

퍼지 모수를 가지는 다목적 비선형 계획 문제의 대화형 퍼지 접근

이상완* · 남현우** · 윤연근***

An Interactive Fuzzy Approach for Multiobjective Nonlinear
Programming Problems with Fuzzy Parameters

Sang-Wan Lee* · Hyun-Woo Nam** · Yeon-Geun Yun***

Abstract

In general, two types of fuzziness of human judgements should be incorporated in multiobjective programming problems. One is the expert's ambiguous understanding of the nature of the parameters in the problem formulation process and the other is the fuzzy goals of the decision maker for each of the objective functions.

In this paper, we present a new interactive fuzzy approach for obtaining the satisficing solution which efficiently reflect both types of fuzziness. An illustrative numerical example nonlinear programming problems with fuzzy parameters is demonstrated along with the corresponding computer outputs.

1. 서 론

다목적 의사결정 문제(multiobjective decision making problem)는 산업 생산계획, 시설배치, 수송 및 공공운영, 재정 및 예산계획, 학원 계획,

연구 개발설계 등의 대부분 현실 상황에서 발생되고 있으므로 이를 해결하기 위한 여러 가지 유용한 기법들이 개발되고 있다.[1] 다목적 문제는 목적들이 서로 상충(conflict)되기 때문에 최적해(optimal solution)는 존재하지 않으므로 비지배(nondominate)해로 알려진 파레토(Pareto)

* 동아대학교 산업공학과

** 경동전문대학 산업안전관리과

*** 동아대학교 산업공학과 박사과정 수료

최적해 중에서 의사결정자가 가장 만족하는 만족해(satisficing solution)를 찾는 것이 중요한 문제다. 일반적으로 만족해 또는 절충해(compromise solution)를 결정하기 위한 접근들은 효용접근(utility approach), 목표계획 접근(goal programming approach), 대화형 접근(interactive approach), 퍼지 접근(fuzzy approach) 등이 있는데 이들 접근법들의 각각은 다른 접근법들과 비교해 볼 때 서로 장단점을 가지고 있으므로 각 접근법이 가지고 있는 장점들을 적절히 조합하여 의사결정자의 만족해를 구하는 접근법이 더욱 효과적일 수 있다. 대화형 접근은 의사결정자의 전체 선호구조(overall preference structure)를 잘 반영시키는 적절한 통합 선호함수(aggregation preference function)를 현실적으로 확인하기 어렵기 때문에 의사결정자의 선호함수를 전체적으로 동일하게 정하지 않고, 대화(interactive)에 따라 얻어지는 국부(local) 선호정보에 근거해서 합리적인 만족해를 도출하는 접근법이다. 그러나 대화형 접근은 보다 정확한 의사결정자의 선호정보를 얻기 위하여 많은 반복을 하거나 의사결정자에게 매우 복잡한 정보를 요구함으로써 현실성이 떨어지고 의사결정자의 일관된 반응을 기대하기 어렵다는 단점이 있다. 그러므로 대화형 접근은 보다 간단한 대화를 통하여 의사결정자의 선호정보를 파악할 수 있는 구조를 가져야만 된다. 또한 대화과정에서 의사결정자는 본질적으로 모호성(imprecision)을 가질 수 있으므로 이를 정량화 할 수 있는 퍼지 집합론을 대화형 접근에 접목시킨 대화형 퍼지접근이 최근에 많이 연구되고 있다. Sakawa 등은 다목적 문제를 해결하기 위하여 대화형 접근과 퍼지 집합론을 접목시켜 의사결정자의 만족해를 구하는 여러 가지 방법을 제시하였다. [17, 18, 19, 21, 22, 23]

그러나 현실의 의사결정 상황을 잘 표현하는 다목적 비선형 계획문제를 정식화하기 위해서는 현실 세계의 여러가지 요소들 (various factors)이 목적함수와 제약에 포함되어야 한다. 이러한 목적함수와 제약들은 전문가(expert)들에 의하여 주어지는 가능값(possible value)을 가지는 많은 모수(parameter)들을 포함한다. 전통적인 접근방법에서 그러한 모수는 모수의 본성을 이해하고 있는 전문가의 주관적인 방법이나 실험에 의하여 어떤 값으로 고정되어 있다. 이 경우에 모수에 대한 전문가의 이해를 퍼지수(fuzzy number)로 알려진 실수상의 퍼지 부분집합(fuzzy subset)에 의하여 표현되어지는 퍼지 수치자료로 해석하는 것이 더욱 적당할 것이다. 결과적으로, 퍼지 모수들을 포함하는 다목적 비선형 계획문제가 전통적인 것보다 더욱 현실적인 것으로 고찰되어 질 수 있다. 이러한 이유에서 Sakawa 등은 퍼지 모수를 가지는 여러 가지 다목적 문제를 해결하기 위한 확장된 연구 결과들을 발표했다. [20, 24, 27]. 그러나 이들 연구들은 의사결정자가 구성함수들을 선택하는 것외에 만족해 산출을 위한 반복과정에서 반복때마다 퍼지수의 α -수준집합을 나타내는 α 값들과 희망목적값들(preference objective values)을 명시해야 하므로 대화과정이 너무 복잡하고 의사결정자에게 요구되는 정보인 상반율(trade-off rate) 또한 의사결정자가 쉽게 이해하기에는 어렵다는 한계를 가지고 있다. Tanaka 와 Asai [26]는 퍼지 모수를 가지는 선형 목표 계획 문제를 정식화했다. 퍼지 모수에 대하여 삼각 구성함수(triangular membership function)를 가지고 Bellman과 Zadeh [2]에 의하여 제시된 퍼지 의사결정에 따라 비퍼지(nonfuzzy)해와 퍼지해를 결정하는 두가지 방법론을 제시하였다. 이 연구는 퍼지 모수를 삼각 구성함수에 한정하여 표현

했다는 제한과 퍼지수 연산에 결정적인 오류를 가지고 있다. 최근에 Mitsuo 등[13]은 모형화된 문제에 대한 퍼지화와 목적함수값에 대한 의사 결정자의 만족정도에 관한 퍼지화를 고려하기 위하여 목적함수와 제약조건들의 계수들이 퍼지 수로 표현되고 퍼지목표를 성취하기 위한 의사 결정자의 만족정도를 구성함수로 표현함에 있어 역시 삼각구성함수를 사용하였기에 의사결정자의 다양한 선호구조를 해 산출과정에 반영하기 어렵다는 문제점을 내포하고 있다. 이러한 제한을 가지는 기존의 연구들을 살펴보면 Chen과 Chou[4], Hannan[7], Luhandjula[10], Narasimhan [14], Rao등 [16], Zimmermann[28] 등이 있다. 이에 본 연구에서는 이러한 단점을 보완하기 위하여 문제의 정식화 과정에서 발생되는 모수에 대한 전문가의 모호성과 각 목적함수에 대한 의사결정자의 퍼지목표를 간단한 대화를 통하여 다양한 형태의 구성함수로 충분히 반영하여 최상의 만족해를 효과적으로 결정하는 방법을 제시한다. 본 연구에서 제시된 방법은 반복적인 방법(iteractive method)의 틀 하에서 하위최적해(suboptimal solution)를 추구하는 방법으로서 실제적인 적용의 가능성을 높여가는 방법이다. 만족해의 결정과정은 Luhandjula [11]와 Bellman과 Zadeh의 개념에 기초를 두고 SUMT(Sequential Unconstrained Minimization Technique)[8]를 퍼지 형태로 수정한 프로그램을 이용하여 수행한다.

2. 만족해의 결정방법

목적함수와 제약의 표현에서 모수의 가능값은 항상 전문가의 모호성(ambiguity)을 포함하고

있다고 고려하는 것이 현실적이다. 이러한 퍼지 모수를 가지는 다목적 문제를 해결하는 접근법들이 문헌에서 많이 제시되고 있다. Tanaka 와 Asai[26]는 Zimmermann[28]의 정식을 새로운 개념으로 추가하는 수준에서 목표와 제약들의 구분없이 쓰여진 선형 목표계획문제를 고려했다. 이 방법은 퍼지수 연산에 있어 $\tilde{A} - \tilde{A} = 0$, $\tilde{A} / \tilde{A} = 1$ 임을 고려한다면 이 방법에서 두고 있는 제약인 퍼지수 \tilde{A} 가 0 이상이 되어야 한다는 것은 의미를 상실하게 되므로 퍼지수 연산에 결정적인 오류를 가지게 된다. Slowinski [25]는 수공급(water supply) 시스템 개발을 위하여 다기준 퍼지 선형계획법을 제시하였다. 그는 이 연구에서 Zadeh의 확장원리(principle of extension)에 기초를 두고 모든 퍼지 계수들을 L - R 퍼지수로 처리하여 해를 결정하였다. 사실 현실의 제반적인 다목적 의사결정문제는 선형보다는 비선형으로 표현될 경우가 더 많고 전문가의 모호성을 반영하는 퍼지모수와 더불어 의사결정자의 퍼지목표가 동시에 고려되는 문제를 해결하는 것이 더욱 현실적일 것이다. 또한 의사결정자의 전체 선호구조를 하나의 함수형태로 결정하기가 매우 곤란하므로 국부 선호정보를 취하는 방법에서 의사결정자의 만족해를 유도하는 것이 좋은 방법인 것으로 고려된다. 이러한 이유에서 본 연구에서는 퍼지모수와 목표를 가지는 대화형 퍼지 다목적 비선형 계획(interactive fuzzy multiobjective nonlinear programming)문제를 고려한다[24].

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x, \tilde{a}) \triangleq (f_1(x, \tilde{a}_1), \\ & f_2(x, \tilde{a}_2), \dots, f_k(x, \tilde{a}_k)) \end{aligned} \quad (1)$$

subject to

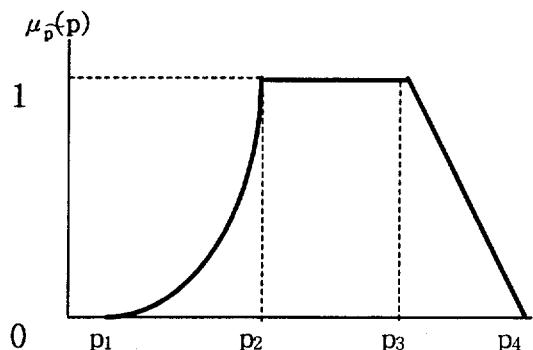
$$x \in X(\tilde{b}, \tilde{c}) \triangleq \{x \in E^n \mid g_j(x, \tilde{b}_j) \leq \tilde{c}_j, j = 1, \dots, m\},$$

여기서 x 는 의사결정변수들의 n -차원 벡터이고, $g_j(x, \tilde{b})$ 는 m 개의 선형 또는 비선형 부등제약들을 나타낸다. $\tilde{a}_{ir} = (\tilde{a}_{il}, \dots, \tilde{a}_{ip_i})$, $\tilde{b}_{js} = (\tilde{b}_{j1}, \dots, \tilde{b}_{jq_j})$. \tilde{c}_j 는 목적함수 $f_i(x, \tilde{a}_i)$ 와 제약 $g_j(x, \tilde{b}_j) \leq \tilde{c}_j$ 에 포함되는 퍼지모수의 벡터이고 $X(\tilde{b}, \tilde{c})$ 는 실행가능 집합을 나타낸다.

퍼지수 \tilde{a}_{ir} ($i = 1, \dots, k$; $r = 1, \dots, p_i$), \tilde{b}_{js} ($j = 1, \dots, m$; $s = 1, \dots, q_j$), \tilde{c}_j 는 구성함수(membership function) $\mu_{a_{ir}}(a_{ir})$, $\mu_{b_{js}}(b_{js})$, $\mu_{c_j}(c_j)$ 를 가지는 퍼지수들이다. 이러한 퍼지모수들은 Dubois와 Prade[5]에 의하여 소개된 퍼지수(fuzzy number)로 특성지워진다. \tilde{p} 는 구성함수 $\mu_{\tilde{p}}(p)$ 를 가지는 실수상의 볼록(convex) 연속 퍼지 부분 집합이다. 구성함수 $\mu_{\tilde{p}}(p)$ 는 다음과 같이 정의된다.

- (1) E^1 에서 폐구간 $[0,1]$ 까지 연속적인 대응(mapping)
- (2) $p \in (-\infty, p_1]$ 에 대하여 $\mu_{\tilde{p}}(p) = 0$
- (3) $[p_1, p_2]$ 상에서 협의의 증가(strictly increasing)
- (4) $[p_2, p_3]$ 상에서 $\mu_{\tilde{p}}(p) = 1$
- (5) $[p_3, p_4]$ 상에서 협의의 감소(strictly decreasing)
- (6) $p \in [p_4, +\infty)$ 에 대하여 $\mu_{\tilde{p}}(p) = 0$

이를 그림으로 나타내면 <그림 1>과 같다.



<그림 1> 퍼지수 \tilde{p} 의 구성함수

<그림 1>에서 보는 바와 같이 퍼지 계수와 목표들에 대하여 의사결정자 또는 전문가로부터 구성함수를 이끌기 위하여 계수의 왼쪽과 오른쪽에 다른 형태의 구성함수를 사용하는 것은 종래의 대부분 연구에서 선형에 한정된 구성함수를 사용하는 것 보다는 더욱 정확한 선호구조를 유도할 수 있다는 것은 명백한 사실이다. notation의 단순화를 위하여 다음의 벡터를 정의한다.

$$\begin{aligned} a_i &= (a_{il}, \dots, a_{ip_i}), \\ b_j &= (b_{j1}, \dots, b_{jq_j}), \\ c_j &= (c_1, \dots, c_m), \\ a &= (a_1, \dots, a_k), \\ b &= (b_1, \dots, b_m), \\ \tilde{c}_j &= (\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m), \\ \tilde{a} &= (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_k), \\ \tilde{b} &= (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m). \end{aligned}$$

모든 퍼지계수들은 확정적인 값 대신에 가능성분포(possibilistic distribution)를 가진다. $(x)_a^\beta$

를 식(1)의 한 해로 두자. 여기서 α 는 퍼지 계수들이 실행가능한 가능성의 최소 수준을 나타낸다.

$$\text{poss } (\tilde{b}_j x \leq \tilde{c}_j) \geq \alpha_j, \quad \alpha_j \in [0, 1] \quad (2)$$

$$\text{poss } (\tilde{b}_j x \leq \tilde{c}_j) = \sup \min \{\mu_{\tilde{b}_{jl}}(b_{jl}), \dots,$$

$$\mu_{\tilde{b}_{js}}(b_{js}) ; \mu_{\tilde{c}_j}(c_j) \mid \sum_{s=1}^{q_j} \tilde{b}_{js} x_s \leq c_j\} \quad (3)$$

β 는 그 해가 α -수준의 실행가능계수들에 기초를 두고 모든 퍼지 목표들을 만족시키는 절충의 정도를 나타낸다. Bellman과 Zadeh의 퍼지모수 결합규칙(rule of conjunction)에 따라 α 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \alpha &= \min \{ \mu_{\tilde{a}_{ir}}(a_{ir}), \mu_{\tilde{b}_{js}}(b_{js}), \mu_{\tilde{c}_j}(c_j) \mid \\ &\quad i=1, \dots, k, r=1, \dots, p_i, \\ &\quad j=1, \dots, m, s=1, \dots, q_j \} \end{aligned} \quad (4)$$

이것은 퍼지계수들의 집합속에 인계되는 (inherit) 그 시스템의 실행 가능성의 시스템내의 가장 불가능한 요소의 가능성과 동등하다는 것을 의미한다. 계수의 가능성수준이 높으면 높을수록 계수에 대한 제한이 보다 강해진다.

α 의 주어진 값에 대하여 최적해는

$\alpha = \mu_{\tilde{a}_{ir}}(a_{ir}) = \mu_{\tilde{b}_{js}}(b_{js}) = \mu_{\tilde{c}_j}(c_j)$ 일 경우에 도달한다.

$(\tilde{a}_{ir})_\alpha, (\tilde{b}_{js})_\alpha, (\tilde{c}_j)_\alpha$ 를 각 퍼지수의 α -수준집합(level set) 또는 α -절단(cut)으로 두자.

정의 1. α -수준집합

퍼지수 \tilde{a}_{ir} ($i=1, \dots, k; r=1, \dots, p_i$), \tilde{b}_{js} ($j=1, \dots, m; s=1, \dots, q_j$), \tilde{c}_j 의 α -수준집합은 그것들의 구성함수 정도

(degree of membership function)가 수준 α 를 초과하는 보통집합(ordinary set) L_α ($\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$)로 정의된다.

$$\begin{aligned} L_\alpha(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) &= \{(a, b, c) \in S(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) \subset R \mid \\ &\quad \mu_{\tilde{a}_{ir}}(a_{ir}) \geq \alpha; \mu_{\tilde{b}_{js}}(b_{js}) \geq \alpha; \mu_{\tilde{c}_j}(c_j) \geq \alpha\} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $S(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$ 는 퍼지수 $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ 의 지지(support)이다. α -수준 집합들은 다음의 특성을 갖는다.

$$\begin{aligned} L_{\alpha_1}(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) &\supset L_{\alpha_2}(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) \text{ 이면} \\ \alpha_1 &\leq \alpha_2 \end{aligned} \quad (6)$$

$(\tilde{a}_{ir})_\alpha^L$ 을 퍼지수 \tilde{a}_{ir} 의 α -절단의 하한, $(\tilde{a}_{ir})_\alpha^U$ 를 퍼지수 \tilde{a}_{ir} 의 α -절단 상한으로 두자. 이때

$$(\tilde{a}_{ir})_\alpha^L \leq (\tilde{a}_{ir})_\alpha \leq (\tilde{a}_{ir})_\alpha^U \quad (7)$$

주어진 α 값에 대하여 최소화 되어지는 목적함수들 $f(x, \tilde{a})$ 는 $f(x, \tilde{a})_\alpha^L \leq f(x, \tilde{a})_\alpha \leq f(x, \tilde{a})_\alpha^U$ 가 유지되므로 α -절단의 하한에 의하여 대체될 수 있다.

$$\min f(x, \tilde{a})_\alpha \leftrightarrow \min f(x, \tilde{a})_\alpha^L \quad (8)$$

$$g_j(x, \tilde{b}) = \sum_{s=1}^{q_j} \tilde{b}_{js} x_s \text{ 이라 두면 식(1)의}$$

부등제약에 대하여 식 (9)가 성립한다.

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{q_j} \tilde{b}_{js} x_s \leq \tilde{c}_j &\leftrightarrow \sum_{s=1}^{q_j} (\tilde{b}_{js} x_s)_\alpha^L \leq \\ &(\tilde{c}_j)_\alpha^U, \quad j=1, \dots, m \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)는 연산자 “≤”를 갖는 제약들에 대하여 b_{js} 가 보다 적고 c_j 가 보다 크면 쿨수록 제약들이 보다 완화된다는 사실에 근거를 두고 있다. 연산자 “≥”를 갖는 제약의 경우 식 (9)의 좌, 우 상 하한을 교환하면 되지만 등식의 제약을 가지는 경우는 α 가 1 부터 0 까지 꾸준히 증가하지 않기 때문에 퍼지계수의 등식제약을 다루기 위해서는 식 (10), (11)을 동시에 이용해야 한다.

$$\sum_{s=1}^{q_j} (\tilde{b}_{js} x_s)^L_\alpha \leq (\tilde{c}_j)^U_\alpha \quad (10)$$

$$\sum_{s=1}^{q_j} (\tilde{b}_{js} x_s)^U_\alpha \geq (\tilde{c}_j)^L_\alpha \quad (11)$$

이상의 이유에 근거해서 식(1)은 주어진 α 에 대하여 다음의 문제로 변환될 수 있다.

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x, \tilde{a})^L_\alpha = (f_1(x, \tilde{a})^L_\alpha, f_2(x, \tilde{a})^L_\alpha, \\ & \dots, f_k(x, \tilde{a})^L_\alpha) \end{aligned} \quad (12)$$

subject to

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{q_j} (\tilde{b}_{js} x_s)^L_\alpha &\leq (\tilde{c}_j)^U_\alpha, \quad j = 1, \dots, m, \\ s &= 1, \dots, q_j \end{aligned}$$

어떤 주어진 값 α 에 대하여 식(12)는 다목적을 가지는 확정적인 비선형 문제가 된다.

$$\max \beta \quad (13)$$

subject to

$$\beta \leq \mu_{f_i}(x, \tilde{a})_\alpha$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{q_j} (\tilde{b}_{js} x_s)^L_\alpha &\leq (\tilde{c}_j)^U_\alpha, \quad j = 1, \dots, m, \\ s &= 1, \dots, q_j \end{aligned}$$

$$\beta \in [0, 1]$$

여기서 $\mu_{f_i}(x, \tilde{a})_\alpha$ 는 α -절단된 $f_i(x, \tilde{a})$ 의 구성함수값이다. 각 목적함수에 대한 의사결정자의 퍼지 목적함수에 대한 의사결정자의 퍼지 목표들은 의사결정자와의 대화를 통하여 상응하는 구성함수를 유도함으로써 정량화 될 수 있다. 여기서 의사결정자의 각 목적함수에 대한 다양한 선호구조를 파악하기 위해서는 다양한 형태의 구성함수가 이용되어야 한다. 본 연구에서는 Sakawa[22]가 연구에서 이용한 5가지 형태의 구성함수, 즉 선형(linear)구성함수, 지수(exponential)구성함수, 쌍곡선(hyperbolic)구성함수, 역쌍곡선(hyperbolic inverse)구성함수, 부분선형(piecewise linear)구성함수를 이용하여 의사결정자의 다양한 퍼지목표를 정량화 한다. 만약 $\mu_{f_i}(x, \tilde{a})_\alpha$ 가 지수구성함수 형태로 선택되면

$$\mu_{f_i}(x, \tilde{a})_\alpha = u_i [1 - \exp(-\omega_i (f_i(x, \tilde{a})_\alpha^{\max} - f_i(x, \tilde{a})_\alpha^{\min})) / f_i(x, \tilde{a})_\alpha^{\max} - f_i(x, \tilde{a})_\alpha^{\min}]$$

로 주어진다. 여기서 $u_i > 1$, $\omega_i > 0$ 또는 $u_i < 0$, $\omega_i < 0$ 이고 $f_i(x, \tilde{a})_\alpha^{\max}$ 는 주어진 α 하에서 구성정도가 d인 i번째 목적함수값의 하한을 나타낸다. 지수구성함수는 $f_i(x, \tilde{a})_\alpha^{\min}$ 과 $f_i(x, \tilde{a})_\alpha^{\max}$ 내에서 의사결정자가 $f_i(x, \tilde{a})_\alpha^{0.5}$ 값을 명시함으로써 결정되어 진다. $f_i(x, \tilde{a})_\alpha^{\min}$ 과 $f_i(x, \tilde{a})_\alpha^{\max}$ 는 각각 구성정도 1과 0을 가진다. $f_i(x, \tilde{a})_\alpha^{\min}$ 과 $f_i(x, \tilde{a})_\alpha^{\max}$ 는 의사결정자와의 대화를 통하여 얻어질 수도 있지만 그렇게 되면 대화과정에서 의사결정자에게 요구하는 정보량이 너무 많아져 의사결정자에게 부담을 초래할 수 있으므로 본 연구에서는 식 (14), (15)를 해결하여 얻

는다.

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x, \tilde{a})^L_\alpha = (f_1(x, \tilde{a})^L_\alpha, f_2(x, \tilde{a})^L_\alpha, \\ & \dots, f_k(x, \tilde{a})^L_\alpha) \end{aligned} \quad (14)$$

subject to

$$\sum_{s=1}^{q_j} (\tilde{b}_{js})^L_\alpha x_s \leq (\tilde{c}_j)^U_\alpha, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$s = 1, \dots, q_j$$

$$\max \quad f_i(x, \tilde{a})^U_\alpha \quad (15)$$

subject to

$$\sum_{s=1}^{q_j} (\tilde{b}_{js})^L_\alpha x_s \leq (\tilde{c}_j)^U_\alpha, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$s = 1, \dots, q_j$$

이제 λ 를 퍼지목표들과 퍼지계수들을 고려하는 상황에서 해 $(x)_\alpha^\beta$ 에 대한 전체 만족도 (degree of overall satisfaction)로 둔다. Bellman 과 Zadeh의 의사결정규칙에 따라

$$\lambda = \min(\alpha, \beta) \quad (16)$$

식 (13) 과 (16)으로부터 λ 의 최상해는 α 를 모수적으로 고찰함으로써 해결될 수 있다. α 값의 감소는 β 값의 증가를 가져오게 되므로 식 (16)의 해는 결국 $\alpha = \beta$ 일 경우에 도달될 것이다. 그러나 $\alpha = \beta$ 가 될 때 까지의 많은 반복은 계산상의 어려움을 제공하므로 본 연구에서는 이분법(bisection method)을 이용하여 $|\alpha - \beta| \leq 0.01$ 일 경우에 결과를 만족해로 취한다.

3. 수치예

목표들이 모호하고 정식에 포함되는 계수들이 모호한 경우 이를 효과적으로 해결하기 위한 접근법을 설명하기 위하여 Sakawa[24]가 사용한 수치예를 고려한다.

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(x, \tilde{a}) = \tilde{a}_{11} x_1^2 + (x_2 + 5)^2 \\ & + 2(x_3 - \tilde{a}_{12})^2 \\ \min \quad & f_2(x, \tilde{a}) = (x_1 + \tilde{a}_{21})^2 + \\ & \tilde{a}_{22}(x_2 - 55)^2 + 3(x_3 + 20)^2 \\ \min \quad & f_3(x, \tilde{a}) = \tilde{a}_{31}(x_1 - 55)^2 + \\ & \tilde{a}_{32}(x_2 + \tilde{a}_{33})^2 + (x_3 + 20)^2 \end{aligned}$$

subject to

$$\begin{aligned} x \in X(\tilde{b}, \tilde{c}) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid g_1(x, \tilde{b}) = \\ \tilde{b}_{11} x_1^2 + \tilde{b}_{12} x_2^2 + \tilde{b}_{13} x_3^2 \leq \tilde{c}_1, \\ 0 \leq x_s \leq 10, s = 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

모든 퍼지수들에 대한 정보는 [표 1]에서 요약된다.

[표 1]에서 L과 E는 퍼지수를 나타내는 구성 함수의 형태가 선형구성함수와 지수구성함수임을 나타낸다. 예를 들어 $\alpha = 0.8$ 로 두자. $f_1(x, \tilde{a})_{0.8}^{\min}$ 과 $f_1(x, \tilde{a})_{0.8}^{\max}$ 는 식(17), (18) 을 해결함으로써 얻어질 수 있다.

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(x, \tilde{a})_{0.8}^L = 3.96x_1^2 + (x_2 + 5)^2 + \\ & 2(x_3 - 58.6256)^2 \end{aligned} \quad (17)$$

subject to

$$0.9813x_1^2 + 0.9219x_2^2 + 0.9267x_3^2 \leq 101$$

[표 1] 수치예에 대한 퍼지수들

계수	p ₁	p ₂	p ₃	p ₄	좌	우
\tilde{a}_{11}	3.8	4.0	4.0	4.3	L	E
\tilde{a}_{12}	57.0	59.0	60.0	63.5	E	L
\tilde{a}_{21}	18.0	19.5	20.0	22.5	E	E
\tilde{a}_{22}	1.75	2.0	2.0	2.25	E	L
\tilde{a}_{31}	2.3	2.5	2.5	2.75	L	E
\tilde{a}_{32}	1.25	1.4	1.5	1.7	L	L
\tilde{a}_{33}	17.5	20.0	20.0	22.0	L	E
\tilde{b}_{11}	0.9	1.0	1.0	1.1	E	E
\tilde{b}_{12}	0.8	0.95	1.0	1.2	E	E
\tilde{b}_{13}	0.85	1.0	1.0	1.15	E	L
\tilde{c}_1	90	100	100	105	L	L

$$0 \leq x_i \leq 10, i = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} \max f_1(x, \tilde{a})_{0.8}^U &= 4.0562x_1^2 + (x_2 + 5)^2 \\ &+ 2(x_3 - 60.70)^2 \quad (18) \end{aligned}$$

subject to

$$0.9813x_1^2 + 0.9219x_2^2 + 0.9267x_3^2 \leq 101$$

$$0 \leq x_i \leq 10, i = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} \text{이 때 } f_1(x, \tilde{a})_{0.8}^{\min} &= 4753.8977, \quad f_1(x, \tilde{a})_{0.8}^{\max} \\ &= 7808.3612 \end{aligned}$$

다른 목적함수에 대하여 문제를 해결하면

$$f_2(x, \tilde{a})_{0.8}^{\min} = 5524.6076,$$

$$f_2(x, \tilde{a})_{0.8}^{\max} = 9407.1600.$$

$$f_3(x, \tilde{a})_{0.8}^{\min} = 5902.4426,$$

$$f_3(x, \tilde{a})_{0.8}^{\max} = 9931.0686.$$

주어진 α 값에 기초를 두고 각 목적함수에 대한 의사결정자의 퍼지목표들은 의사결정자와의 대화를 통하여 상응하는 구성함수를 유도함으로써 정량화될 수 있다. 의사결정자에 의하여 선택된 목적함수에 대한 구성함수의 형태와 평가치가 [표 2]에 나타나는 것과 같다고 가정한다.

이때 식 (13)은 식 (19)로 변환된다.

$$\max \beta \quad (19)$$

subject to

$$\beta \leq (7808.3612 - f_1(x, \tilde{a})_{0.8}^L) / 3054.4635$$

$$\beta \leq -0.3082(1 - \exp(-1.4457((9407.1600 -$$

$$f_2(x, \tilde{a})_{0.8}^L)/3882.5524)))$$

$$\beta \leq 0.5 \tanh((f_3(x, \tilde{a})_{0.8}^L - 8588)^*$$

$$(-0.0008066)) + 0.5$$

[표 2] 선택된 구성함수의 형태 및 평가치($\alpha = 0.8$)

목적함수	구성함수 형태	평가치
$f_1(x, \tilde{a})$	선형	$(f_1(x, \tilde{a})^{\min}, f_1(x, \tilde{a})^{\max})$ $= (4753.8977, 7808.3612)$
$f_2(x, \tilde{a})$	지수	$(f_2(x, \tilde{a})^{\min}, f_2(x, \tilde{a})^{L(0.5)}, f_2(x, \tilde{a})^{\max})$ $= (5524, 6818, 9407.1600)$
$f_3(x, \tilde{a})$	쌍곡선	$(f_3(x, \tilde{a})^{\min}, f_3(x, \tilde{a})^{L(0.5)}, f_3(x, \tilde{a})^{L(0.25)}, f_3(x, \tilde{a})^{\max})$ $= (5902.4426, 8588, 9260, 9931.0686)$

$$0.9813x_1^2 + 0.9219x_2^2 + 0.9267x_3^2 \leq 101$$

$$0 \leq x_i \leq 10, i = 1, 2, 3$$

$$\beta \in [0, 1]$$

식 (19)를 해결하면 $\beta = 0.59$, $x_1 = 3.0055$,

$x_2 = 8.7241$, $x_3 = 4.869$, $f_1(x, \tilde{a})_{0.8} = 6003.6539$, $f_2(x, \tilde{a})_{0.8} = 6532.0141$, $f_3(x, \tilde{a})_{0.8} = 8360.3698$. 유사한 방식에서 주어진 α 에 대하여 해를 얻을 수 있다. [표 3]은 수행결과를 요약하고 있다.

[표 3]에서 보는 바와 같이 퍼지계수들의 실행가능성 α 가 증가하면 현실성이 떨어지므로 α -수준의 실행가능 계수들에 기초를 두고 모든 퍼지목표들을 만족시키는 정도 β 는 감소하게 된다. 본 연구에서는 α 와 β 의 차에 대한 허용오차를 0.01로 두었으므로 $\alpha = 0.62$, $\beta = 0.6299$ 일 때 만족해에 도달하게 된다. 그때의 의사결정변수 값은 $x_1 = 2.8352$, $x_2 = 8.9395$, $x_3 = 4.9573$ 이고 목적함수값은 $f_1(x, \tilde{a})_{0.62} = 5905.6017$, $f_2(x, \tilde{a})_{0.62} = 6386.2908$, $f_3(x, \tilde{a})_{0.62} = 8271.1004$ 가 된다.

4. 결론

다목적 문제에 포함되는 인간 판단의 모호성은 문제의 정식화과정에서 발생되는 모수에 대한 전문가의 모호성과 각 목적함수에 대한 의사결정자의 퍼지목표로 구분될 수 있다. 이러한 두 가지 형태의 모호성을 모두 포함하는 다목적 비선형계획 문제의 해결은 확정적인 값을 가지는 경우보다 더욱 현실적인 것으로 고려된다. 본 연구에서는 간단한 대화과정을 통하여 전문가와 의사결정자가 가지는 모호성을 다양한 형태의 구성함수로 정량화하고 이를 통하여 만족해를 도출하는 방법론을 제시하였다. 본 연구에서 제시된 방법론은 대화과정을 간단히 하여 전문가와 의사결정자에게 주어지는 부담을 줄였고 다양한 선호구조를 파악할 수 있는 구조를 가졌으며 프로그램의 유연한 수정을 통하여 다목적을 가지는 선형, 비선형, 분수계획 등에 폭넓은 적용을 할 수 있다는 장점이 있다. 추후 여러 가지 절충연산자를 이용하여 절충된 만족해를 구할 수 있는 방법론의 제시가 연구과제로 남아있다.

[표 3] 수치예의 결과들

α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.62	0.7	0.8	0.9	1.0
β	0.7326	0.7088	0.6957	0.6826	0.6668	0.6499	0.6335	0.6299	0.6146	0.5908	0.5748	0.5324
$f_1(x, \tilde{a})_{\alpha}^{\min}$	4443. 0000	4479. 9059	4517. 3643	4555. 3396	4593. 8967	4633. 0000	4672. 6945	4680. 7003	4712. 9855	4853. 8977	4795. 4371	4827. 0000
$f_1(x, \tilde{a})_{\alpha}^{\max}$	8581. 5500	8485. 2375	8389. 3532	8293. 8754	8198. 7631	8103. 9734	8009. 4267	7990. 5195	7914. 9852	7808. 3612	7725. 8904	7633. 9286
$f_2(x, \tilde{a})_{\alpha}^{\min}$	5067. 7500	5122. 6761	5178. 1018	5234. 2382	5291. 0829	5348. 4375	5406. 5076	5418. 2187	5465. 2991	5524. 6076	5584. 6406	5630. 2503
$f_2(x, \tilde{a})_{\alpha}^{\max}$	10246. 8530	10059. 0170	9974. 6206	9891. 9529	9809. 8381	9728. 1020	9646. 5167	9630. 2402	9565. 1396	9407. 1600	9402. 2701	9350. 6712
$f_3(x, \tilde{a})_{\alpha}^{\min}$	5440. 3124	5496. 5539	5553. 2201	5610. 3157	5667. 8477	5725. 8205	5784. 2402	5795. 9781	5843. 1123	5902. 4426	5962. 2366	6022. 5000
$f_3(x, \tilde{a})_{\alpha}^{\max}$	10705. 8920	10218. 1910	10171. 4040	10130. 9130	10093. 1350	10057. 2270	10023. 0490	10016. 3820	9990. 2903	9931. 0686	9927. 4088	9439. 1189
x_1	1.5914	2.3868	2.4802	2.5808	2.6601	2.7382	2.8337	2.8352	2.9249	3.0055	3.0344	3.9431
x_2	9.8536	9.5754	9.4511	9.3167	9.2050	9.0933	8.9586	8.9395	8.8341	8.7241	8.5876	8.1247
x_3	5.4283	5.1755	5.1291	5.0994	5.0432	4.9892	4.9650	4.9573	4.9267	4.8690	4.8933	4.6627
$f_1(x, \tilde{a})_{\alpha}$	5549. 5311	5646. 4507	5695. 6648	5741. 9921	5794. 9223	5848. 1526	5895. 5857	5905. 6017	5947. 0374	6003. 6539	6041. 4792	6139. 5301
$f_2(x, \tilde{a})_{\alpha}$	5890. 4707	5984. 5412	6058. 8587	6139. 0908	6212. 0929	6286. 5518	6371. 6447	6386. 2908	6454. 1809	6532. 0141	6626. 0934	6728. 9058
$f_3(x, \tilde{a})_{\alpha}$	8142. 5712	8000. 4692	8050. 4972	8098. 8217	8152. 6073	8206. 7606	8256. 3184	8271. 1004	8306. 8913	8360. 3698	8428. 9089	8232. 6723

참 고 문 헌

- [1] Ambrose Goicoechea, Don R. Hans and Lucien Duckstein, *Multiobjective Decision Analysis with Engineering and Business Applications*, John Wiley and Sons, New York, pp. 40-91, 1982.
- [2] Bellman, R. E. and L. A., Zadeh, "Decision-Making in a Fuzzy Environment", *Management Science*, Vol.16, (1985), pp. 357-369.
- [3] Chankong, V. and Y. Haimes Vacov, *Multiobjective Decision Making*, Elsevier Science Publishing Co , 1983.
- [4] Chen, H. K. and Chou, H. W., "Solving Multiobjective Linear Programming Problems - A Genetic Approach", Vol. 82, (1996), pp. 35-38
- [5] Dubios, D. and Prade, H., *Fuzzy Sets*

- and System Theory and Application*, Academic Press, 1980.
- [6] Fung, L. W. and K. S. Fu, "An Axiomatic Approach to Rational Decision Making in the Fuzzy Environment", *Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision process*, (1975), pp. 227- 256.
- [7] Hannan, E. L., "On Fuzzy Goal Programming", *Decision Science*, Vol. 12, (1981), pp. 522-531.
- [8] James, L. and H. M. Joe, *Optimization Techniques with Fortran*, McGraw-Hill, New York, pp. 412-463, 1973.
- [9] Kaufmann, A. and L. A. Zadeh, *Theory of Fuzzy Subsets*, Academic Press, New York, 1975.
- [10] Luhandjula, M. K., "Compensatory Operators in Fuzzy Linear Programming with Multiple Objectives", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 8, (1983), pp. 45-55.
- [11] Luhandjula, M. K., "Multiple Objective Programming Problems with Possibilistic Coefficients", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 21, (1987), pp. 135-145.
- [12] Masud, S. and C. L. Hwang, "Interactive Sequential Goal Programming", *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 32, (1981) pp. 391-400.
- [13] Mitsuo, G. and S. Masato, "An Extension of Interactive Method for Solving Multiple Objective Linear Programming with Fuzzy Parameters", *Computer and Industrial Engineering*, Vol. 25, (1993), pp. 9-12.
- [14] Narasimhan, R., "Goal Programming in a Fuzzy Environment", *Decision Science*, Vol 32, (1981), pp. 391-400.
- [15] Oppenheimer, K. R., "A Proxy Approach to Multi-Attribute Decision Making", *Management Science*, Vol. 24, (1978), pp. 675-689.
- [16] Rao, T. R., R. N. Tiwari and B. K. Mohanty, "A Method for Finding Numerical Compensation for Fuzzy Multicriteria Decision Problem", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 25, pp. 33-41, 1988.
- [17] Sakawa, M. "An Interactive Computer Program for Multiobjective Decision Making by the Sequential Proxy Optimization Technique", *International Journal of Man-Machine Studies*, Vol. 14, (1981), pp. 193-213.
- [18] Sakawa, M. "Interactive Multiobjective Decision-Making by the Fuzzy Sequential Proxy Optimization Technique-FSPOT", *Times/Studies in the Management Science*, Vol.20, (1984), pp. 241-260.
- [19] Sakawa, M. and H. Yano, "An Interactive Fuzzy Satisficing Method for multiobjective Linear Fractional Programming Problems", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 28, (1984) pp. 129-144.
- [20] Sakawa, M. and H. Yano, "An Interactive Fuzzy Satisficing Method for Generalized Multiobjective Linear Programming Problems with Fuzzy Parameters", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 35, (1990), pp. 125-142.

- [21] Sakawa, M. and H. Yano, "Interactive Fuzzy Decision Making for Multiobjective Nonlinear Programming using Augmented Minimax Problems", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 20, (1986), pp. 31-43.
- [22] Sakawa, M. "Interactive Computer Programs for Fuzzy Linear Programming with Multiple Objectives", *International Journal of Man-Machine Studies*, Vol. 18, (1983) pp. 489-503.
- [23] Sakawa, M. and H. Yano, "Interactive Fuzzy Decision Making for Multiobjective Nonlinear Programming using Reference Membership Intervals", *International Journal of Man-Machine Studies*, Vol. 23, (1985), pp. 407-421.
- [24] Sakawa, M. and H. Yano, "Interactive Fuzzy Decision Making for Multiobjective Nonlinear Programming Problems with Fuzzy Parameters", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 29, (1989), pp. 315-326.
- [25] Slowinski, R., "A Multicriteria Fuzzy Linear Programming Method for Water Supply Systems Development Planning", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 19, (1986), pp. 217-237.
- [26] Tanaka, M. and K. Asai, "Fuzzy Linear Programming with Fuzzy Numbers", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 13, (1984), pp. 1-10.
- [27] Yano, H. and M. Sakawa, "Interactive Fuzzy Decision Making for Generalized Multiobjective Linear Fractional Programming Problems with Fuzzy Parameters", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 32, (1989), pp. 245-261.
- [28] Zimmermann, H. J., "Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 1, (1978), pp. 45-55.
- [29] Zimmermann, H. J., "Fuzzy Sets Theory and Mathematical Programming", *Fuzzy Sets Theory and Applications*, (1986), pp. 99-114.
- [30] Zimmermann, H. J. and P. Zysno, "Latent Connective in Human Decision Making", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 4, (1980), pp. 37-51.
- [31] Zimmermann, H. J. and P. Zysno, "On the Suitability of Minimum and Product Operators for the Intersection of Fuzzy Sets", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 2, (1979), pp. 167-180.