

BEM에서의 자동요소분할 알고리즘의 구현

An Implementation of Automatic Mesh Generation Algorithm in Boundary Element Method

오환섭*, 박철희**, 박재석***

Oh Hwan-Sup*, Park Chul-Hee**, Park Jae-Suk***

Abstract

The automation of mesh generation in BEM is very important in numerical analysis field for the time and efficiency. In order to solve this problem, program and algorithm to achieve the purpose of making input data and automation of mesh generation based on Expert System are developed in this study. This program has the function of rotating and zooming. The stress intensity factor which is a criteria of fracture mechanics is calculated and compared with other results to prove efficiency and availability of the program in result.

Keywords : Automatic Mesh Generation (자동요소분할), Boundary Element Method (경계요소법), Expert System (전문가 시스템), Stress Intensity Factor (응력확대계수)

1. 서 론

재료역학과 열·유체역학, 기계역학 또는 전자기학분야 등에서 각종 역학적문제를 다루는 전산 역학분야는 대규모 수치 데이터의 고속처리 및 해석대상 Model의 고정도화와 고속해법에 관한 연구⁽¹⁾를 중심으로 그동안 눈부신 발전을 하였고, 또 계속적인 발전이 요구되고 있다. 그러나 컴퓨터의 성능향상과 더불어 대규모의 문제를 취급하기 위하여 프로그램 자체는 더욱 복잡하고 난해하게 된다. 따

라서 프로그램을 능숙하게 사용하기 위해서는 문제에 적절한 해석 Model이나 해석법 및 전문지식⁽²⁾이 필요하고, 장기간의 훈련기간등이 문제로 지적되고 있다.

컴퓨터 과학분야라 할 수 있는 파괴역학적 설계분야에도 이와 같은 문제점을 극복하기 위하여 전문가의 경험지식과 전문적인 지식을 조합하여 체계화시키고 또한, 주어진 자료를 토대로 추론기관(Inference Engine)을 만들어

* 경희대학교 기계공학과

** 경희대학교 대학원

*** 경희대학교 기계공학과 학부생

추론하게 함으로써 전문가와 유사한 역할을 감당하게 하는 전문가 시스템(Expert System)이 도입되어져 왔다. 전문가시스템이 자동요소분할에 이용되면서 다량의 수치 해석과 더불어 수리적인 지식을 요하는 설계분야에 적용되고 있는데, 이와 관련된 연구로서는 유한요소법(FEM)의 요소자동생성에 관한 연구는 2차원 및 3차원의 요소자동생성^(4,5), 전문가 시스템을 이용한 것⁽⁶⁾, 최적요소생성⁽⁷⁾에 관한 것등이 있고 대부분 입력데이터의 작성 및 구조 해석 모델링 과정의 자동화로서 잘 알려져있다. 그러나, 최근 유한요소법에 비하여 계산정도 및 계산시간의 효율성의 측면에서 보다 우수한 경계요소법의 경우는 최근 급속한 보급단계에 있으며, BEM의 요소자동생성에 관한 연구는 2차원요소의 자동생성⁽⁸⁾, 3차원요소의 자동생성⁽⁹⁾ 등이 있으나 아직 미흡한 단계에 있다.

따라서 본 연구에서는 경계요소법을 이용하는 3차원 선형탄성균열문제의 해석을 위한 입력 데이터의 자동생성을 목적으로 전문가 시스템을 도입하여 요소자동생성 및, 입력 데이터를 자동작성하는 알고리즘 및 프로그램을 개발하고, 이를 이용한 응력확대계수 K계산의 효율성 및 유용성에 대하여 검토하고자 한다.

2. BEM 요소분할에대한 기초이론

2.1 경계요소법의 이산화 및 계산과정

이산화 방정식(discretizing formulation)은 요소내에 있는 미지의 함수를 보간(interpolation)에 의하여 근사 다항식의 차수로 표시하기 위한 이상적인 절점값 즉, 이산화요소로부터 미지함수를 가지면서 적분이 가능하게 되는 것을 말하는데, 이산화 해법이 만족되려면 다음과 같다.

- ① 해석대상 영역의 경계를 요소분할 하고 각 절점에서 미지수를 설정한다.
- ② 각 요소마다 수치적분을 하고 이것을 전체요소에 대하여 연결되는 이산화 방정식을 얻는다.
- ③ ②의 이산화 방정식을 미지수의 수만큼 작성하고 다시 경계조건을 고려하여 연립 방정식을 만들고 연립 방정식을 풀어 미지의 절점값을 구한다.
- ④ ③으로부터 내점의 응력, 변형률, 변위 등을 구한다.⁽¹⁰⁾

2.2 BEM 일반 요소분할 이론⁽¹⁰⁾

- ① 적합요소(compatible element) : 요소(ele-

ment) 사이에 함수가 연속성을 만족할 경우를 적합 요소라 한다.

- ② 내삽함수(interpolation function) : 수치 적분공식을 적용하기 위하여 x를 기준한 실좌표 (Fig. 1)에서 ξ 를 기준한 정규좌표계(Fig. 2)로 전환시키는 것으로써 정의될 수 있으며

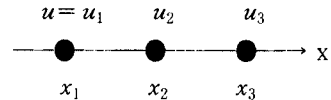


Fig. 1 One dimensional secondary element in real coordinate

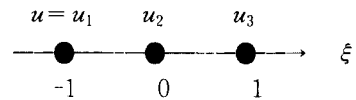


Fig. 2 One dimensional secondary element in normalized coordinate

1차원 2차요소를 예로하여 변위 $u(\xi)$ 로 표시하면

$$u(\xi) = -\frac{1}{2} \xi(1-\xi)u_1 + (1-\xi)(1+\xi)u_2 + \frac{1}{2} \xi(1+\xi)u_3 \quad (1)$$

식 (1)을 일반화하면 각절점 u_1, u_2, u_3 에서의 계수를

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= -\frac{1}{2} \xi(1-\xi) \\ \phi_2(\xi) &= (1-\xi)(1+\xi) \\ \phi_3(\xi) &= \frac{1}{2} (1+\xi) \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)을 식 (1)에 대입하여

$$u(\xi) = \phi_1(\xi)u_1 + \phi_2(\xi)u_2 + \phi_3(\xi)u_3 = \sum_{i=1}^n \phi_i(\xi)u_i \quad (3)$$

로 표시하며 식 (3)의 ϕ_i 는 내삽함수이다.

- ③ 특이요소

크랙과 같은 특이성이 있는 문제를 해결하기 위해 크

랙선단 근처의 표면(Traction : t_i) 및 변위(displacement : u_i) 분포를 크랙선단거리 r 의 함수로 표시 하면

$$t_i = \sum_{i=1}^n a_i r^{\frac{n}{2}} \quad (n = -1, 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

$$u_i = \sum_{i=1}^n a_i r^{\frac{n}{2}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

식 (4)에서 $r \rightarrow 0$ 일 때 즉, 크랙선단에서 응력은 $\frac{1}{\sqrt{r}}$ 의 특이요소라 한다.

3. BEM-3D 입력 데이터 자동생성을 위한 알고리즘 및 구현전략

3.1 요소 자동생성 알고리즘

① 등비수열 함수를 도입한 요소분할

크랙면과 리가멘트면을 표시하는 좌표(x,y라고 가정)에서 요소분할을 정량적으로 수행하기 위하여 sub 프로그램을 작성하는데 있어서 주어진 좌표값 내에서 이상적인 공비 ϕ 를 결정하면 좀더 정확한 미지의 값을 구하는 효과적인 자동요소분할이 가능할 것이다. 좌표축의 원점으로부터 크랙선단까지의 거리를 n_1 이라 하고

$$\text{공비 } \phi = \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_3}{n_2} = \frac{n_4}{n_3} = \dots = \frac{n_q}{n_{q-1}}$$

를 만족하는 것으로 하면

$$\begin{aligned} n_2 &= n_1 \phi, \\ n_3 &= n_2 \phi = n_1 \phi^2, \\ n_4 &= n_3 \phi = n_1 \phi^3, \\ &\dots \\ n_q &= n_{q-1} \phi = n_1 \phi^{q-1} \\ \therefore \phi &= \sqrt[q-1]{\frac{n_q}{n_1}} \end{aligned} \quad (5)$$

여기에서 $n_1, n_2, n_4 \dots n_q$ 모두가 크랙선단으로부터 떨어진 거리이다.

② 오차평가법을 이용한 경계적분의 효율화⁽¹⁰⁾

경계요소법에서의 수치해석은 연립 방정식을 푸는 시간에 비하여 경계적분에 요구되는 시간이 지배적이기 때문에, 불필요한 고차 수치적분을 각각의 적

분구간마다 일정오차 한도내에서 최적의 적분차수를 산출하여 수치적분의 3차원의 경우 오차평가법에 의한 적분차수 결정식은 식 (6)과 같다.

$$(2N_i + 1)(2N_i + 2) \left(\frac{L_i}{4r}\right)^{2N_i} \leq \epsilon r^3 \quad (6)$$

여기에서 ϵ 은 적분오차 N_i 은 적분차수 이고 r 은 착력점 P 와 요소사이의 거리인데 결국 식 (6)의 부등식을 만족하는 최소의 N_i 을 적분차수로 한다.

③ 절점좌표의 자동작성

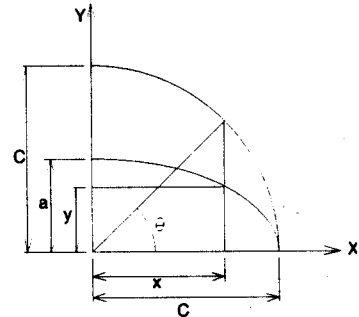


Fig. 4 Coordinate calculation of node

$$x = c \cos \theta - \left[\frac{L \times a^2 \cdot c \cos \theta}{\sqrt{c^4 (a \sin \theta)^2 + a^4 (c \cos \theta)^2}} \right] \quad (7)$$

$$y = a \cos \theta - \left[\frac{L \times c^2 \cdot a \cos \theta}{\sqrt{c^4 (a \sin \theta)^2 + a^4 (c \cos \theta)^2}} \right]$$

L = 크랙선단 으로부터 해석절점까지의 거리

식 (7)에 의해 크랙선단 주변의 node 좌표값을 찾는다.

3.2 입력 데이터

① $c/a, \phi, q, \theta$, 크랙선단의 x방향거리, 해석대상의 길이, 폭, 높이를 입력한다.

② 식 (5)에 의해 공비 ϕ 를 찾는다.

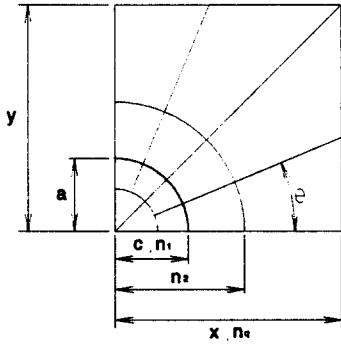


Fig. 3 Variables in mesh generation program

- ③ $(n_2 - n_1)/4 < 1$ 인 경우 입력오류, q 값을 정정하도록 한후 공비 ϕ 값의 재지정. (특이요소)(3) Data Output

3.3 Data Output

- ① 각 node의 좌표값을 파일로 출력
- ② Mesh된 해석대상의 3D 화상 출력

3.4 자동 입력 데이터 및 요소자동생성 전략

- ① 입력 데이터 자동생성전략은 다음과 같다.
 - ㉗ 요소와 요소사이에 함수의 연속성이 보증될 것.
 - ㉘ 요소와 요소사이에 틈이나 겹침기가 발생하지 않을 것.
- ② 기능의 편리성의 확보를 위한 전략은 다음과 같다.
 - ㉗ 병진운동, 회전운동 등의 포텐셜을 포함하는 강체운동의 표현이 가능할 것.
 - ㉘ 축소, 확대 등의 Zooming기능의 표현이 가능할 것.
- ③ 일반요소 및 특이요소의 자동생성에 대해서는 자동요소 생성 프로그램에서도 특이성을 고려하여 크랙선단의 안쪽 및 바깥쪽 요소분할시 Quarter point element [Fig. 5]를 적용하여 분할 할 수 있어야 하며 선택에 따라 임의적인 요소분할도 자유자재로 가능토록 한다.

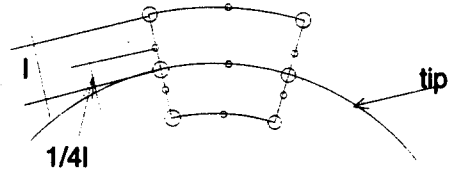


Fig. 5 Quarter point element

- ④ 기본해는 Kelvin해 및 Mindlin해를 임의로 선정하여 계산할 수 있다.
- ⑤ 불연속적인 경계면의 처리는 이중 절점법과 적분파라메타법을 이용한다.
- ⑥ 특이적분문제를 해결하기 위해 sub요소 분할법을 채택하였으며, sub요소분할은 프로그램내에서 자동적으로 행해지도록 한다.
- ⑦ 입력데이터 파일은 해석대상 및 사용수법에 대한 각종 파라메터들과 절점의 좌표, 요소당 구성절점번호,

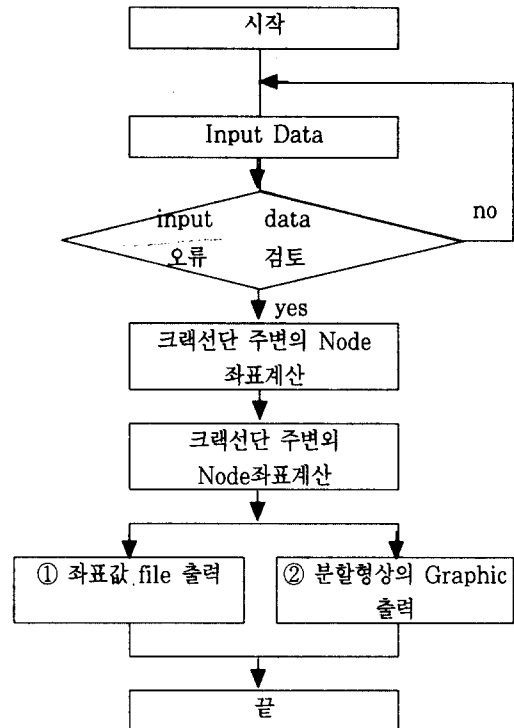


Fig. 6 Flow chart of automatic mesh generation

경계조건, 적분파라미터로 구성되어 있으며 절점에서의 변위와 트랙션을 결과 파일에 담아 출력한다.

- ⑧ 응력확대계수는 외삽법중 변위의삽법을 사용해 계산을 수행한다.

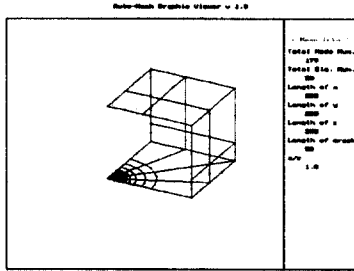


Fig. 7 Viewing of automesh generation

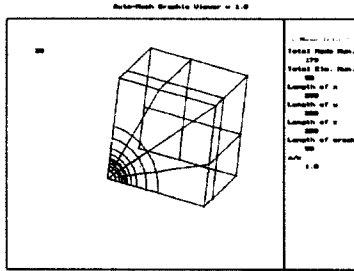
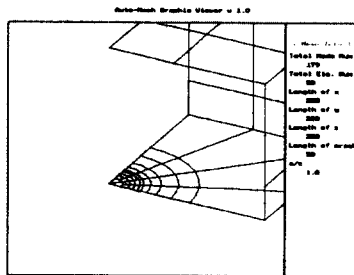
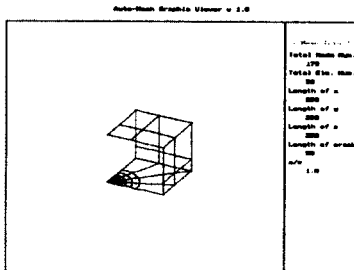


Fig. 8 Rotate



(a) Zoom in



(b) Zoom out
Fig. 9 Zooming

4. 결과 및 고찰

4.1 자동 요소 생성 및 화면도시

본절에서는 입력 데이터의 자동작성 및 자동요소분할 예의 결과에 대하여 기술한다. Fig. 7은 역학적 모델의 입력 데이터 작성을 위한 자동요소분할 예를 표시한 것이다. 또 Fig. 8는 Fig. 7을 사용자가 원하는 임의각 θ 로 회전한 예이다. Fig. 9는 Fig. 7의 zooming 기능을 표현한 것으로 (a)는 Fig. 7을 축소, (b)는 확대 표시한 것이다.

4.2 입력 데이터의 자동작성 예

Table 1은 Fig. 4의 예에 대하여 입력데이터를 자동작성하고 출력한 결과이다. 이는 Graphic에서 확인된 결과이므로 이 데이터는 BEM-3D의 본 프로그램과 연결되어 곧바로 수치연산이 가능하다.

Table 1. Illustration of input data modeling

1	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
2	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00	1.0000000000E+01
3	7.07106780735E+00	0.0000000000E+00	7.07106780735E+00
4	1.0000000000E+01	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
5	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00	2.0000000000E+01
6	3.90180632445E+00	0.0000000000E+00	1.96157061998E-01
7	7.65366920294E-00	0.0000000000E+00	1.84775914907E-01
8	1.11114048333E+01	0.0000000000E+00	1.6629396255E+01
9	1.41421356147E+01	0.0000000000E+00	1.41421356147E+01
10	1.6629396255E+01	0.0000000000E+00	1.11114048333E+01
11	1.84775914907E+01	0.0000000000E+00	7.65366920294E+00
12	1.96157061998E+01	0.0000000000E+00	3.90180632445E+00
13	2.0000000000E+01	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00
14	0.0000000000E+00	0.0000000000E+00	2.5000000000E-01
15	9.56709610904E+00	0.0000000000E+00	2.30969891349E+01
165	2.5000000000E-02	2.0000000000E-02	1.03553390593E+02
166	2.5000000000E-02	2.0000000000E-02	5.17766952966E+01
167	2.5000000000E-02	2.0000000000E-02	0.0000000000E+00
168	0.0000000000E+00	2.0000000000E-02	1.76776695297E+02
169	1.03553390593E-02	2.0000000000E-02	1.76776695297E+02
170	1.76776695297E-02	2.0000000000E-02	1.03553390593E+02
171	1.76776695297E-02	2.0000000000E-02	0.0000000000E+00
172	0.0000000000E+00	2.0000000000E-02	1.03553390593E+02
173	5.17766952966E-01	2.0000000000E-02	1.03553390593E+02
174	1.03553390593E-02	2.0000000000E-02	1.03553390593E+02
175	1.03553390593E-02	2.0000000000E-02	5.17766952966E+01
176	1.03553390593E-02	2.0000000000E-02	0.0000000000E+00
177	0.0000000000E+00	2.0000000000E-02	5.17766952966E+01
178	5.17766952966E-01	2.0000000000E-02	0.0000000000E+00
179	0.0000000000E+00	2.0000000000E-02	0.0000000000E+00

4.3 자동 요소 생성을 이용한 BEM 에 의한 K해석

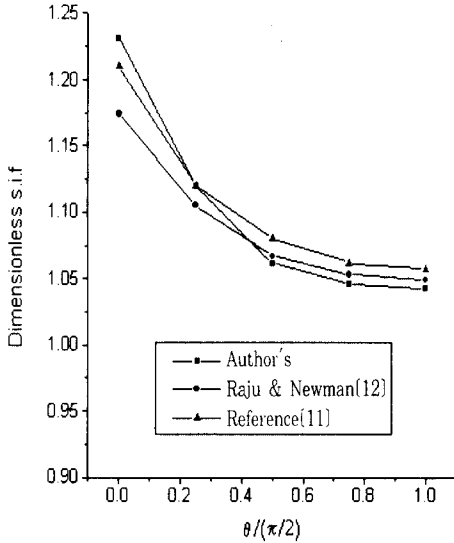


Fig. 10 Dimensionless stress intensity

$$\text{factor} (F = \frac{K_I}{\sigma_0 \sqrt{\pi a/Q}})$$

under uniform tension ($a/c=1.0$)

본 절에서는 전절에서의 결과를 바탕으로 3차원 표면크랙의 응력확대계수의 해석⁽¹¹⁾에 적용한 결과를 표시한 것이다.

Fig. 10은 반원형 표면크랙의 응력확대계수를 본연구에서 개발한 자동요소분할 프로그램을 이용하여 계산한 결과와 타결과를 비교한 것으로 계산정도가 매우 향상됨을 알 수 있고 처음 BEM을 사용하는 초심자에게는 매우 유용하다고 생각된다.

5. 결 론

BEM을 이용한 3차원 선형탄성문제를 해석하기 위하여 전문가 시스템을 바탕으로 입력 데이터의 자동작성 및 요소자동분할을 위하여 PC용 알고리즘 및 프로그램을 개발하였고, 그 유용성을 위한 3차원 화상 표현과 3차원 반원형 균열선단의 응력확대계수를 구하고, 타 연구결과와 비교하였다. 그 결과 중요한 내용을 요약하면 다음과 같다.

① 요소분할후에 Auto Mesh Graphic Viewer의

sub프로그램에 의해 분할 형상이 Graphic 에 의하여 확인할 수 있으며 x,y,z 방향으로 자유로운 회전 (Rotating)이 가능하여 mesh결과를 쉽게 확인할 수 있는 물론 Zooming도 가능하다.

- ② 자동 요소분할 프로그램을 이용하여 요소분할을 하였을 경우와 수작업에 의존할 경우 값의 정확성과 시간의 효율성의 면에서 비교하여 보면 수작업에 비해 Computer의 빠른 처리시간에 의하여 시간의 효율성을 확보할 수 있고 데이터 작성의 오류를 방지할 수 있다. 자동요소분할에 의하여 분할 되어진 요소는 경계 적분방정식을 수치해석법으로 미지수해결이 가능하도록 미지함수를 해결하는 문제로 귀착 되어질 수가 있으므로 BEM 탄성해석의 각종 문제에 적용될 수 있다.
- ③ 응력확대계수의 계산결과에서 알 수 있듯이 소수의 절점으로 정도 높은 수치 계산이 가능함으로써 본 program의 유용성이 입증되었다.

참고문헌

1. 日本機械學會 計算機械用機械設計のための有限要素法に關する研究分科會, 研究成果報告書 II, pp. 107-114, 1990
2. Schroeder W. J, Combined Octree Delaunary Method for Fully Automatic 3-D Mesh Generation, Internal Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.29, No. 1, pp. 37-55, 1990
3. 石川 晴雄, 疲勞強度設計用 エキスパートシステムについて, 機械の研究, 第45卷 第11號, pp. 13-18, 1993
4. Shimizu, Automatic FE Mesh Generation Method for Surface Models, JSME, Serise A, Vol. 59, No. 565, pp. 188-195, 1993
5. Cass Roger J, Generalized 3-D Paving an Automated Quadrilateral Surface Mesh Generation Algorithm, International Journal for Numerical Engineering, Vol.39, No.9, pp. 1475-1489, 1996
6. Reichert K, Automatic Mesh Generation Based on Expert System Methods, IEEE Trans. Magn., Vol. 27, No. 5, pp. 4197-4200, 1991
7. Golias N A, Three-Dimensional Automatic

- Adaptive Mesh Generation, IEEE Trans. Magn., Vol. 28, No. 2, pp. 1700-1703, 1992
8. Yong Liu, Two Effective Schemes of Automatic Mesh Generation of 2D-Nonlinear BEM", Eng. Anal. Boundary Element Method, Vol. 11, No. 3, pp. 225-231, 1993
9. 이항범 외 4인, 경계요소법을 위한 3차원 자동요소분할, 전기학 논집, Vol. 43, No. 6, pp. 896-905, 1994
10. 結城良治, 木須博行, 境界要素法による弾性解析, 東京:培風館, 1987
11. 오환섭, 최훈, 박철희, 영향함수법을 이용한 응력확대계수의 해석, 재료과학기술연구소 연구논문, Vol. 8, pp. 95-103 1995
12. Y. Murakami, "Stress Intensity Factor Handbook", Vol. 2, pp. 725-727, 1987