다음과 같이 일반적인 형태로 가정한다<sup>6)</sup>.

$$\begin{aligned} u &= \bar{A}n^2m [\sin(ny - mx) + \sin(ny + mx)] \\ v &= \bar{B}n [\sin(ny - mx) - \sin(ny + mx)] \end{aligned} \quad (3)$$

$$w = \bar{C} [\cos(ny - mx) - \cos(ny + mx)]$$

여기서 m, n은 x, y축방향의 좌굴과장계수를 각각 나타내고,  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ 는 상수를 나타낸다.

좌굴과정에서 하중과 합응력에 의한 변형에너지 U와 일 W는 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^y \int_0^x \{\epsilon\} [C] \{\epsilon\} dx dy$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^y \int_0^x (N_x^0 w^2, x + N_y^0 w^2, y + 2N_{xy}^0 w, x w, y) dx dy \quad (4)$$

Donnell의 이론(7)을 적용하여 복합적층원통셸의 전 포텐셜에너지  $\Pi$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\Pi = (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

여기서  $a_{ij}$ 는 적층강성, 합응력 및 좌굴과장계수로 다음과 같다.

$$a_{11} = (A_{11} m^2 + A_{66} n^2) m^2 n^4$$

$$a_{12} = (A_{12} + A_{66}) m^2 n^4$$

$$a_{13} = -B_{11} m^4 n^2$$

$$a_{22} = (A_{22} n^2 + A_{66} m^2) n^2$$

$$a_{23} = B_{22} n^4$$

$$a'_{33} = [2D_{11} m^2 / n^2 + 2(D_{12} + 2D_{66}) + D_{22} n^2 / m^2] m^2 n^2$$

$$a_{33} = a'_{33} + 2(N_x^0 m^2 + N_y^0 n^2 + 2N_{xy}^0 mn) \quad (6)$$

식(5)에 최소포텐셜에너지원리를 적용하면 단순지진인 경우의 고전좌굴하중계수  $\lambda_{cl}$ 은 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$\lambda_{cl} = \frac{a'_{33} + \frac{2a_{12} a_{13} a_{23} - a_{22} a_{13}^2 - a_{11} a_{23}^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}}{-(N_x m^2 + N_y n^2 + 2N_{xy} mn)} \quad (7)$$

### 2.2 실제좌굴하중

분기좌굴문제는 전포텐셜에너지의 2차변분으로 다음

과 같다.

$$\delta^2 U = \int_s \int_\theta [ [\epsilon^1] [C] \{\epsilon^1\} + [\epsilon^2] [C] \{\epsilon^0\} + [\epsilon^0] [C] \{\epsilon^2\} + [\delta u, \delta v, \delta w] [P] \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{Bmatrix} ] r d\theta ds \quad (8)$$

여기서  $\epsilon^0, \epsilon^1, \epsilon^2$ 는 각각 변분  $\delta u, \delta v, \delta w$ 의 변형률벡터를 의미하고,  $[C]$ 는 합응력과 변형률계수행렬을 나타내며,  $[P]$ 는 압력과 회전효과,  $s$ 와  $\theta$ 는 길이 및 원주방향의 좌표 그리고  $r$ 은 셸의 회전반경을 나타낸다.

좌굴중의 변형률증분의 선형부  $\epsilon^1$ 은 전좌굴회전  $\chi_0$ 를 포함하며 전좌굴 변형률벡터  $\epsilon^0$ 은 전좌굴회전에서 선형과 2차항을 포함한다. 적분을 수행하고 2차변분을 종속변수  $\delta u_i, \delta v_i, \delta w_i$  그리고 lagrange multiplier에 관해서 최소화 시키면 다음과 같이 고유치문제가 된다.

$$K_1 x + \lambda K_2 x + \lambda^2 K_3 x = 0 \quad (9)$$

식(9)로부터 inverse power method를 사용하여 고유치를 구하면 실제좌굴하중계수를 산정할 수 있다.

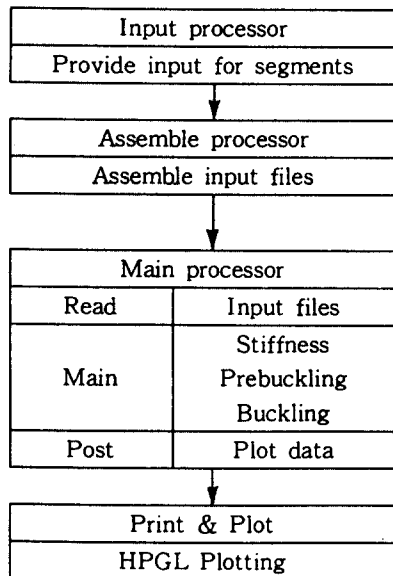


Fig. 3 Flow diagram for buckling analysis

수치해석을 위한 컴퓨터 프로그램은 FORTRAN 77으로 작성하였으며 그 흐름도는 Fig. 3과 같다.

### 3. 수치 예

#### 3.1 해석모델

본 논문에서는 복합적층원통셀에 축압축 또는 횡압력이 작용하는 경우 길이대 반경비 L/R와 적층각  $\theta$ 의 변화에 따른 좌굴하중을 구하고 전좌굴의 영향을 검토한다. 사용된 복합재는 Graphite/Epoxy(T300/5208)이며, 적층은  $[0, \pm \theta, 90]_s$ 과 같이 대칭적층으로 재료적 성질 및 기하학적 형상은 다음과 같다.

$$E_{11} = 181.81 \text{ GPa}, \quad E_{22} = 10.35 \text{ GPa}$$

$$G_{12} = 7.17 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = 0.28$$

$$R = 250 \text{ mm}, \quad t = 2.0 \text{ mm}$$

길이대 반경비  $L/R = 1, 3, 5$ 로 변화시키고 적층각  $\theta = 0^\circ$ 에서  $90^\circ$ 까지  $15^\circ$  간격으로 변화시키면서 각 경우에 대한 좌굴하중, 원주방향 좌굴반과장수 및 좌굴모드 등을 구한다.

#### 3.2 지지조건

사용된 해석모델의 지지조건은 다음과 같이 단순지지(S1~S4)인 경우와 고정지지(C1~C4)인 경우를 각각 고찰한다<sup>8)</sup>.

	u	v	w	$W_{,xx}$
S1	0	0	0	0
S2	FREE	0	0	0
S3	0	FREE	0	0
S4	FREE	FREE	0	0
	u	v	w	$W_{,x}$
C1	0	0	0	0
C2	FREE	0	0	0
C3	0	FREE	0	0
C4	FREE	FREE	0	0

### 4. 결과 및 검토

#### 4.1 실제전좌굴의 영향

축압축 또는 횡압력의 작용과 단순지지(S2)조건에 대한 고전좌굴하중과 실제좌굴하중을 산정하여 수치결과를 축압축이 작용하는 경우는 Fig. 4-6, 횡압력이 작용하는 경우는 Fig. 7-9에 각각 도시하였다.

상기 결과에서 축압축이 작용하는 경우  $L/R=1$ 일 때는 실제좌굴하중과 고전좌굴하중이 거의 같은 값을 나타내나  $L/R$ 이 증가하면 적층각  $\theta=75^\circ$  부근에서 전좌굴의 영향에 의하여 그 차가 증가함을 알 수 있다. 최대좌굴하중은 고전좌굴하중에서는 적층각  $\theta=45^\circ \sim 65^\circ$  부근에서 발생하고 실제좌굴하중에서는  $L/R$ 의 증가에 따라  $\theta=60^\circ \sim 75^\circ$  부근에서 발생하였다. 횡압력이 작용하는 경우는 실제전좌굴의 영향이 거의 없고 실제좌굴하중과 고전좌굴하중이 유사한 값을 나타내며, 최대좌굴하중은 적층각  $\theta=60^\circ \sim 90^\circ$  부근에서 발생하였다.

#### 4.2 지지조건에 따른 실제좌굴하중

축압축 및 횡압력의 작용과 단순지지 및 고정지지조건에 대한 실제좌굴하중을 산정하여 수치결과를 축압축이 작용하는 경우는 Fig. 10-15, 횡압력이 작용하는 경우는 Fig. 16-21에 각각 도시하였다. 축압축이 작용하는 경우 단순지지조건에서는 S1의 좌굴하중이 가장 크나  $L/R$ 의 증가에 따라 적층각  $\theta=75^\circ$  부근에서는 S2의 좌굴하중이 가장 큰값을 나타내고 고정지지조건에서는  $L/R$ 의 변화에 관계없이 C1과 C3 그리고 C2와 C4가 거의 같은 좌굴하중을 나타낸다. 최대좌굴하중은 단순지지조건에서는 적층각  $\theta=45^\circ \sim 60^\circ$  부근에서 발생하나 S2의 경우에는  $L/R$ 의 증가에 따라 적층각  $\theta=75^\circ$  부근에서 발생하며 고정지지조건에서 C1과 C3의 경우에는 적층각  $\theta=45^\circ \sim 60^\circ$  부근, C2와 C4의 경우에는  $L/R$ 의 증가에 따라 적층각  $\theta=65^\circ \sim 75^\circ$  부근에서 발생한다. 횡압력이 작용하는 경우 지지조건 S1과 S3, S2와 S4 그리고 C1과 C3, C2와 C4에서는  $L/R$  및  $\theta$ 의 변화에 관계없이 거의 같은 좌굴하중을 나타내며,  $L/R$ 의 감소에 따라 지지조건 S1 및 S3의 경우는 S2 및 S4의 경우보다, C1 및 C3의 경우는 C2 및 C4의 경우보다 큰 값을 나타내고 있다. 또한 최대좌굴하중을 갖는 적층각  $\theta$ 는  $60^\circ$ 에서  $90^\circ$  부근까지 증가하는 경향을 보이고 있다.

#### 4.3 좌굴모드

단순지지조건 S1과 고정지지조건 C1의 경우 적층각이 45° 일 때 길이대 반경비의 변화에 따라 비선형전좌굴이 고려된 좌굴모드를 구하여 Fig. 22-27에 각각 도시하였다.

## 5. 결론

복합적층원통셀에 축압축 또는 횡압력이 작용할 때 전좌굴의 영향을 고찰하기 위하여 고전좌굴하중과 실제좌굴하중을 구하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 축압축이 작용하는 경우 실제좌굴하중과 고전좌굴하중이 거의 같은 값을 나타내나 L/R이 증가하면  $\theta = 75^\circ$  부근에서 전좌굴의 영향에 의하여 그 차가 커지고 횡압력이 작용하는 경우 거의 같은 값을 나타내어 전좌굴의 영향은 거의 없다.
- 2) 최대좌굴하중을 갖는 적층각  $\theta$ 는 축압축이 작용하는 경우 고전좌굴하중에서는 45° ~ 60° 부근에서, 실제좌굴하중에서는 L/R의 변화에 따라 60° ~ 75° 부근을 나타내며 횡압력이 작용하는 경우 60° ~ 90° 부근을 나타낸다.
- 3) 축압축이 작용하는 경우 지지조건에 따른 실제좌굴하중은 단순지지에서는 S1이 가장크나 적층각  $\theta = 75^\circ$  에서는 S2의 좌굴하중이 가장 큰 값을 나타내고 고정지지에서는 C1과 C3 그리고 C2와 C4가 거의 같은 좌굴하중을 나타낸다.
- 4) 횡압력이 작용하는 경우는 지지조건 S1 및 S3의 경우가 S2 및 S4의 경우보다 그리고 C1 및 C3의 경우는 C2 및 C4의 경우보다 큰 좌굴하중을 나타내고, 최대좌굴하중을 갖는 적층각  $\theta$ 는 60° 에서 90° 부근까지 증가함을 보인다.

## 참고문헌

- 1) R.M.Jones and J.C.F.Hennemann, "Effect of Prebuckling Deformation on Buckling of Laminated Composite Circular Cylindrical Shells", AIAA J., Vol.18, No.1, pp.110-115, 1980.
- 2) J.G.Harper and A.N.Palazotto, "Buckling Analysis of Laminated Composite Circular Cylindrical Shells", SAE 790981, pp.91-104, 1979.
- 3) M.L.Becker, A.N.Palazotto and N.S.Knot, "Experimental Investigation of the Instability of Composite Cylindrical Panels", Experimental Mech., Vol.15, No.4, pp.393-403, 1982.
- 4) D.Bushnell, "Computerized Analysis of Shells-Governing Equations", Computers & Structures, Vol.18, No.3, pp.471-536, 1984.
- 5) R.M.Jones, "Mechanics of Composite Materials", McGraw-Hill, 1975.
- 6) D.Bushnell, "PANDA: Interactive Program for Minimum Weight Design of Composite and Elastic-Plastic Stiffened Cylindrical Panels and Shells", Pergamon Press, 1986.
- 7) L.H.Donnell, "A New Theory for the Buckling of a Thin Cylinder under Compression and Bending", Trans. ASME, Vol.56, No.11, pp.759-806, 1934.
- 8) B.O.Almroth, "Influence of Edge Conditions on the Stability of Axially Compressed Cylindrical Shells", AIAA J., Vol.4, No.1, pp.134-140, 1966.

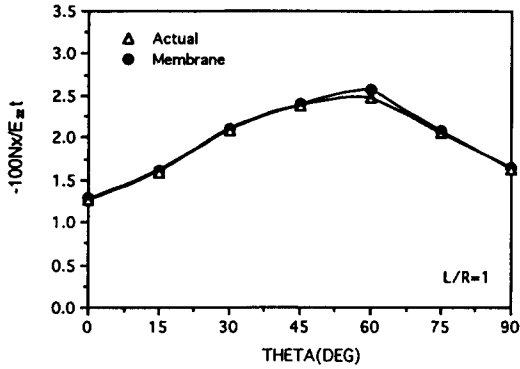


Fig. 4 Prebuckling effect - axial compression

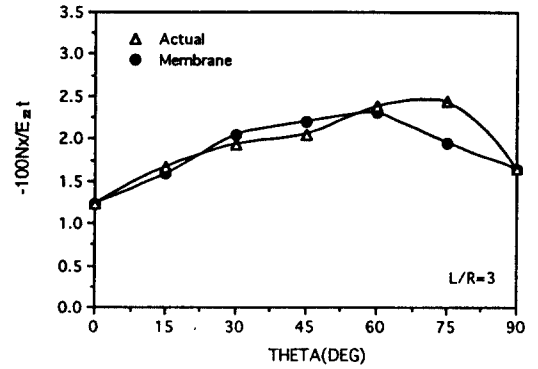


Fig. 5 Prebuckling effect - axial compression

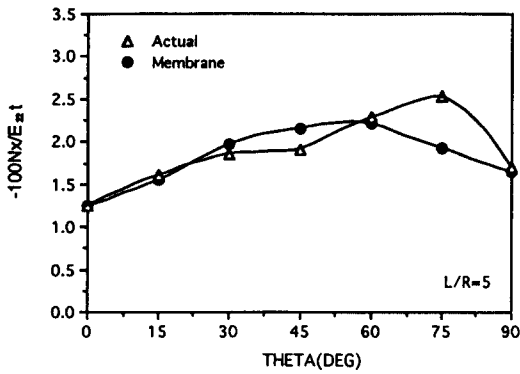


Fig. 6 Prebuckling effect - axial compression

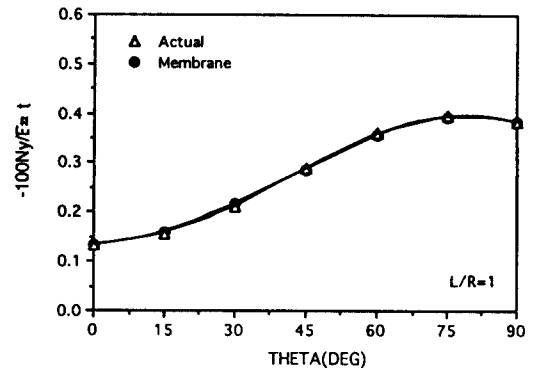


Fig. 7 Prebuckling effect - lateral pressure

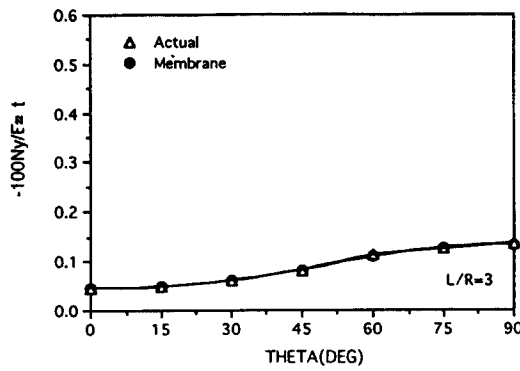


Fig. 8 Prebuckling effect - lateral pressure

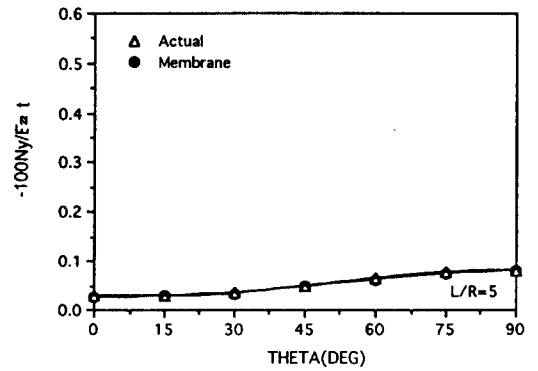


Fig. 9 Prebuckling effect - lateral pressure

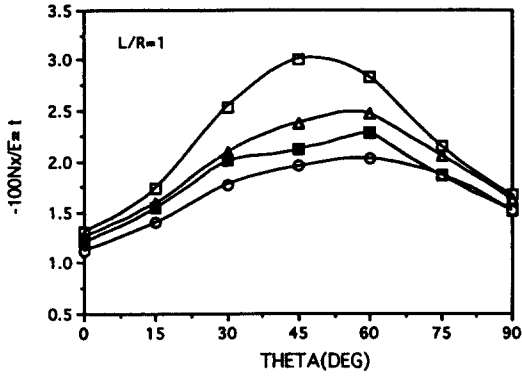


Fig. 10 Actual buckling load - axial compression

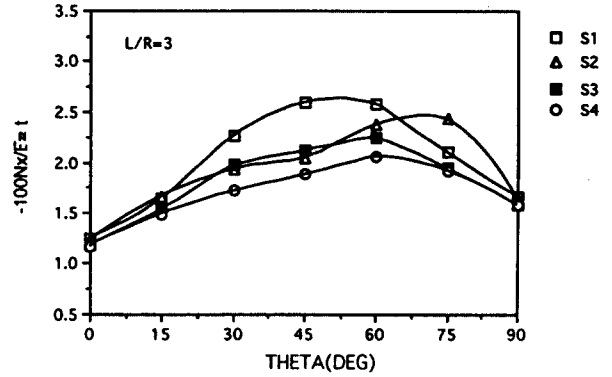


Fig. 11 Actual buckling load - axial compression

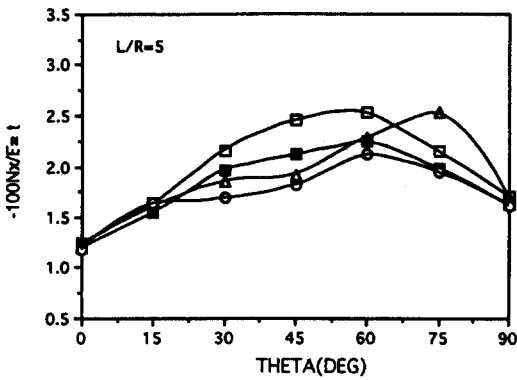


Fig. 12 Actual buckling load - axial compression

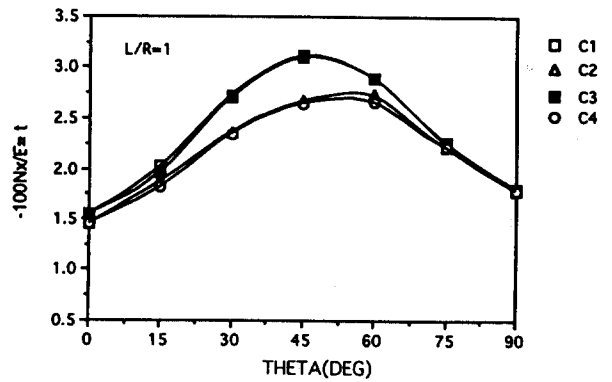


Fig. 13 Actual buckling load - axial compression

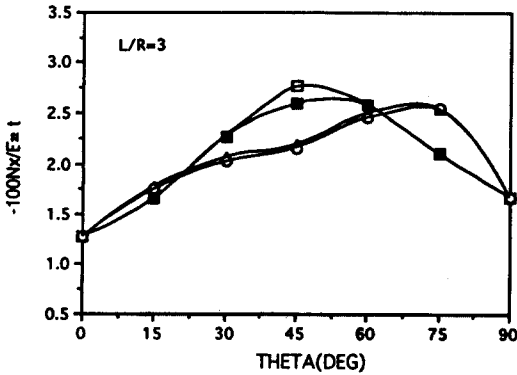


Fig. 14 Actual buckling load - axial compression

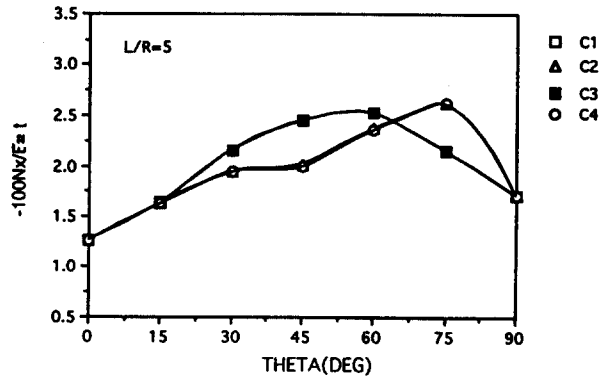


Fig. 15 Actual buckling load - axial compression

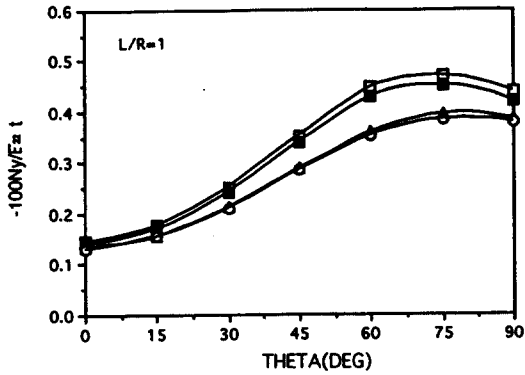


Fig. 16 Actual buckling load - lateral pressure

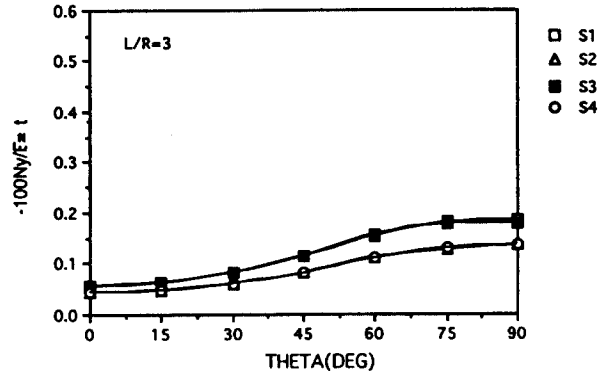


Fig. 17 Actual buckling load - lateral pressure

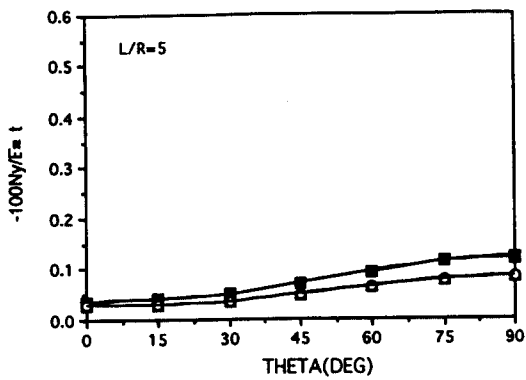


Fig. 18 Actual buckling load - lateral pressure

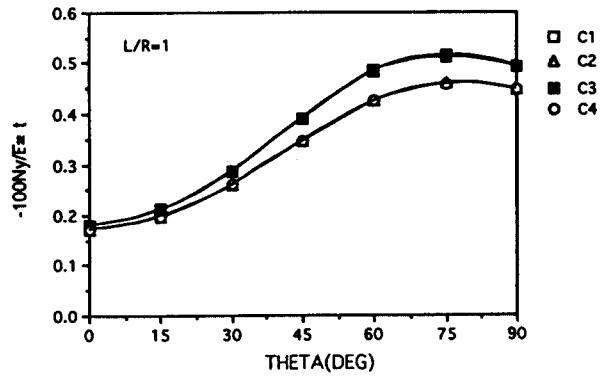


Fig. 19 Actual buckling load - lateral pressure

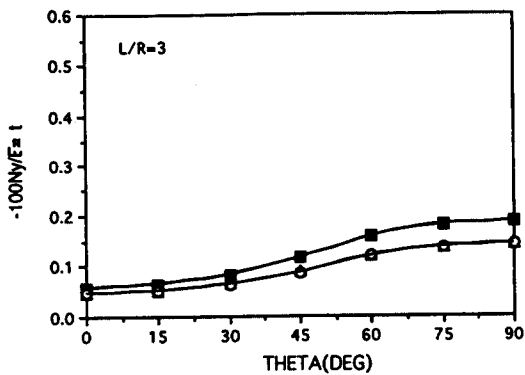


Fig. 20 Actual buckling load - lateral pressure

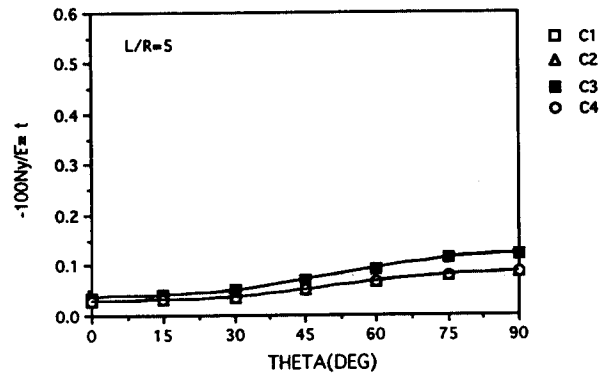


Fig. 21 Actual buckling load - lateral pressure



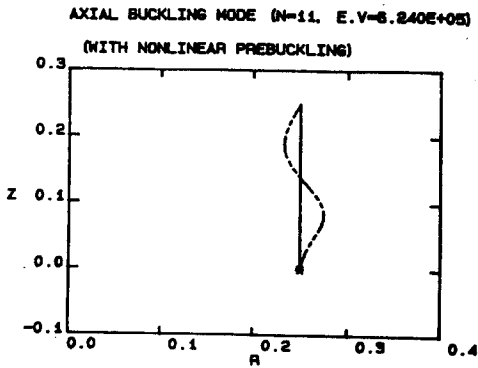


Fig. 22 Laminated composite cylindrical shell(S1,  $\theta = 45^\circ$ , L/R=1)

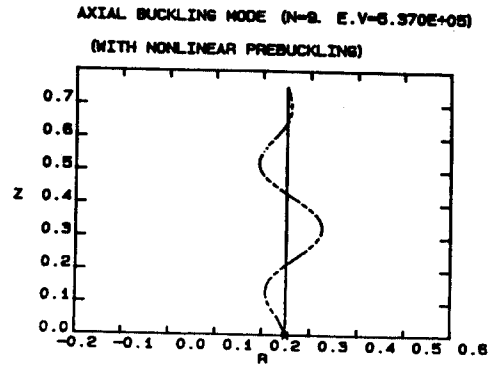


Fig. 23 Laminated composite cylindrical shell(S1,  $\theta = 45^\circ$ , L/R=3)

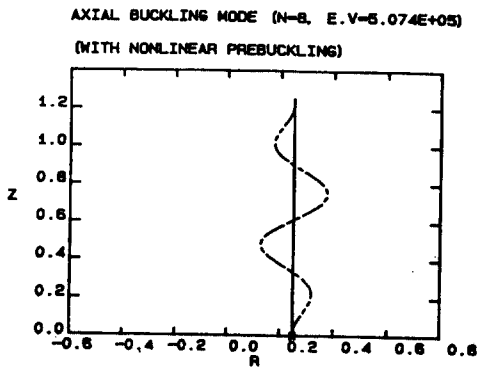


Fig. 24 Laminated composite cylindrical shell(S1,  $\theta = 45^\circ$ , L/R=5)

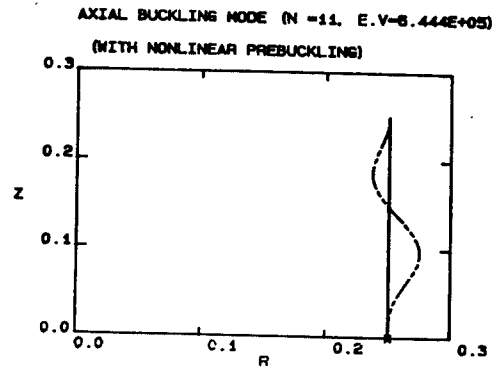


Fig. 25 Laminated composite cylindrical shell(C1,  $\theta = 45^\circ$ , L/R=1)

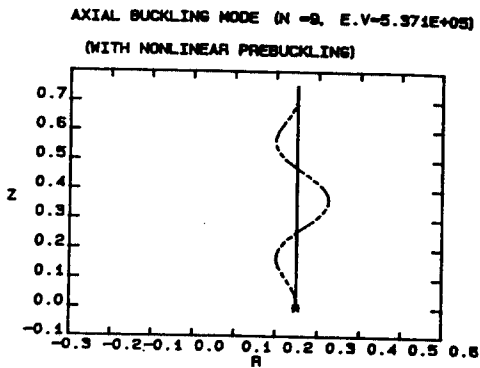


Fig. 26 Laminated composite cylindrical shell(C1,  $\theta = 45^\circ$ , L/R=3)

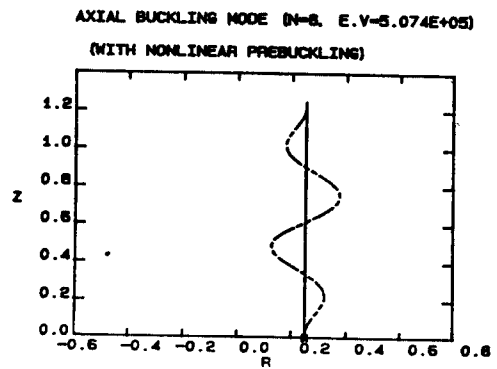


Fig. 27 Laminated composite cylindrical shell(C1,  $\theta = 45^\circ$ , L/R=5)