

콜로이드 입자의 3차원적인 적층에 대한 컴퓨터 시뮬레이션

김종철 · David M. Martin

아이오와 주립대 재료공학과
(1997년 5월 20일 접수)

Computer Simulation of Three Dimensional Particle Packing

Jong-Cheol Kim and David M. Martin

Department of Materials Science and Engineering, Iowa State University

(Received May 20, 1997)

요 약

입자의 재배열 개념과 다차원적 입자개념을 도입하여 계층적 구조를 가지는 콜로이드 입자적층을 레헤이 FORTRAN 90과 IBM-PC 컴퓨터를 사용하여 시뮬레이션하였다. 3차원적으로 입자를 적층시킨 결과 덩어리의 응집도는 입자의 재배열 과정에 크게 좌우되었다. 즉 응집 후 재배열된 덩어리 보다 응집과정중에 재배열된 덩어리들이 높은 배위입자수와 적층밀도를 나타내었다. 크기가 다른 두 종류의 입자적층 시뮬레이션에서의 3차원적 적층은 입자들이 응집시 형성된 기공으로의 입자 투입이 2차원적 적층에 비해 비교적 자유로운 관계로 재배열에 따라 밀도가 증진되는 현상을 보였으며 재배열이 없는 경우 적층구조의 무질서화로 인하여 적층밀도가 저하되는 현상을 보였다.

ABSTRACT

The three-dimensional particle packing process is simulated using Lahey FORTRAN 90 as a programming language running on a personal computer. Particle clusters constructed with rearrangement which occurs during packing have higher average coordination number and packing density than particle clusters rearranged after packing. Rearranging particles can not completely block other particles from entering pore volume in 3-dimensional packing unlike in 2-dimensional packing. It is found that there is a region of instability where lower packing density results from the destruction of the ordered packing.

Key words : Computer simulation, Three dimension, Particle packing, Rearrangement

1. 서 론

일반적으로 세라믹 분말 성형체의 소결성은 입자의 크기에 크게 영향을 받기 때문에 미세하고 입자크기 분포가 좁은 입자를 얻는 것이 바람직하다.¹⁾ 또한 균일한 미세조직과 높은 소결 밀도를 가진 제품을 제조하기 위해서는 성형체의 밀도를 증가시켜야 한다. 그러나 입자의 크기가 감소함에 따라 입자의 표면 특성이 증가하여 견고한 덩어리를 형성하기 때문에 성형체의 밀도를 증가시키기가 어렵다.

기존의 연구에 의하면, 콜로이드 입자들이 3차원적으로 적층될 때 입자들은 다른 입자와 접촉한 후에 좀 더 안정한 위치로 재배열을 하는 것으로 알려져 있으며, 이러한 과정은 Fig. 1에 나타난 바와 같이 단계적으로 설명되어 진다.²⁾ 즉, 입자가 다른 입자 위에 적층된 후 그

입자 위에서 재배열하여 또 다른 입자와 접촉함으로써 두 입자 사이에 위치하게 된다. 계속해서 두 입자 사이의 원형 케도에서 재배열을 할 경우 궁극적으로 제 3의 다른 입자와 접촉하게 되어 세 입자 사이의 안정점에 도달하게 된다.

일반적으로 100 μm 이하의 입자들은 높은 표면 에너지로 인하여 쉽게 입자간 결합을 형성하기 때문에 입자간 마찰이 증가하여 성형체의 밀도를 증가시키기가 어렵다. 이와 같은 입자간 마찰은 입자 표면의 표면 거칠기 (roughness)와 입자의 형상에도 직접적으로 관련이 있다. 세라믹 입자들은 주로 덩어리를 함유하고 있으며 덩어리는 분쇄의 용이성에 따라 강한 (hard) 또는 약한 (soft) 덩어리로 나누어진다.^{3,4)} 강한 덩어리는 주로 입자간에 부분적인 반응에 의한 경우가 많고 약한 덩어리의 경우는 주로 반대 발스 힘에 의해 결합하고 있는 경

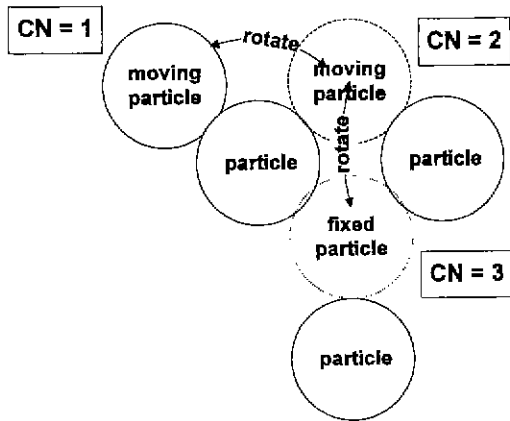


Fig. 1. Schematic presentation of a particle movement toward a stable packing position under the gravitational force.²¹

우가 많다. 세라믹 분말들은 이러한 덩어리를 제거하기 위하여 분쇄공정을 거쳐야 한다. 일반적으로 입자들간 응집력은 비표면적과 매개액체의 존재여부 등 여러 가지 요인에 의해서 좌우된다고 알려져 있다.

이와 같이 입자간 응집과 적층이 미세구조에 큰 영향을 미침에 따라 최근에는 컴퓨터를 이용한 입자적층 현상에 관한 시뮬레이션 연구가 활발히 진행되고 있다. Furnas 등⁵⁾은 입자적층에 있어서 입자크기와 입자크기 비율이 적층밀도를 증가시키는데 중요하다고 보고하였으며 McGear⁶⁾은 입자들을 우선적으로 적층하고 그 틈새에 작은 입자들은 투입하는 형식을 취한 후 네가지 종류의 입자크기를 사용하여 95.1%의 적층밀도를 얻었다. 한편, Mason⁷⁾은 중앙 집중력 모델을 사용하여 입자적층을 시뮬레이션한 결과, 64% 정도의 적층밀도를 얻었다고 보고하였으며, Tory 등⁸⁾은 중력에 의해 침강하는 모델을 사용하여 유사한 결과를 보고하였다. Davis와 Carter⁹⁾은 새로운 형태의 Monte Carlo 알고리즘을 사용하여 3차원 랜덤 입자적층을 컴퓨터 시뮬레이션하였다. 또한, Newland와 Hogue¹⁰⁾는 움직이는 입자들의 시뮬레이션을 위해서 새로운 접촉 모델을 도입하였으며, Y. Kim Han¹¹⁾은 중앙 집중력 모델에 입각하여 입자 재배열의 개념을 새롭게 적용하여 이차원적 입자적층을 시도하였다. 이 연구에서는 Fig. 2에서 보는 바와 같이 서로 다른 입자크기 비율에 따라 입자적층 밀도가 세 개의 지역으로 구분되며, 이러한 이유로서는 입자적층 구조의 무질서화 현상과 크기가 서로 다른 입자간의 충전화 현상이 서로 공존하기 때문이라고 보고하였다.

이상에서 살펴본 바와 같이 기존의 컴퓨터 시뮬레이션 연구는 단순한 입자 적층에 집중하여 간단한 실험실

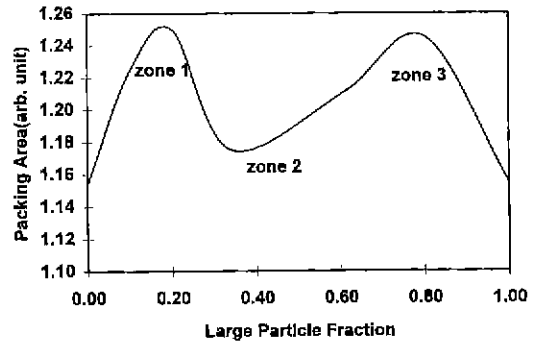


Fig. 2. Two-dimensional binary packing density at radius ratio 3.3.¹¹⁾ (adapted from Y. Kim Han's work)

적 입자적층 연구결과와의 비교에 제한되어 있다. 본 연구에서는 미세한 세라믹 분말의 특성을 고려한 입자의 재배열에 따른 준안정상태 적층개념과 다단계의 계층적 적층개념을 포함하는 입자적층 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 좀 더 현실적인 입자적층 연구를 하고자 하였다.

2. 입자적층의 모델링(Modeling)

본 연구에서 행한 3차원적 입자적층의 모델은 입자가 다른 입자 위에 적층될 때 입자가 좀 더 안정한 위치로 재배열되도록 하였으며 재배열에 의해 입자가 최적의 안정상태에 도달하기 이전에도 다른 입자들은 그 입자 위에 계속해서 적층될 수 있는 준안정 상태에 중점을 두고 고안되었다. Fig. 3은 적층 알고리즘의 순서도를 나타낸 것이며, 전체 적층과정은 입자적층 단계와 입자들이 응집한 덩어리들이 서로 뭉치는 덩어리 적층단계로 구성되어 있으며 또한 두 단계에서 모두 사용될 수 있는 다섯 개의 부분, 즉 입자응집 과정, 재배열 과정, 단면 절단 과정 (clipping), 부피분포 계산과정, 덩어리 크기 결정과정 등으로 구성되어 있다.

2.1. 입자응집과정

각 덩어리를 구성하는 입자들의 갯수가 주어지면 각 입자들은 랜덤하게 선정된 덩어리의 중심으로 응집된다. 이때 입자가 입사하는 방향은 3차원 공간에서 랜덤하게 선정되며 입사된 입자는 기존의 입자 위에 놓여지게 된다. 이 입자 응집과정에서는 중력에 대한 고려 없이 입자들의 중앙집중력만을 고려하였다. 이러한 과정은 중력의 영향을 거의 받지 않을 정도로 미세한 세라믹 입자에 좋은 가정이라고 할 수 있다. 이 모델을 사용하여 대상 입자들의 수와 시뮬레이션 과정에 소요된 시간과의 관계를 살펴본 결과, Table 1에 나타난 바

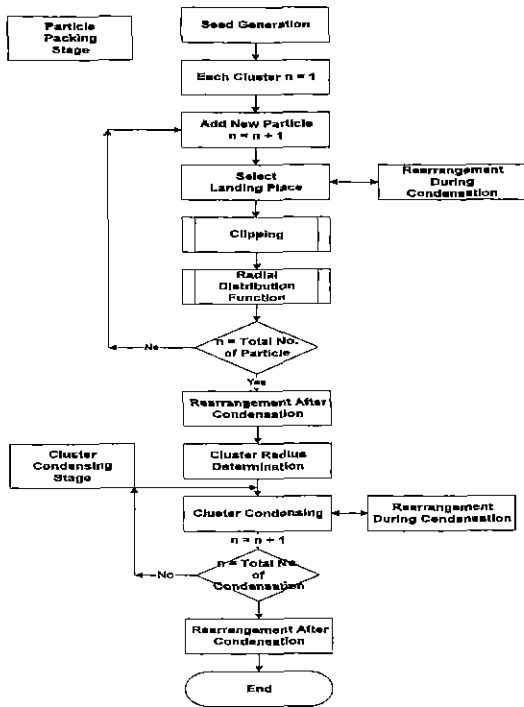


Fig. 3. Flow chart of total packing algorithm.

Table 1. Relation of Computation Time Taken with the Number of Particles

No. of particle	Time(sec)
10	2
100	13
300	125
500	435
1000	1860

와 같이, 1000 입자를 사용한 경우에도 한 시간 내에 종료되어 이 적층 알고리즘이 매우 효율적임을 나타내고 있다.

일반적으로 입자적층 알고리즘으로는 이 방법 이외에도 입자가 재배열 할 때 가장 안정한 위치를 찾아내어 그곳에 계속적으로 새로운 입자를 적층하는 방법과, 정해진 상자 안에 입자들의 좌표들을 생성시키고 입자들의 반경을 증가시켜 나가는 방법이 있다.^{8,12)} 그러나 이 방법들은 높은 입자적층 밀도에서는 계산 시간이 많이 소요되는 단점이 있다.

2.2. 재배열

재배열 개념은 입자가 적층될 때 한 입자가 다른 입자의 표면에 접촉한 이후에도 열역학적으로 좀 더 안정한

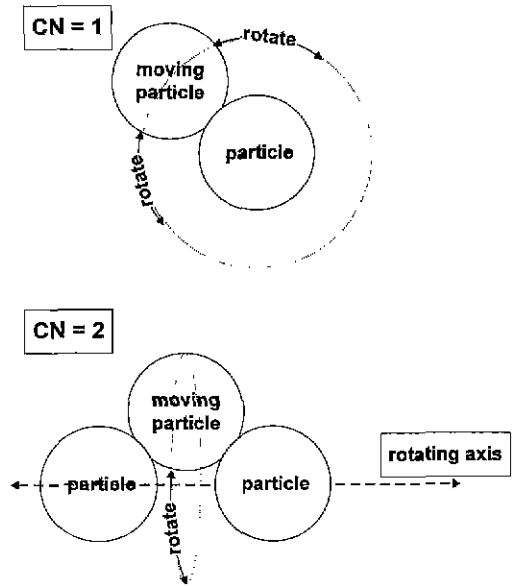


Fig. 4. Allowed particles motions for different coordination numbers.

위치로 이동하는 과정으로서, 중력의 영향하에서 구형 입자의 입자적층 컴퓨터 시뮬레이션에서 사용된 적이 있다.⁸⁾ 그러나 본 연구에서 사용한 모델은 가상의 공간에 입자들이 구형으로 적층된다는 점에서 기존의 모델과 유사하지만, 재배열과 동시에 적층이 계속되고 전입자가 적층된 후에도 이웃 입자들과의 접촉을 유지하면서 재배열하는 새로운 개념을 도입하였다.

즉, 단일 배위수가 1이면 입자가 배위입자의 표면 위를 구형으로 움직이고 2이면 두 배위입자의 주위를 원형을 그리면서 이동한다. 또, 배위수가 3이 되면 입자는 더 이상의 이동을 중지하고 재배열을 종료하게 된다. Fig. 4에 이러한 재배열을 도식적으로 나타내었다.

입자 적층시 재배열의 경우 한 입자가 적층될 때 이미 적층된 입자들은 외부의 입자로부터 시작하여 내부의 입자들까지 랜덤하게 선정된 방향으로 5°의 회전운동을 기본 단위로 하여 주어진 재배열 수 만큼 재배열이 반복적으로 허용되었다. 적층이 완료된 후 재배열은 전 입자들에게 외부의 입자로부터 시작하여 내부의 입자들까지 랜덤하게 선정된 방향으로 5°의 회전운동을 10회 반복하도록 허용하였으며 이러한 재배열 과정이 주어진 재배열 수 만큼 반복되었다.

이러한 재배열은 입자들이 응집된 덩어리에게도 동일한 방식으로 적용 되도록 하였으며, 또한 적층이 완료된 후에도 계속 재배열할 수 있도록 고안되었다. 재배열에 따라 응집된 덩어리의 적층구조를 구성 입자들의 배위수를 계산함으로써 알 수 있었다.

2.3. 덩어리의 적층과 반경결정

덩어리의 적층과정은 덩어리들이 비구형으로 3차원 공간에 동시에 생성되어 있다는 사실 이외에는 입자들의 적층과정과 매우 유사하다. 덩어리들도 응집과정 중에 또는 응집과정 후에 재배열되어질 수 있다. 이러한 재배열을 다루기 위해서는 덩어리를 일정한 크기의 입

자로 대표하는 것이 간편하다. 따라서 덩어리의 크기를 결정하기 위하여 덩어리는 그 구성입자의 평균 입자간 거리를 반경으로 하는 구에 의해 대표되어 질 수 있다고 가정하였으며 평균 입자간 거리는 다음 식에 의해 결정되어 졌다.

$$R_{tot} = \sum_{i=1}^{no} \sum_{j=1}^{no} R_{ij} \tag{1}$$

R_{tot} : Sum of interparticle distances

R_{ij} : Interparticle distance from i to j

no : Total number of particles

$$R_{ave} = R_{tot}/no(no-1) \tag{2}$$

R_{ave} : Mean interparticle distance(MID)

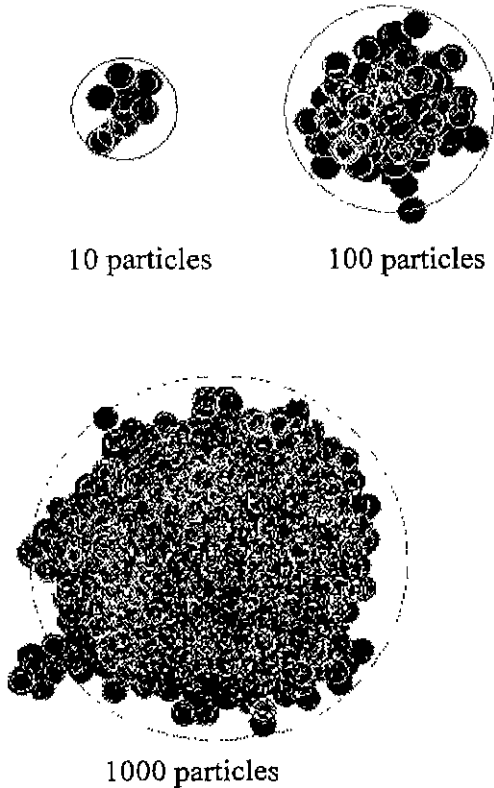


Fig. 5에 서로 입자수가 다른 세개의 덩어리와 각 덩어리의 주위에 평균 입자간 거리 (MID)를 반경으로 하는 덩어리의 대표 원형을 표시하였다. 대체적으로 평균 입자간 거리로 얻어진 대표 원형은 입자부피의 대부분을 포함하는 것으로 나타나며 재배열과도 직접적으로 비례하는 관계가 있다. 이것은 재배열에 따른 입자의 특성을 대표하는 특성으로도 사용되어질 수 있다.

3. 결과 및 고찰

3.1. 입자적층

입자적층은 동일한 크기를 가진 입자들이 서로 다른 재배열 수에 따라 적층되도록 하였으며 재배열은 적층시와 적층 후 두 경우 모두에 대해 적용되었다. 입자의 적층밀도는 덩어리의 중심에서부터 외부로 구의 반경을 증가시켜 나가면서 구 내부의 입자의 부피의 비율을 측정하여 계산하였다. Fig. 6은 입자의 서로 다른 재배열

Fig. 5. Particle clusters compared to the sphere drawn with MID radius.

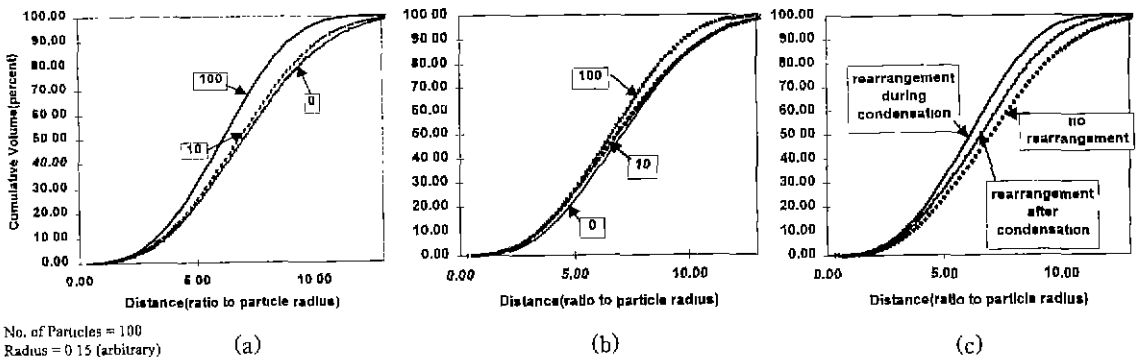


Fig. 6. Cumulative volume at different rearrangement numbers and modes. a) rearrangement during packing, b) rearrangement after packing, c) comparison of two rearrangement modes at same rearrangement.

모드에서 이러한 방식으로 측정된 누적 부피분포를 나타낸 것이다.

Fig. 6(a)와 (b)는 각각 적층시와 적층 후에 재배열이 일어나는 경우의 입자 재배열에 따른 누적 부피분포를 나타낸 것으로, 두 경우 모두에서 입자 재배열에 따라 덩어리의 중심에서 상대적으로 높은 누적 부피값을 보이는 데 이는 덩어리의 내부가 입자 재배열에 의해 치밀해지는 현상을 나타내고 있다. 재배열모드에 따른 영향을 검토하여 볼 때 입자가 적층시 재배열되는 경우가 적층 후 재배열되는 경우보다 덩어리의 적층밀도 증가에 훨씬 효과가 있음을 보여주고 있다. Fig 6.(c)에는 전체 입자들에게 동일한 정도의 재배열이 허용이 되었을 때 누적 부피분포의 변화를 나타내었는데, 동일한 정도의 입자 재배열이 허용되더라도 재배열 모드에 따라 입자의 적층밀도가 달라지게됨을 알 수 있다. 이는 입자의 적층이 완료된 후에는 입자적층시에 형성된 입자구조의 고정화 경향에 의해 재배열의 여지가 줄어들기 때문이다. 이러한 경향을 확인하기 위하여 적층된 입자들의 배위수를 조사하였다. Fig. 7은 Fig. 6(c)의 새가지 입자적층 경우에서 입자들의 배위수를 계산한 결과를 보여주는데 입자가 적층시 재배열할 경우에 내부 입자의 배위

수가 높아짐을 보여주고 있다. Fig. 6(c)의 결과와 비교하여 볼때 재배열에 따라 입자가 치밀해짐을 나타낸다.

Table 2는 내부 입자들의 배위수에 대해서 통계분석을 실시한 결과로서 Table 2에서 보는 바와 같이 덩어리 내부의 평균 배위수가 입자 재배열에 따라 증가하며 적층시 재배열된 경우가 적층 후 재배열된 경우보다 상당히 높은 것으로 나타났다. 그러나 적층시 재배열된 경우의 표준편차 값도 적층 후 재배열된 경우보다 상당히 크게 나타났다. 이러한 결과로 미루어 볼 때 입자의 재배열이 적층 후에 일어난 경우 입자의 구조가 무정형의 망상구조와 가까운 것으로 보이며 적층시 재배열이 일어난 경우는 입자구조가 밀집충진 구조에 많은 결함을 함유한 구조를 가지고 있는 것으로 보여진다.

3.2. 덩어리 적층

덩어리는 입자들과 유사하게 적층하고 재배열한다. 다차원적인 입자의 적층에서 입자간의 재배열효과와 덩어리의 재배열 효과간에 적층밀도에 대한 기여도가 어떠한 상관관계가 있는 지를 알아보기 위하여 입자만 재배열시키고 덩어리는 재배열을 시키지 않은 경우, 덩어리만 재배열시키고 입자는 재배열 시키지 않은 경우와 덩어리와 입자를 모두 재배열시킨 경우를 비교하였다.

Fig. 8은 덩어리들이 적층된 응집체의 증분 부피곡선으로서 입자의 재배열과 덩어리의 재배열의 두 가지의 기여가 전체적인 응집체의 밀도에 거의 비슷한 비율로 기여를 하는 것을 잘 보여주고 있다. 이러한 기여도는 각 덩어리를 구성하는 입자들의 상대적인 빈도에 따라 어느 정도 좌우되지만 일반적인 입도 구성조건에서는 두 기여의 비율이 서로 비교할 만한 정도인 것으로 나타났다. 이러한 결과로 볼 때 입자들은 다차원 입자구조를 형성하면 할수록 각 차원별 기공의 존재로 인하여 입자의 적층밀도는 감소하게 된다. 또한 전체 적층밀도에

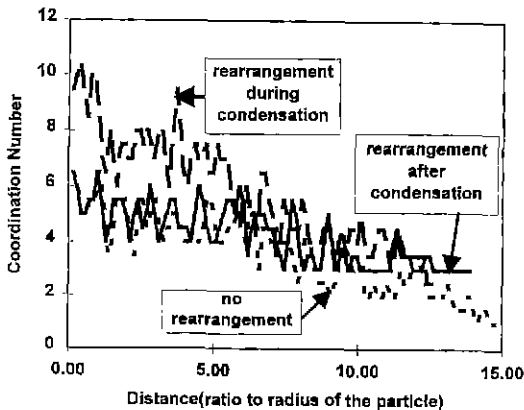


Fig. 7. The distribution of the coordination numbers of particles for different rearrangement modes

Table 2. Average Coordination Numbers(CN) and Standard Deviations(STD) of Rearranged Interior Particles*

CN	No Rearrangement	During Con-densation	After Con-densation
Average	4.8	7.4	5.0
STDN	1.1	1.7	1.0

*The interior 50 particles of the 100 total particles in Fig. 7.

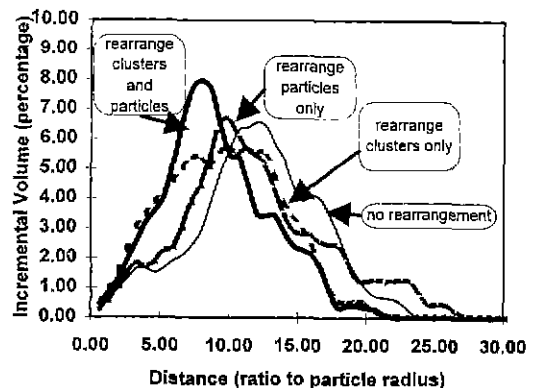


Fig. 8. Particle rearrangement during condensation.

미치는 각 차원별 기공의 기여도는 서로 유사하다.

Fig. 9는 Fig. 8과 달리 응집 후에 재배열에 따른 증분 부피곡선을 보여주며 재배열이 일어나면서 응집이 된 것과 비교해 볼 때 입자의 경우와 마찬가지로 응집 중 재배열이 응집 후 재배열에 비해 적층밀도를 보다 효율적으로 향상시킴을 알 수 있다. 이러한 결과를 토대로 여러 단계의 덩어리로 구성된 응집체에서 적층밀도에 대한 기여는 각 응집 단계별 기여의 합으로서, 적층밀도를 증진시키기 위해서는 응집단계를 가능한 한 줄여야 하며 고정된 응집단계에서는 각 단계별 입자의 재배열에 의한 치밀화가 중요함을 알 수 있다.

Fig. 10은 응집체 내부에 존재하는 덩어리들의 증분 부피분포와 전체 덩어리의 증분 부피분포를 나타낸 것이며 덩어리의 부피분포 곡선과 응집체의 부피분포 곡선이 유사한 형태를 보여주어서 덩어리들이 응집한 다차원 응집체들에서도 덩어리들이 응집체내에 이러한 부피분포를 하고 있음을 추정할 수 있다. 이러한 입자들의 다차원 적층구조가 프랙탈(fractal) 특성을 가지고 있음을 보여주고 있다.

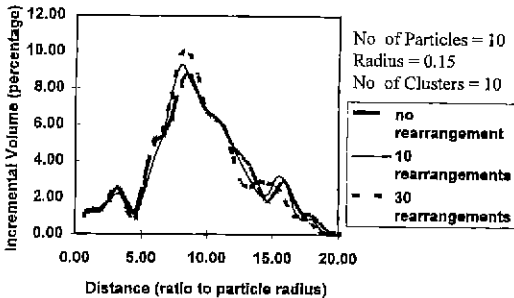


Fig. 9. Incremental volume change with rearrangement time by rearrangement after condensation.

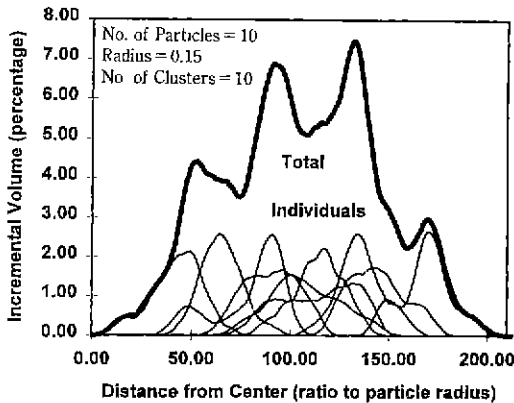


Fig. 10. Incremental volume of individual and total clusters.

3.3. 이성분 입자크기 적층밀도

덩어리내에 서로 다른 크기의 입자간의 비율에 따른 입자적층 효과를 점검하기 위하여 3차원적 이성분 입자크기 컴퓨터 시뮬레이션을 행하였다. 적층부피는 덩어리의 중심에서 입자간 평균거리를 반경으로 하는 구내의 입자 부피를 구하여 계산하였다. 일반적으로 이성분 입자크기 적층에서는 입자반경의 비율과 입자수의 구성 및 재배열 정도 등의 요인들이 덩어리의 밀도에 중요하다. 3차원 입자적층에서의 경계 반경은 2차원 입자적층에서와 상당히 차이가 있다. 3차원 사면체 위치에 입자가 위치하기 위해서는 이 사면체의 표면의 삼각형 입구를 통과해야만 한다. 3차원에서는 입자들이 위치할 수 있는 장소가 복수로 존재하기 때문에 2차원 적층에 비하여 밀도가 떨어지게 된다.

입자반경 비율이 4.5인 경우에 재배열의 정도에 따른 적층밀도를 Fig. 11에 나타내었다. 앞의 그림(Fig. 2)에서 보여준 바와 같이, 2차원에서의 적층은 3차원 입자적층에서 재배열이 없는 경우의 입자적층 결과와 유사한 경향을 나타내었다. 이와 같이 2차원에서의 적층 밀도 감소는 입자 배열의 질서가 무너지기 때문이다. 그러나 이러한 현상은 3차원 적층에서는 입자들이 재배열되면서 사라지게 된다. 이러한 현상은 2차원 입자적층과 3차원 입자적층의 재배열에는 중요한 차이가 존재하기 때문으로 여겨진다. 즉, 재배열시 2차원 입자는 기공의 입구를 완전히 막아버리는 현상이 나타나지만 3차원 입자적층에서는 기공의 입구를 완전히 막기가 실질적으로 불가능하기 때문이다. 일반적인 입자적층의 실험결과는 3차원 입자적층시 재배열이 충분히 일어난 경우와 유사하다.

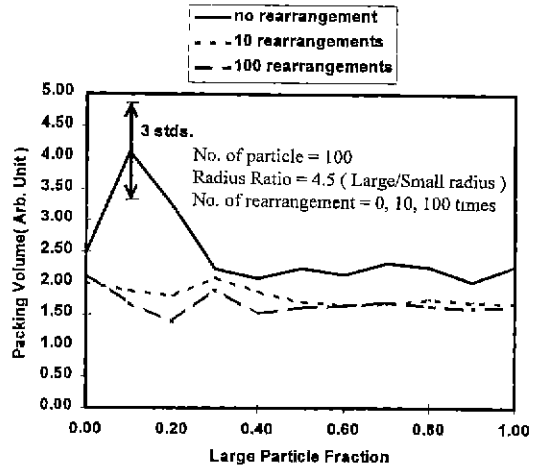


Fig. 11. Binary packing volume in 3-dimension simulation.

이상의 결과로 볼 때 서로 다른 크기의 입자적층을 통해 적층밀도를 증가하려면 입자들은 충분한 재배열을 동반하여야 하고 입자 크기가 기공으로 침투할 수 있도록 충분히 작아야 한다. 또한 Y. Kim Han¹¹⁾의 연구결과와 일반적인 실험실적 연구결과와의 차이성은 입자 재배열로서 설명되어 질 수 있으며 본 고에서 제시된 3차원 입자적층 시뮬레이션 방법으로 해석이 가능하게 되었다.

4. 결 론

기존의 안정상태만을 고려하던 입자적층 방식에 적층과 동시에 재배열이 일어나는 준안정상태의 적층개념을 도입시킴으로써 보다 실질적인 입자적층의 시뮬레이션이 가능하였다. 재배열 방식에서 입자의 적층속도가 재배열에 허용된 시간에 비해 빠를 경우 재배열이 쉽지 않으며 그에 따라 덩어리의 내부구조는 빈 공간이 많이 존재하는 망목구조를 이룰 가능성이 많았고, 그 반대의 경우에는 덩어리의 내부구조가 치밀한 입자구조를 이루게 되었다.

미세 세라믹 분말의 응집현상을 시뮬레이션하기 위하여 다단계 적층개념을 도입한 결과, 실제 분말의 적층밀도는 입자간 또는 덩어리간 기공에 의해 조정되어 질 수 있었으며 전체밀도에 미치는 기여도는 서로 유사한 것으로 나타났다.

3차원 재배열의 경우 기공으로의 투입이 자유롭기 때문에 재배열에 따라 밀도가 증진되는 현상이 나타났으며, 재배열이 없이 서로 다른 크기의 입자가 적층될 경우에는 적층구조의 무질서화로 인하여 밀도가 저하되는 현상이 나타났다.

REFERENCES

1. D. J. Sordelet and M. Akin, "Sintering of Monosized, Spherical Ytria Powders," *J. Am. Ceram. Soc.*, **71**(12), 1148-1153 (1988).
2. R. M. German, "Structure and Properties of Agglomerates," 53-88 in *Particle Packing Characteristics*. Metal Powder Ind. Fed., Princeton, New Jersey, 1989.
3. F. F. Lange, "Sinterability of Agglomerated Powders," *J. Am. Ceram. Soc.*, **67**(2) 83-89 (1984).
4. K. Haberk, "Characteristics and Sintering Behavior of Zirconic Ultrafine Powders," *Ceramics Int.*, **5**, 148-154 (1979).
5. C. C. Furnas, "Grinding Aggregates I-Mathematical Relations for Beds of Broken Solids of Maximum Density." *Ind. Eng. Chem.*, **23**(9) 1052-1058 (1931).
6. R. K. McGeary, "Mechanical Packing of Spherical Particles," *J. Am. Ceram. Soc.*, **44**(10) 513-522 (1961).
7. G. Mason, "General Discussion," *Discuss. Faraday Soc.*, **43**, 75-76 (1967).
8. E. M. Tory, N. A. Cochrane and S. R. Waddell, "Anisotropy in Simulated Random Packing of Equal Spheres," *Nature*, **220**, 1023-1024 (1968).
9. I. L. Davis and R. G. Carter, "Random Particle Packing by Reduced Dimension Algorithms," *J. Appl. Phys.*, **67**(2) 1022-1029 (1990).
10. C. Hogue and D. Newland, "Efficient Computer Simulation of Moving Granular Particles," *Powder Technology*, **78**, 51-66 (1994).
11. Y. Kim Han, "Computer Simulation for Packing of Particles in Two Dimensional System," M.Sc. Thesis. Iowa State University at Ames, 1991.
12. T. M. Hare, "Statistics of Early Sintering and Rearrangement by Computer Simulation," 77-93 in *Sintering Processes*. Materials Science Research, Vol. **13**, Edited by G. C. Kucynski, Plenum, New York, 1980.