

5구분 선형 함수에 의한 카오스 발진회로의 스펙트럼

김 남 호*

Spectrums of Chua's Oscillator Circuit with Five - Segment Piecewise - Linear Function

N. H. Kim

Key words : Chua's oscillator circuit(카오스 발진회로), Bifurcation phenomena(분기현상), Attractor(끌개), Five - segment piecewise - linear function(5구분 선형 함수)

Abstract

This paper describes an implementation of Chua's oscillator circuits with five - segment piecewise - linear function. Some bifurcation phenomena and chaotic attractors observed experimentally from the laboratory model and simulated by computer for the model are also presented. The Chua's oscillator circuit is implemented with analog electronic devices. Comparing both the observations and simulations, the spectrums are satisfactory.

1. 서 론

오늘날 반도체 기술의 발전으로 컴퓨터의 대중화와 함께 비선형 계통에 있어서 많은 발전이 이룩되었으며, 특히 70년대 이후 Chaotic 시스템에 대한 관심이 급증하게 되면서 천체물리학, 기상학, 생물학, 화학, 수학, 의학, 사회학, 공학 등을 포함한 과학 전분야에서 연구 및 응용이 활발히 진행되고 있다.

이러한 Chaotic 현상은 선형 시스템에서는 존재하지 않으며 비선형 시스템에서만 발견되는 흥미 있는 현상이다. 비선형 시스템에서도 자율동차 시스템에서는 3차이상, 비자율 시스템에서는 2차이

상, discrete - system에서는 차수가 1차이상이면 Chaotic 현상이 발생한다. 이러한 현상을 증명하는 대표적인 것으로 Chua 발진회로이다.

Chua 발진회로는 매우 단순한 자율 3차계 시스템이며, 1개의 비선형 소자와 4개의 선형 소자로 구성된 회로이다. Chua 회로의 카오스 어트랙터는 Matsumoto가 컴퓨터 시뮬레이션으로 제시하였으며^{1,2)}, 제시된 Chua 회로의 비선형 저항은 실제 회로 구성 및 시뮬레이션에 있어 다소 문제점이 있다.

따라서 본 논문에서는 실험적 모델로 5구분 선형 저항을 사용하여 Chua 회로를 구현하였으며, 이 발진회로의 특성을 확인하기 위해 파라미터 변

* 부경대학교 공과대학 제어계측공학과

화시 v_{C_1} 의 전압파형, $v_{C_1} - v_{C_2}$ 의 특성 및 v_{C_1} 의 power spectral density를 측정하였다. 또한 이 실험적 모델을 기초로 하여 컴퓨터로 시뮬레이션하였다. 그 결과 1주기, 2주기, 4주기의 주기 배증 과정 및 Spiral 어트랙터, Double-Scroll 어트랙터, 주기성 윈도우를 확인하였으며 각각의 power spectral density는 실험 결과와 시뮬레이션 결과가 거의 일치하였다. 특히 Spiral, Double-Scroll 어트랙터의 power spectral density는 기준주파수 부근에서 확산됨을 확인하였다.

2. 카오스 발진회로

Matsumoto에 의해 제안된 Chua 회로는 그림 1과 같으며, 상태방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{dv_{C_1}}{dt} &= \frac{1}{C_1} \{G(v_{C_2} - v_{C_1}) - f(v_{C_1})\} \\ \frac{dv_{C_2}}{dt} &= \frac{1}{C_2} \{G(v_{C_1} - v_{C_2}) + i_L\} \\ \frac{di_L}{dt} &= -\frac{1}{L} (v_{C_2} + R_o i_L) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 G 는 $1/R$ 이고, R_o 는 코일의 저항이며, $f(v_{C_1})$ 은 구분 선형 함수²⁾(piecewise-linear function)이며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(v_{C_1}) &= i_R = G_b v_{C_1} \\ &+ \frac{1}{2}(G_a - G_b) \{ |v_{C_1} + E| - |v_{C_1} - E| \} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 G_a 는 내부 영역의 기울기, G_b 는 외부 영역의 기울기, $\pm E$ 는 Break-point이다.

선형적인 비선형 저항(N_R)의 $v-i$ 특성은 그림 2

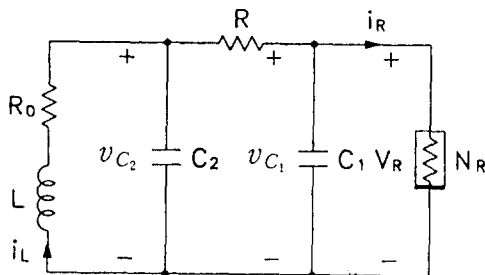


Fig. 1. Chua's Oscillator.

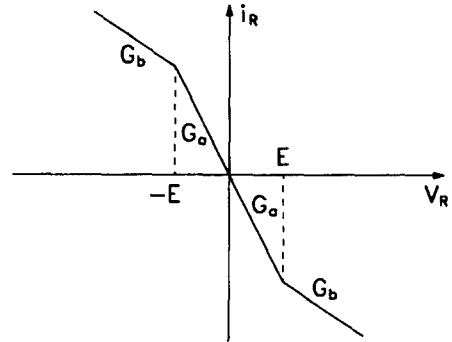


Fig. 2. Typical $v-i$ characteristic of Chua's diode.

와 같다.

3. 5구분 선형 저항의 구현

잘 알려진 Chua 회로는 3구분 선형 저항으로 구성되며, 이 회로는 콘덴서의 충전전압과 전력이 증가하여 실제 회로를 구성하는데 다소 문제점이 있고, 또한 시뮬레이션에서 시스템을 발산시키는 초기조건이 존재하므로, 본 논문에서는 그림 3과 같은 5구분 선형 함수¹²⁾를 사용하였다. 이 선형 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} f(v_{C_1}) &= i_R = G_c v_{C_1} \\ &+ \frac{1}{2}(G_a - G_b) \{ |v_{C_1} + E_1| - |v_{C_1} - E_1| \} \\ &+ \frac{1}{2}(G_b - G_c) \{ |v_{C_1} + E_2| - |v_{C_1} - E_2| \} \end{aligned} \quad (3)$$

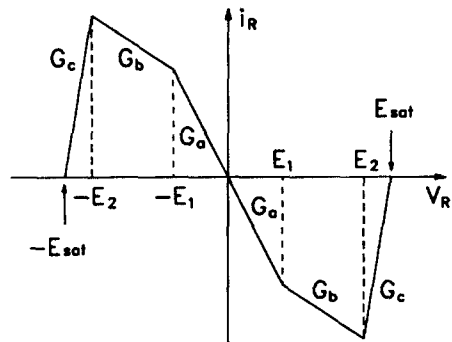


Fig. 3. The characteristic of five-segment piecewise-linear function.

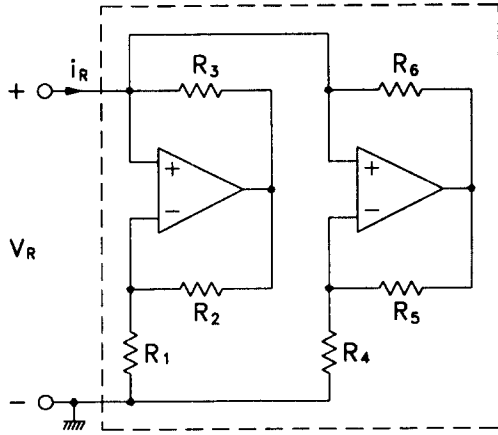


Fig. 4. Practical implementation of five - segment piecewise - linear resistor(N_R).

여기서 v_{C_1} 은 V_R 과 같으며 G_a 는 내부 영역의 기울기, G_b 는 중간 영역의 기울기, G_c 는 외부 영역의 기울기이다.

식(3)을 기초로 하여 2개의 연산증폭기와 6개의 저항으로 그림 4와 같이 비선형 저항회로를 구성하였다.

그림 4의 비선형 저항회로에서 연산증폭기는 AD711을 사용하였고, 이 회로의 Break - point($\pm E_1, \pm E_2$)는 다음과 같이 표현된다.

$$E_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E_{sat} \quad (4)$$

$$E_2 = \frac{R_4}{R_4 + R_5} E_{sat} \quad (5)$$

여기서 E_{sat} 는 연산증폭기의 포화 레벨이다.

그리고 $R_2 = R_3, R_5 = R_6$ 일때 각 영역의 기울기 G_a, G_b, G_c 는 다음과 같이 표현된다.

$$G_a = -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_4} \quad (6)$$

$$G_b = \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \quad (7)$$

$$G_c = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} \quad (8)$$

여기서 $G_a = -757.576 [\mu\Omega], G_b = -409.091 [\mu\Omega], G_c = 4.5909 [m\Omega]$ 이며, 이것을 식(3)의 5구분 선형 함수에 대입하여, $v-i$ 특성의 계산 결과를

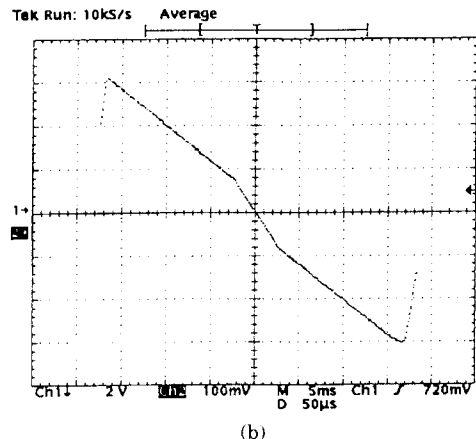
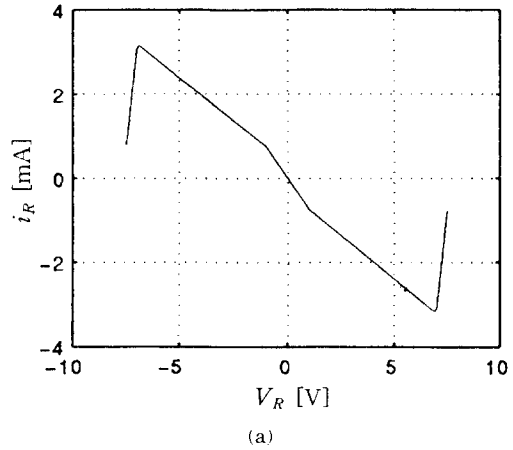


Fig. 5. (a) The calculated $v-i$ characteristic of Chua's diode N_R with five - segment piecewise - linear function.

(b) The measured $v-i$ characteristic of Chua's diode N_R with five - segment piecewise - linear function.

그림 5(a)에 나타내었다. 그림 5(b)는 이 비선형 저항의 $v-i$ 특성을 측정 한 것이다.

4. 카오스 발진회로의 구현 및 시뮬레이션

4.1 구현 및 결과

카오스 발진회로는 실험적 모델로 그림 4의 5구분 선형 저항(N_R)을 사용하여 그림 1과 같이 구현하였고, 사용된 부품은 다음과 같다.

$$C_1 = 5 [nF], \quad C_2 = 20 [nF]$$

$$L = 12 [mH], \quad R_o = 36.8 [\Omega]$$

그리고 R 은 $2000 [\Omega]$ 의 포텐쇼메터를 사용하였다.

구현한 회로의 성능을 평가하기 위해, 파라미터 (R)를 $2000 [\Omega]$ 에서 $0 [\Omega]$ 방향으로 가변하면서, v_{C_1} 의 전압파형 및 $v_{C_1} - v_{C_2}$ 의 특성은 디지털 오실로스코우프(Tektronix TDS320)로 관측하였으며, 그때 v_{C_1} 의 power spectral density는 측정의 정도를 향상하기 위해 Hanning window를 취하여, 스펙트럼분석기(ADVANTEST R9211A)로 측정하였다.

그 결과, 파라미터가 $1621.3 [\Omega]$, $1601.1 [\Omega]$, $1588.2 [\Omega]$ 일 때 1주기, 2주기, 4주기의 주기 배증 과정을 확인하였으며, 또한 파라미터가 $1574.2 [\Omega]$, $1551 [\Omega]$, $1513 [\Omega]$ 일 때 Spiral 어트랙터, Double-Scroll 어트랙터, 3-3 윈도우를 확인하였다. 그리고 그림 6(a), 7(a), 8(a)는 1주기, 2주기, 4주기운동, 그림9(a), 10(a), 11(a)는 Spiral 어트랙터, Double-Scroll 어트랙터, 3-3 윈도우일 때의 v_{C_1} 의 전압파형을 측정된 것이고, 그림 6(b), 7(b), 8(b)는 1주기, 2주기, 4주기운동, 그림9(b), 10(b), 11(b)는 Spiral 어트랙터, Double-Scroll 어트랙터, 3-3 윈도우일 때의 $v_{C_1} - v_{C_2}$ 의 특성을 측정된 것이며, 그림 6(c), 7(c), 8(c)는 1주기, 2주기, 4주기운동, 그림9(c), 10(c), 11(c)는 Spiral 어트랙터, Double-Scroll 어트랙터, 3-3 윈도우일 때의 v_{C_1} 의 power spectral density를 측정된 것이다.

4. 2 시뮬레이션 및 결과

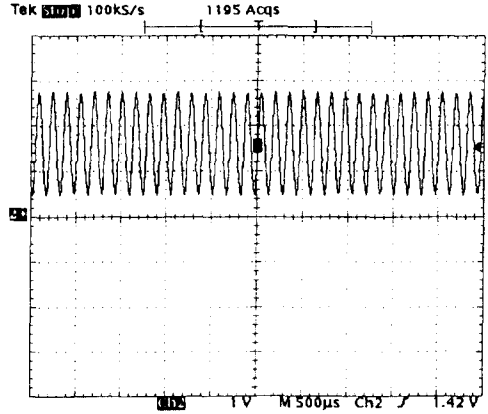
실험적 모델을 기초로 하여, 식(3)의 5구분 선형 함수를 사용하여, 그림 1과 같은 카오스 발진회로를 구성하여, 식(1)의 상대방정식을 시뮬레이션하였다. 시뮬레이션에 사용된 초기조건은 다음과 같다.

$$v_{C_1}(0) = 0.2$$

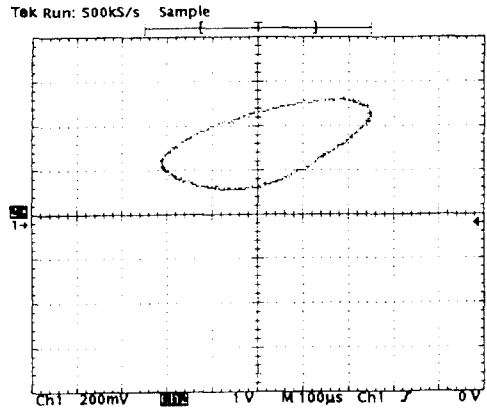
$$v_{C_2}(0) = 2.204E - 16$$

$$i_L(0) = 2.204E - 16$$

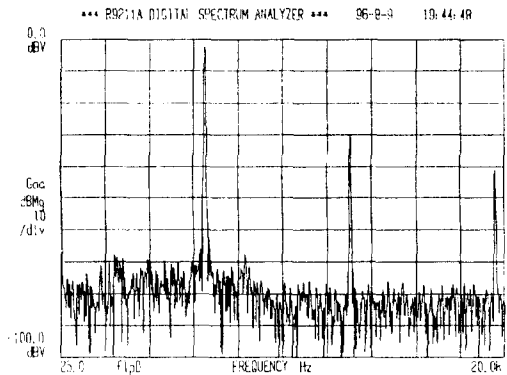
그리고 5구분 선형 저항 및 각 부품의 파라미터를 다음과 같이 하였다.



(a) Time waveform of v_{C_1} .
(Vertical axis v_{C_1} , scale : 1V/div.
Horizontal axis t , scale : 500µS/div.)

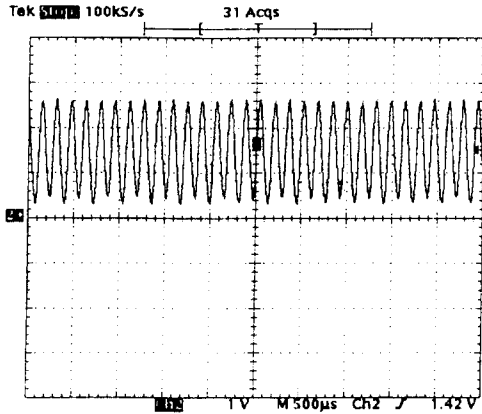


(b) Phase portraits in the $v_{C_1} - v_{C_2}$.
(Vertical axis v_{C_1} , scale : 1V/div.
Horizontal axis v_{C_2} , scale : 200mV/div.)

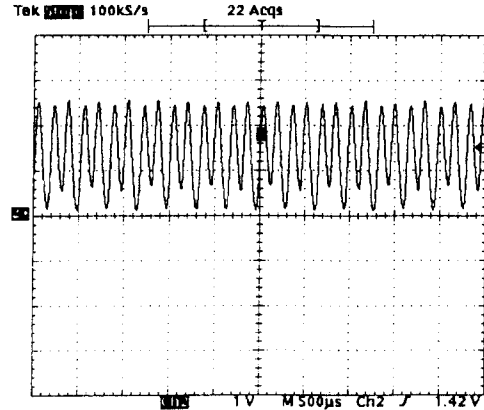


(c) Power spectral density of voltage v_{C_1} .

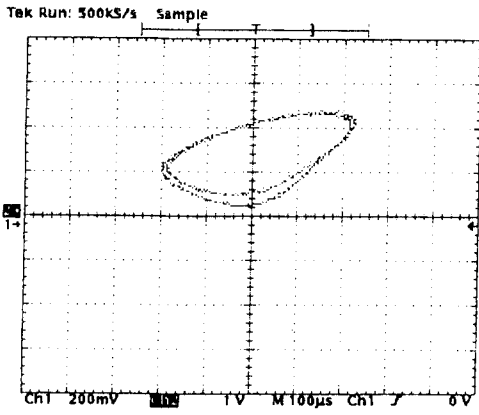
Fig. 6. Measured period - 1 limit cycle.
($R = 1621.3 [\Omega]$)



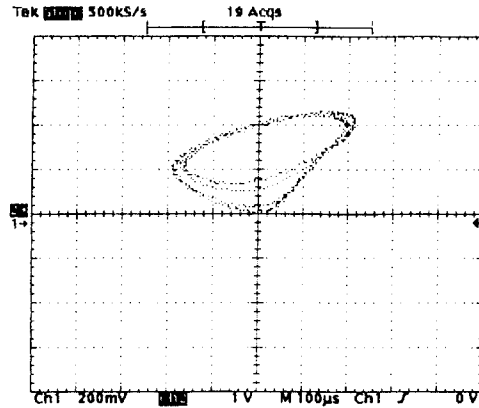
(a) Time waveform of v_{C_1} .
(Vertical axis v_{C_1} , scale: 1V/div.
Horizontal axis t , scale : 500µS/div.)



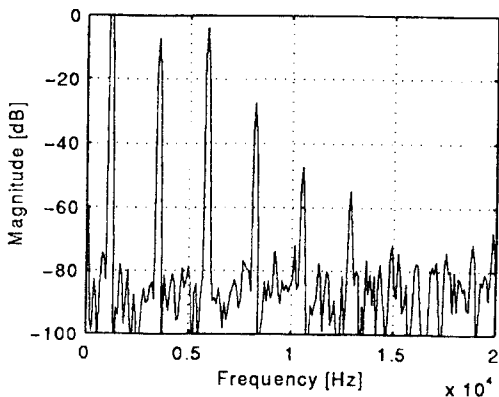
(a) Time waveform of v_{C_1} .
(Vertical axis v_{C_1} , scale : 1V/div.
Horizontal axis t , scale : 500µS/div.)



(b) Phase portraits in the $v_{C_1} - v_{C_2}$.
(Vertical axis v_{C_1} , scale : 1V/div.
Horizontal axis v_{C_2} , scale : 200mV/div.)

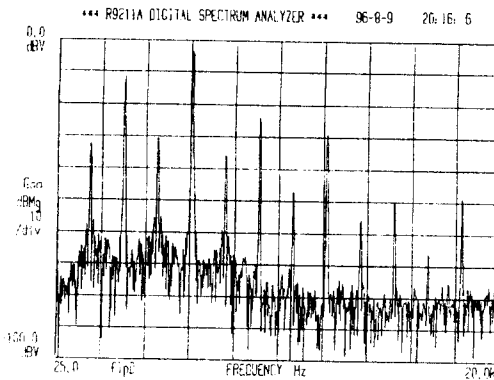


(b) Phase portraits in the $v_{C_1} - v_{C_2}$.
(Vertical axis v_{C_1} , scale : 1V/div.
Horizontal axis v_{C_2} , scale : 200mV/div.)



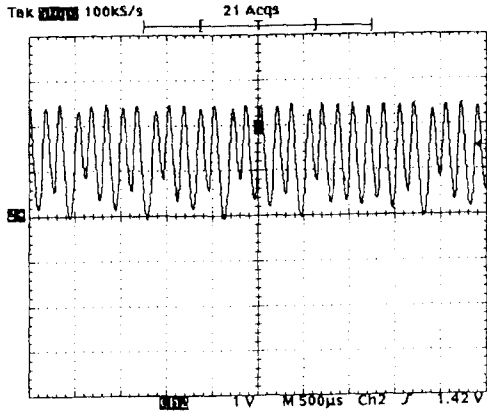
(c) Power spectral density of voltage v_{C_1} .

Fig. 7. Measured period - 2 limit cycle.
($R=1601.1[\Omega]$)

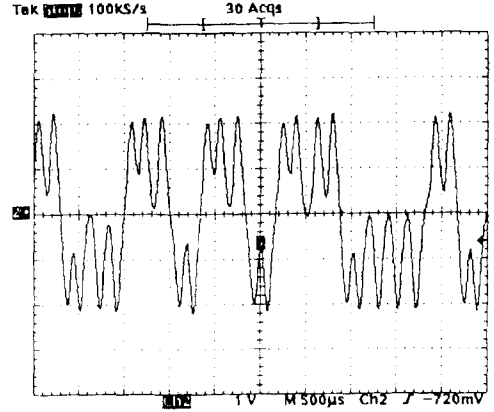


(c) Power spectral density of voltage v_{C_1} .

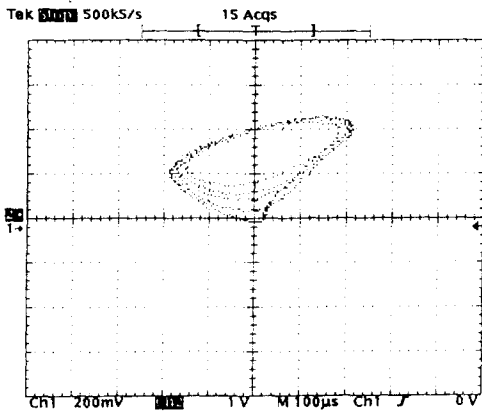
Fig. 8. Measured period - 4 limit cycle.
($R=1588.2[\Omega]$)



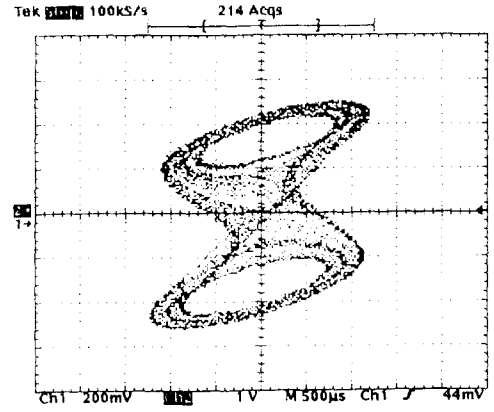
(a) Time waveform of v_{C_1} .
 (Vertical axis v_{C_1} , scale : 1V/div.
 Horizontal axis t, scale : 500µS/div.)



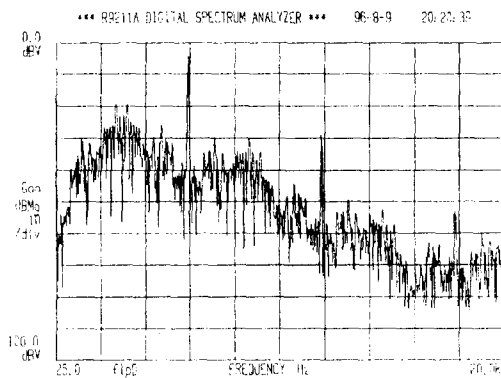
(a) Time waveform of v_{C_1} .
 (Vertical axis v_{C_1} , scale : 1V/div.
 Horizontal axis t, scale : 500µS/div.)



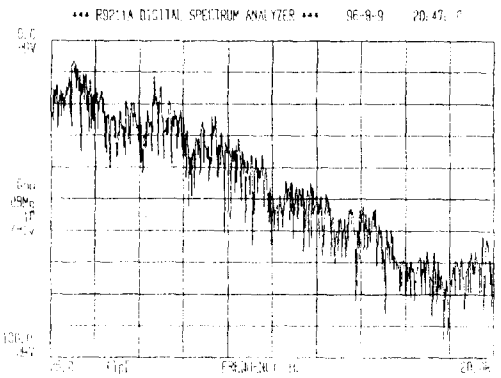
(b) Phase portraits in the $v_{C_1} - v_{C_2}$.
 (Vertical axis v_{C_1} , scale : 1V/div.
 Horizontal axis v_{C_2} , scale : 200mV/div.)



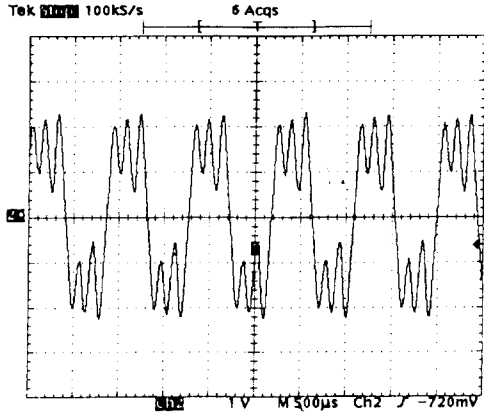
(b) Phase portraits in the $v_{C_1} - v_{C_2}$.
 (Vertical axis v_{C_1} , scale : 1V/div.
 Horizontal axis v_{C_2} , scale : 200mV/div.)



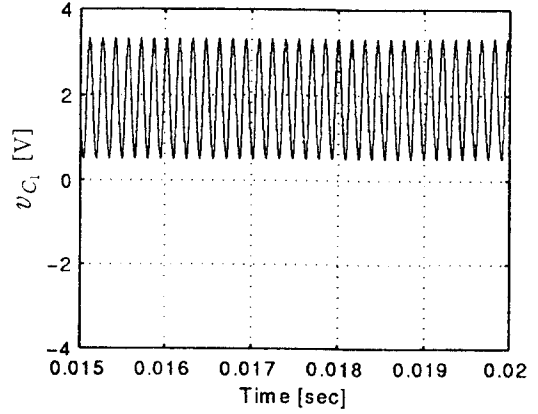
(c) Power spectral density of voltage v_{C_1} .
Fig. 9. Measured Spiral Chua's attractor.
 ($R=1574.2[\Omega]$)



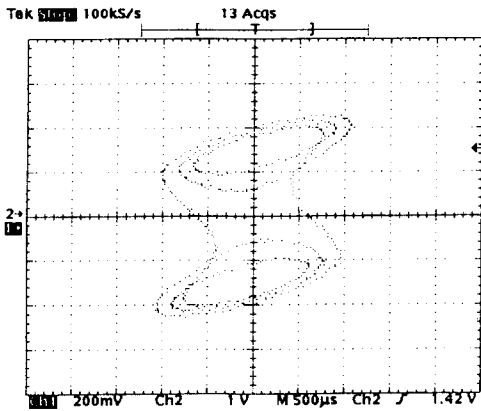
(c) Power spectral density of voltage v_{C_1} .
Fig. 10. Measured Double - Scroll Chua's attractor.
 ($R=1551[\Omega]$)



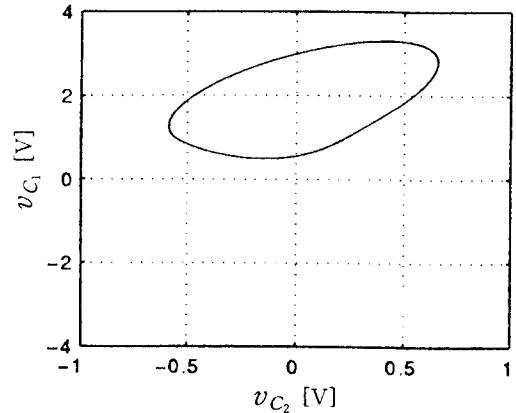
(a) Time waveform of v_{C_1} .
(Vertical axis v_{C_1} , scale : 1V/div.
Horizontal axis t , scale : 500μS/div.)



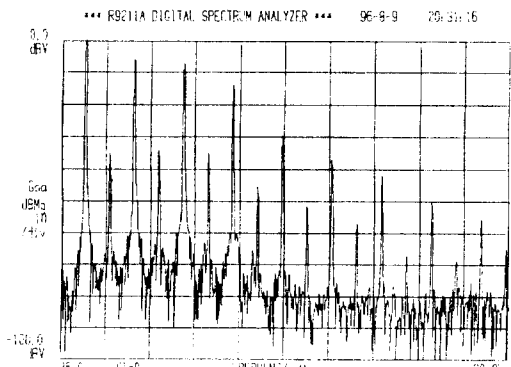
(a) Time waveform of v_{C_1} .



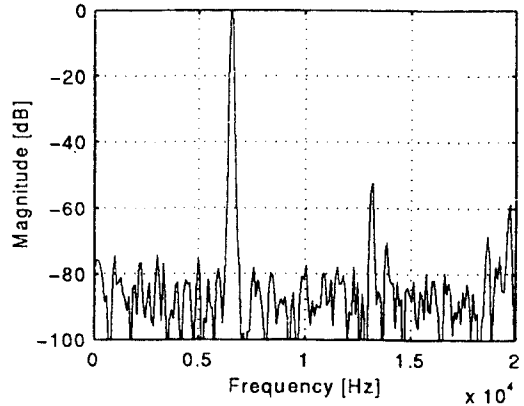
(b) Phase portraits in the $v_{C_1} - v_{C_2}$.
(Vertical axis v_{C_1} , scale : 1V/div.
Horizontal axis v_{C_2} , scale : 200mV/div.)



(b) Phase portraits in the $v_{C_1} - v_{C_2}$.



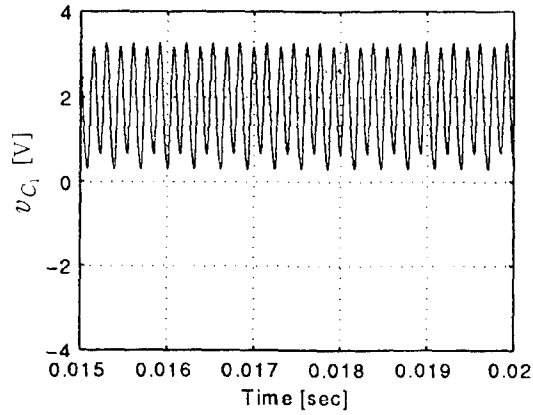
(c) Power spectral density of voltage v_{C_1} .



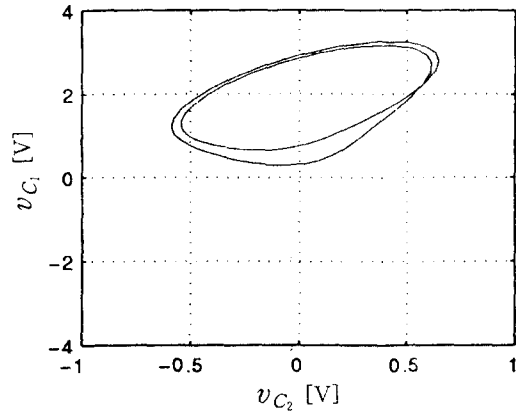
(c) Power spectral density of voltage v_{C_1} .

Fig. 11. Measured 3 - 3 window.
($R=1513[\Omega]$)

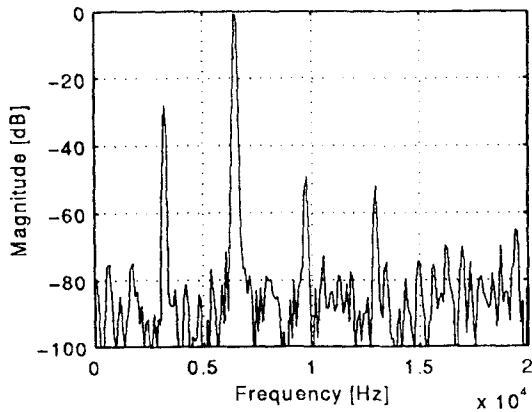
Fig. 12. Simulated period - 1 limit cycle.
($R=1699[\Omega]$)



(a) Time waveform of v_{C_1} .

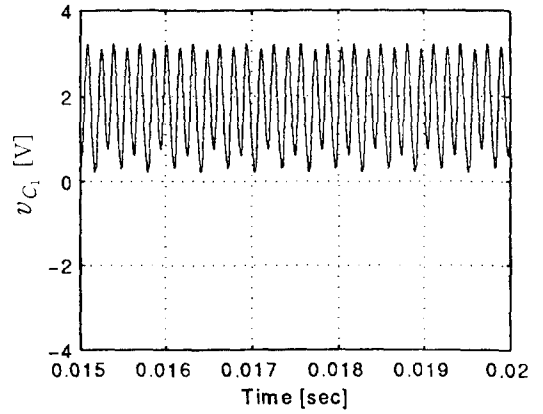


(b) Phase portraits in the $v_{C_1} - v_{C_2}$.

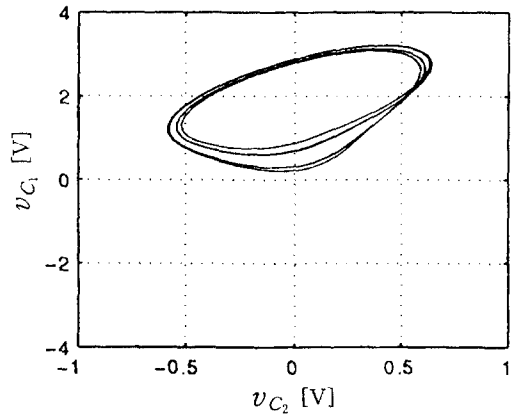


(c) Power spectral density of voltage v_{C_1} .

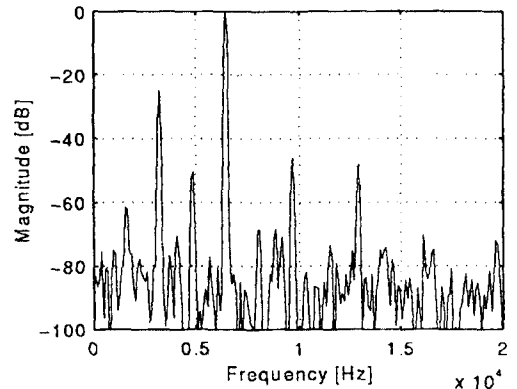
Fig. 13. Simulated period - 2 limit cycle.
($R=1688 [\Omega]$)



(a) Time waveform of v_{C_1} .

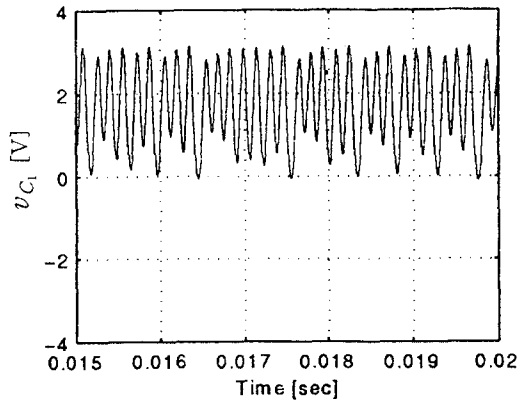


(b) Phase portraits in the $v_{C_1} - v_{C_2}$.

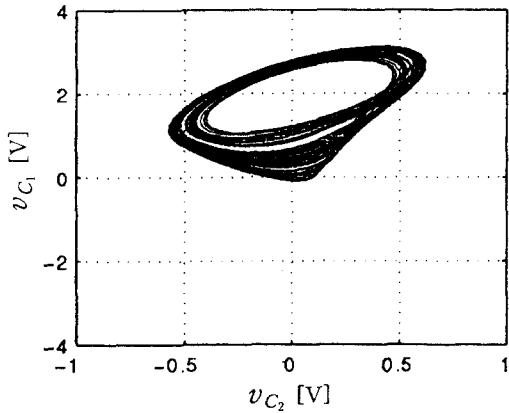


(c) Power spectral density of voltage v_{C_1} .

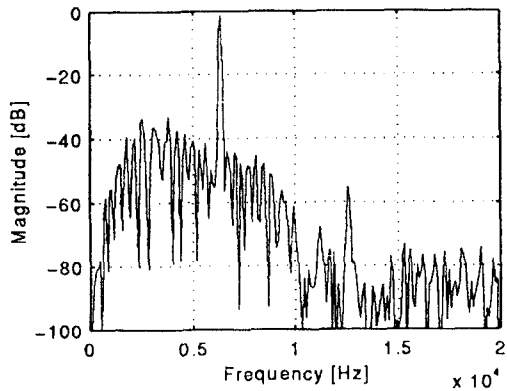
Fig. 14. Simulated period - 4 limit cycle.
($R=1683 [\Omega]$)



(a) Time waveform of v_{C_1} .

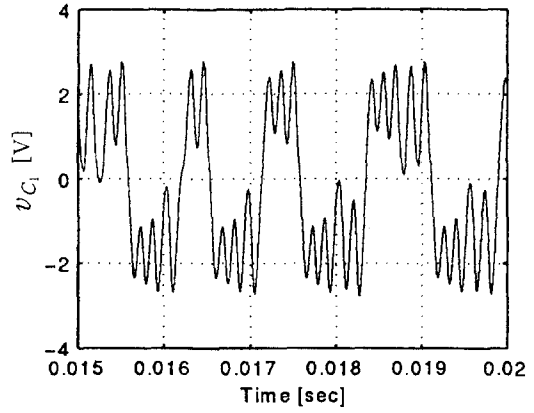


(b) Phase portraits in the $v_{C_1} - v_{C_2}$.

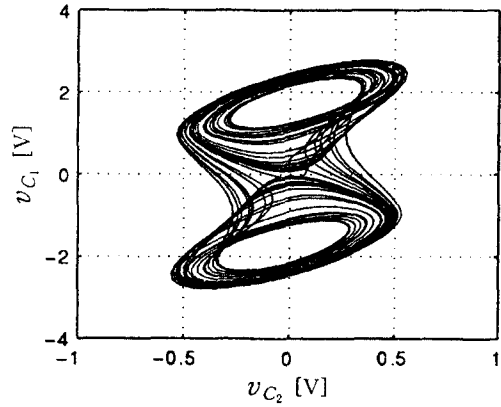


(c) Power spectral density of voltage v_{C_1} .

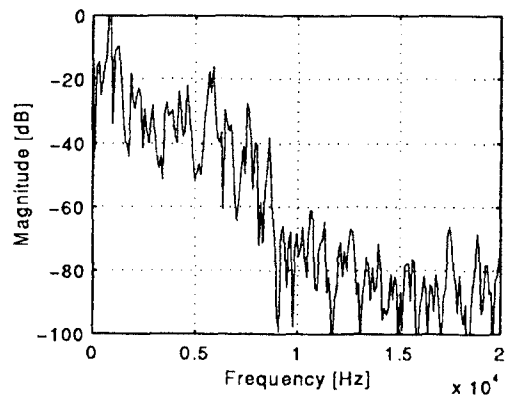
Fig. 15. Simulated Spiral Chua's attractor.
($R=1669[\Omega]$)



(a) Time waveform of v_{C_1} .

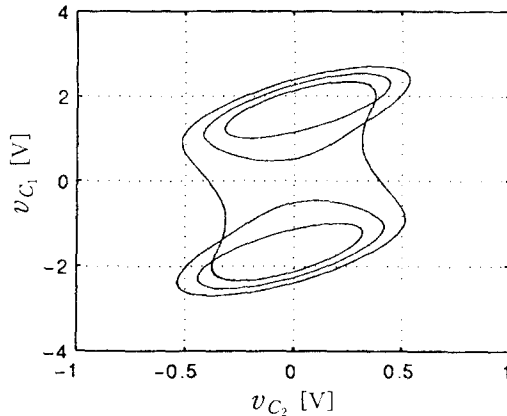


(b) Phase portraits in the $v_{C_1} - v_{C_2}$.

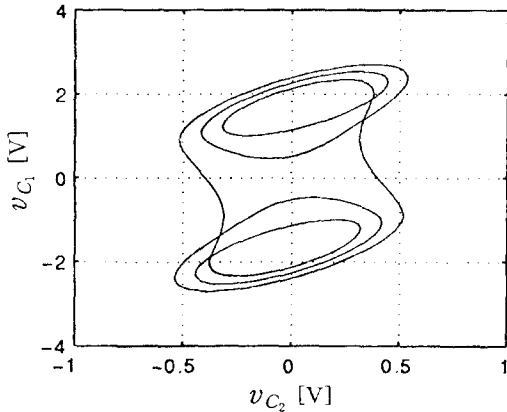


(c) Power spectral density of voltage v_{C_1} .

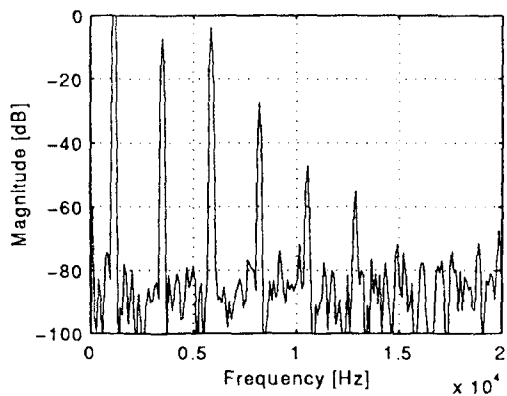
Fig. 16. Simulated Double-Scroll Chua's attractor.
($R=1614[\Omega]$)



(a) Time waveform of v_{C_1} .



(b) Phase portraits in the $v_{C_1} - v_{C_2}$.



(c) Power spectral density of voltage v_{C_1} .

Fig. 17. Simulated 3-3 window.

($R=1599[\Omega]$)

$$G_a = -757.576[\mu\Omega]$$

$$G_b = -409.091[\mu\Omega]$$

$$G_c = 4.5909[m\Omega]$$

$$C_1 = 5.047[nF], \quad C_2 = 20.227[nF]$$

$$L = 12.136[mH], \quad R_o = 36.8[\Omega]$$

제시한 회로의 시뮬레이션은 파라미터(R)를 2000 $[\Omega]$ 에서 0 $[\Omega]$ 방향으로 변화시키면서, v_{C_1} 의 전압파형, $v_{C_1} - v_{C_2}$ 의 특성을 시뮬레이션하였고, 그 때의 power spectral density는 v_{C_1} 의 전압에, white gaussian noise(평균이 0이고, $\sigma^2=0.12$)를 첨가한 후, Hanning window를 취하여¹³⁾, 8192 point의 푸리에 변환(FFT)하여 시뮬레이션하였다.

그 결과, 파라미터가 1699 $[\Omega]$, 1688 $[\Omega]$, 1683 $[\Omega]$ 일 때 1주기, 2주기 4주기의 주기 배중 과정을 확인하였으며, 또한 1669 $[\Omega]$, 1614 $[\Omega]$, 1599 $[\Omega]$ 일 때 Spiral 어트랙터, Double-Scroll 어트랙터, 3-3 윈도우를 확인하였다.

그리고 그림 12(a), 13(a), 14(a)는 1주기, 2주기, 4주기운동, 그림 15(a), 16(a), 17(a)는 Spiral 어트랙터, Double-Scroll 어트랙터, 3-3 윈도우일 때의 v_{C_1} 의 전압파형을 시뮬레이션한 것이고, 그림 12(b), 13(b), 14(b)는 1주기, 2주기, 4주기운동, 그림 15(b), 16(b), 17(b)는 Spiral 어트랙터, Double-Scroll 어트랙터, 3-3 윈도우일 때의 $v_{C_1} - v_{C_2}$ 의 특성을 시뮬레이션한 것이며, 그림 12(c), 13(c), 14(c)는 1주기, 2주기, 4주기운동, 그림 15(c), 16(c), 17(c)는 Spiral 어트랙터, Double-Scroll 어트랙터, 3-3 윈도우일 때의 v_{C_1} 의 power spectral density를 시뮬레이션한 결과이다. 특히 Spiral 어트랙터, Double-Scroll 어트랙터의 power spectral density는 그림 15(c), 그림 16(c)와 같으며, 여기서 power spectral density는 기준주파수 부근에서 확산됨을 확인하였다.

5. 결 론

Chua 회로의 카오스 어트랙터는 Matsumoto가 컴퓨터 시뮬레이션으로 제시하였으며, 제시된 Chua 회로의 비선형 저항은 실제 회로 구성 및 시

물레이션에 있어 다소 문제점이 있다.

본 논문에서는 실험적 모델로 5구분 선형 저항을 2개의 연산증폭기와 6개의 저항으로 비선형 저항을 구성하여 Chua 발진회로를 구현하였으며, 이 발진회로의 특성을 확인하기 위해 파라미터 변화시 v_{C_1} 의 전압파형, $v_{C_1} - v_{C_2}$ 의 특성 및 v_{C_1} 의 power spectral density를 측정하였다. 또한 이 실험적 모델을 기초로 하여 컴퓨터로 시뮬레이션을 하였다. 그 결과 1, 2, 4주기의 주기 배증 및 Spiral 어트랙터, Double-Scroll 어트랙터, 주기성 윈도우를 확인하였다. 각각의 power spectral density는 구현한 결과와 시뮬레이션 결과가 거의 일치하였다. 특히 Spiral, Double-Scroll 어트랙터의 power spectral density는 기준주파수 부근에서 확산됨을 확인하였다. 이 Chua 발진회로는 암호화 통신 등에 적용될 것으로 사료된다.

참고문헌

- 1) T. Matsumoto, "A Chaotic Attractor from Chua's Circuit", IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-31, no. 12, pp. 1055 - 1058, 1984.
- 2) T. Matsumoto, L. O. Chua, and M. Komuro, "The Double Scroll", IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-34, pp. 797 - 818, 1985.
- 3) M. J. Ogorzalek, "Chaotic Regions from Double Scroll", IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-34, pp. 201 - 203, 1987.
- 4) T. S. Parker, and L. O. Chua, "The Dual Double Scroll Equation", IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-32, no. 9, pp. 1059 - 1073, 1987.
- 5) Naohiko Inaba, Shinsaku Mori, "Chaos via

- Torus Breakdown in a Piecewise - Linear Forced Van der Pol Oscillator with a Diode", IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 38, no. 4, pp. 398 - 409, 1991.
- 6) T. L. Carrol and L. M. Pecoro, "Synchronizing Chaotic Circuit", IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 38, no. 4, pp. 453 - 456, 1991.
- 7) Leon O. Chua, Gui - nian Lin, "Intermittency in a Piecewise - Linear Circuit", IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 38, no. 5, pp. 510 - 520, 1991.
- 8) Robert Lum, Leon O. Chua, "The Identification of General Pseudoreciprocal Vector Fields: IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 39, no. 2, 1992.
- 9) K. Murali, M. Lakshmanan, "Effect of Sinusoidal Excitation on the Chua's Circuit", IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 39, no. 4, pp. 264 - 270, 1992.
- 10) Fan Zou, Josef A. Nossek, "Bifurcation and Chaos in Cellular Neural Network", IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 40, no. 3, pp. 166 - 173, 1993.
- 11) Herve Dedieu, Michael Peter Kenndy, "Chaos Shift Keying : Modulation and Demodulation of a Chaotic Carrier using Self Synchronizing Chua's Circuit", IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 40, no. 10, pp. 634 - 642, 1993.
- 12) Maciej J. Ogorzlek, Zbigniew Galias, Andrzej M. Dabrowski, Wladyslaw R. Dabrowski, "Chaotic Waves and Spatio - Temporal Patterns in Large Arrays of Doubly - Coupled Chua's Circuits", IEEE Trans. Circuits Syst., vol. 42, no. 10, pp. 706 - 714, 1995.
- 13) 김남호 외 1인, "변형된 Hanning Window를 사용한 FIR 디지털 필터에 관한 연구", 부산공업대학교 산업과학기술연구소논문집, 제9집, pp. 5 - 11, 1994.