

<논 문>

고차 주파수응답함수를 이용한 비선형시스템의 매개변수 추정

Use of Higher Order Frequency Response Functions
for Non-Linear Parameter Estimation

이 건 명*

Gun-Myung Lee

(1996년 10월 30일 접수 ; 1997년 3월 15일 심사완료)

Key Words : Non-Linear System(비선형계), Parameter Estimation(매개변수 추정), Higher Order Frequency Response Function(고차 주파수응답함수), Sinusoidal Excitation(정현파가진), Optimization Technique(최적화기법)

ABSTRACT

Presented is a method to estimate system parameters of a system with polynomial non-linearities from the measured higher order frequency response functions. Higher order FRFs can be measured on some restricted regions by sinusoidally exciting a non-linear system with various input amplitudes and measuring the response component at the excitation frequency. These higher order FRFs can be expressed in terms of system parameters, and the system parameters can be estimated from the measured FRFs. Since the expressions for higher order FRFs are complicated, system parameters can be estimated from them using an optimization technique. The present method has been applied to a simulated single degree of freedom system with non-linear stiffness and damping, and has estimated accurate system parameters.

1. 서 론

기계시스템의 비선형특성 해석을 위하여 여러가지 방법이 활용되고 있는데, 이들은 Nyquist 선도의 찌그러짐(distortion)⁽¹⁾, Hilbert 변환⁽²⁾, 복원력면(restoring force surface)⁽³⁾, NARMAX⁽⁴⁾, 고차 주파수응답함수(higher order frequency response function)^(5~8), DPE(direct parameter estimation)⁽⁹⁾를 이용한 방법등이다. 이들중 고차 FRF(frequency response function)는 그 개념이 선형시스템의 FRF와 유사하여 비선형시스템의 해석방법으로서 주목을 받고

있으며 고차 FRF를 측정하는 여러가지 방법이 개발되었다^(10~13). 그러나 측정된 고차 FRF로부터 비선형특성을 정량적으로 해석하는 연구는 거의 이루어

어지지 않고 있다.

다항식으로 표시되는 비선형성을 갖는 시스템이 정현파가진을 받을 때 그 응답의 가진주파수 성분은 가진력진폭과 고차 FRF의 무한급수로 나타낼 수 있다. 가진력의 진폭을 변화시켜가며 응답을 측정하고, 고차항을 무시하면 고차 FRF의 값을 근사적으로 구할 수 있다. 고차 FRF는 비선형 시스템의 매개변수의 식으로 나타낼 수 있으므로 이로부터 비선형 매개변수를 추정할 수 있다. 본 논문에서는 비선형강성과 비선형감쇠를 갖는 1자유도 시물레이션 시스템에 이 매개변수 추정법을 적용함으로써 이 방법의 가능성을 고찰하였다.

2. 비선형 매개변수 추정법

2.1 Volterra 급수와 고차 주파수응답함수

다항식으로 표시되는 비선형성을 갖는 시스템의

*정회원, 경상대학교 기계공학과, 항공기부품기술연구소

입의 입력 $x(t)$ 에 대한 응답 $y(t)$ 는 Volterra 급수⁽¹⁴⁾를 이용하여 다음과 같은 무한급수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) x(t-\tau_1) d\tau_1 \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) \\
 &\quad \quad x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots \\
 &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \dots x(t-\tau_1) \\
 &\quad \quad \dots x(t-\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n + \dots \quad (1)
 \end{aligned}$$

윗 식에서 $h_1(\tau_1)$ 은 이 시스템에 대응하는 선형시스템의 충격응답이고, $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ 은 고차의 충격응답으로 생각할 수 있다. 고차 FRF는 고차 충격응답의 다차원 Fourier변환으로 정의된다.

$$\begin{aligned}
 H_n(\omega_1, \dots, \omega_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \\
 &\quad \prod_{i=1}^n e^{-j\omega_i \tau_i} d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (2)
 \end{aligned}$$

위의 정의에 의하여 고차 FRF는 대칭성을 갖는다. 즉 $H_n(\omega_1, \dots, \omega_n)$ 의 값은 자변수 $\omega_1, \dots, \omega_n$ 의 순서에 무관하다.

이 비선형시스템이 정현파가진

$$x(t) = X \cos \omega t = \frac{X}{2} e^{j\omega t} + \frac{X}{2} e^{-j\omega t} \quad (3)$$

을 받으면 식(1)의 각 응답성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) x(t-\tau_1) d\tau_1 \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) \left\{ \frac{X}{2} e^{j\omega(t-\tau_1)} + \frac{X}{2} e^{-j\omega(t-\tau_1)} \right\} d\tau_1 \\
 &= H_1(\omega) \frac{X}{2} e^{j\omega t} + H_1(-\omega) \frac{X}{2} e^{-j\omega t} \\
 y_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
 &= H_2(\omega, \omega) \left(\frac{X}{2} \right)^2 e^{j2\omega t} + 2H_2(\omega, -\omega) \left(\frac{X}{2} \right)^2 \\
 &\quad + H_2(-\omega, -\omega) \left(\frac{X}{2} \right)^2 e^{-j2\omega t} \\
 y_3(t) &= \dots \quad (4)
 \end{aligned}$$

따라서 전체 응답은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= H_1(\omega) \frac{X}{2} e^{j\omega t} + H_1(-\omega) \frac{X}{2} e^{-j\omega t} \\
 &\quad + H_2(\omega, \omega) \left(\frac{X}{2} \right)^2 e^{j2\omega t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2H_2(\omega, -\omega) \left(\frac{X}{2} \right)^2 \\
 &+ H_2(-\omega, -\omega) \left(\frac{X}{2} \right)^2 e^{-j2\omega t} \\
 &+ H_3(\omega, \omega, \omega) \left(\frac{X}{2} \right)^3 e^{j3\omega t} \\
 &+ 3H_3(\omega, \omega, -\omega) \left(\frac{X}{2} \right)^3 e^{-j\omega t} \\
 &+ 3H_3(\omega, -\omega, -\omega) \left(\frac{X}{2} \right)^3 e^{-j\omega t} \\
 &+ H_3(-\omega, -\omega, -\omega) \left(\frac{X}{2} \right)^3 e^{-j3\omega t} + \dots \quad (5)
 \end{aligned}$$

수식을 간략하게 하기 위하여 본 논문에서는 자변수 ω 가 $n-i$ 개이고, $-\omega$ 가 i 개인 고차 FRF $H_n(\omega, \dots, \omega, -\omega, \dots, -\omega)$ 를 $H_{n,i}$ 로 나타내기로 한다. 이 기호를 사용하면 식(5)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} H_{n,i} \left(\frac{X}{2} \right)^n e^{j(n-2i)\omega t} \quad (6)
 \end{aligned}$$

2.2 고차 주파수응답함수의 측정

비선형시스템이 정현파가진을 받으면 가진주파수 ω 에서의 응답성분 $Y(\omega)$ 는 식 (5)로 부터 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 Y(\omega) &= XH_1(\omega) + \frac{3}{4}X^3H_3(\omega, \omega, -\omega) \\
 &\quad + \frac{5}{8}X^5H_5(\omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega) + \dots \quad (7)
 \end{aligned}$$

윗 식에서 $Y(\omega)$ 는 가진력진폭 X 의 함수이므로 가진력의 진폭을 변화시켜가며 $Y(\omega)$ 를 측정하고, 고차항을 무시하면 고차 FRF를 근사적으로 구할 수 있다⁽¹⁰⁾. 예를 들면 세개의 서로 다른 가진력진폭 X_1, X_2, X_3 를 사용하여 $Y_1(\omega), Y_2(\omega), Y_3(\omega)$ 를 각각 측정하고, 윗 식의 첫 3항만을 고려하면 다음과 같은 방정식을 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} Y_1(\omega) \\ Y_2(\omega) \\ Y_3(\omega) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_1 & \frac{3}{4}X_1^3 & \frac{5}{8}X_1^5 \\ X_2 & \frac{3}{4}X_2^3 & \frac{5}{8}X_2^5 \\ X_3 & \frac{3}{4}X_3^3 & \frac{5}{8}X_3^5 \end{bmatrix} \times \\
 &\quad \begin{bmatrix} H_1(\omega) \\ H_3(\omega, \omega, -\omega) \\ H_5(\omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega) \end{bmatrix} \quad (8)
 \end{aligned}$$

위의 방정식을 품으로써 $H_1(\omega)$, $H_3(\omega, \omega, -\omega)$ 등을 구할 수 있다.

2.3 고차 주파수응답함수의 표현식

앞에서 설명한 방법으로 측정된 고차 FRF로부터 비선형 매개변수를 추정하기 위하여 비선형시스템의 고차 FRF를 비선형 매개변수의 식으로 나타내고자 한다. 비선형시스템으로 3차 다항식으로 표현되는 강성과 감쇠를 갖는 시스템을 택하였다. 이 시스템이 정현파가진을 받을 때의 운동방정식은 다음과 같다.

$$m\ddot{y}(t) + c_1\dot{y}(t) + c_2\dot{y}(t)^2 + c_3\dot{y}(t)^3 + k_1y(t) + k_2y(t)^2 + k_3y(t)^3 = \frac{X}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (9)$$

윗식에 식 (5)를 대입하고, 조화탐사법(harmonic probing method)⁽⁵⁾을 사용하면 모든 고차 FRF의 표현식을 구할 수 있다. 예를 들면 양변에 있는 $(\frac{X}{2})e^{j\omega t}$ 항의 계수를 같게 놓음으로써

$$H_1(\omega) = \frac{1}{k_1 - m\omega^2 + jc_1\omega} \quad (10)$$

를 얻고, $(\frac{X}{2})^2 e^{j2\omega t}$ 항의 계수로 부터

$$H_2(\omega, \omega) = H_1(2\omega)H_1(\omega)^2 [c_2\omega^2 - k_2] \quad (11)$$

$(\frac{X}{2})^2$ 항의 계수로 부터

$$H_2(\omega, -\omega) = -\frac{1}{k_1}H_1(\omega)H_1(-\omega) [c_2\omega^2 + k_2] \quad (12)$$

$(\frac{X}{2})^3 e^{j\omega t}$ 항의 계수로 부터

$$H_3(\omega, \omega, -\omega) = \frac{1}{3}H_1(\omega)^3H_1(-\omega) [(-4c_2^2\omega^4 + 2c_2k_2\omega^2 + 2k_2^2)H_1(2\omega) + \frac{4k_2}{k_1}(c_2\omega^2 + k_2) - 3(k_3 + jc_3\omega^3)] \quad (13)$$

를 얻는다. 이와 같은 방법으로 모든 고차 FRF의 표현식을 구할 수 있다. 앞에서 유도된 식들을 살펴 보면 측정된 $H_1(\omega)$ 로 부터 선형 매개변수 m, c_1, k_1 를 구하고, $H_3(\omega, \omega, -\omega)$ 로 부터 비선형 매개변수 c_2, k_2, c_3, k_3 를 구할 수 있음을 알 수 있다.

2.4 매개변수의 추정

여러가지 진폭의 가진력을 사용하여 측정된 H_1

(ω) 와 $H_3(\omega, \omega, -\omega)$ 로부터 시스템 매개변수를 구하는 방법은 다음과 같다. 선형 매개변수 m, c_1, k_1 을 구하기 위하여 식 (10)으로부터 다음과 같은 식을 쓸 수 있고,

$$\begin{bmatrix} -\omega_1^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ -\omega_2^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Re}[H_1(\omega_1)^{-1}] \\ \text{Im}[H_1(\omega_1)^{-1}] \\ \text{Re}[H_1(\omega_2)^{-1}] \\ \text{Im}[H_1(\omega_2)^{-1}] \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (14)$$

이 식은 미지수의 갯수보다 방정식의 갯수가 많은 경우이므로 특이값분리(singular value decomposition)법을 이용하여 m, c_1, k_1 를 구할 수 있다.

식 (13)은 매개변수 c_2, k_2, c_3, k_3 의 비선형식이므로 이 식으로부터 매개변수들을 구하기 위하여 최적화기법을 도입하였다. 즉 식 (13)의 좌변과 우변의 차의 크기의 제곱을 목적함수로 하고 이 함수값이 최소가 되도록 매개변수를 결정하는 방법을 사용하였다. 이때 사용한 목적함수는 아래와 같다.

$$f(c_2, c_3, k_2, k_3) = \sum_{\omega} [\text{Re}[H_1(2\omega)](-4c_2^2\omega^4 + 2c_2k_2\omega^2 + 2k_2^2) + \frac{4k_2}{k_1}(c_2\omega^2 + k_2) - 3k_3 - \text{Re}[\frac{3H_3(\omega, \omega, -\omega)}{H_1(\omega)^3H_1(-\omega)}]]^2 + \{ \text{Im}[H_1(2\omega)](-4c_2^2\omega^4 + 2c_2k_2\omega^2 + 2k_2^2) - 3c_3\omega^3 - \text{Im}[\frac{3H_3(\omega, \omega, -\omega)}{H_1(\omega)^3H_1(-\omega)}]]^2 \} \quad (15)$$

비선형 목적함수의 최소점을 찾는 방법에는 여러가지 방법이 개발되어 있으나 그중에서 일반적인 목적함수에 성능이 우수하다고 알려진 Fletcher-Powell 방법⁽¹⁵⁾을 사용하였다. 이 방법을 사용할 때는 목적함수를 구성하는 변수의 초기치를 입력하여야 하고, 목적함수의 도함수를 계산하여야 한다. 그러나 본 논문에서는 간략하게 하기 위하여 식 (15)의 c_2, k_2, c_3, k_3 각각에 대한 편미분식을 수록하는 것은 생략하기로 한다.

3. 매개변수 추정법의 적용

본 매개변수 추정법의 가능성을 평가하기 위하여 이 방법을 비선형강성과 비선형감쇠를 갖는 1자유도 시뮬레이션 시스템에 적용하였다. 식 (9)와 같은 비선형계가 정현파가진을 받을 때의 응답을 Runge

-Kutta방법으로 구하고, 이 응답을 FFT처리하여 가진주파수 ω 에서의 응답성분 $Y(\omega)$ 를 구하고, 가진력진폭을 변화시켜가며 이 과정을 반복하였다. 사용된 가진주파수는 5.0Hz부터 0.2Hz간격으로 25Hz까지이며 시뮬레이션에 사용된 계의 매개변수는 $m = 1\text{kg}$, $c_1 = 20\text{Ns/m}$, $c_2 = 100\text{Ns}^2/\text{m}^2$, $c_3 = 10^4\text{Ns}^3/\text{m}^3$, $k_1 = 10^4\text{N/m}$, $k_2 = 10^7\text{N/m}^2$, $k_3 = 5 \times 10^9\text{N/m}^3$ 이다.

이 시스템을 서로 다른 세 진폭 $X = 0.3, 0.6, 0.9\text{N}$ 으로 각각 가진하였을 때 각 진폭에 대한 선형화된 주파수응답함수, $Y(\omega)/X(\omega)$ 를 Fig. 1에 나타내었다. 이 그림은 가진력의 진폭에 따라 선형화된 주파수응답함수가 변화하는 비선형 시스템의 특성을 나타내고 있다. 각 진폭에 대한 $Y(\omega)$ 로부터 식(7)에서 첫 3항만을 고려하여 $H_1(\omega)$, $H_3(\omega, \omega, -\omega)$, $H_5(\omega, \omega, \omega, -\omega, -\omega)$ 를 근사적으로 구하고, $H_1(\omega)$ 와 $H_3(\omega, \omega, -\omega)$ 로부터 시스템의 매개변수를 구하였다. Fig. 2는 이와 같은 방법으로 구한 $H_3(\omega, \omega, -\omega)$ 를 나타내고 있고, 추정된 매개변수는 Table 1에 수록되어있다. 매개변수들은 c_2 를 제외하고는 정확한 값이 추정되었다. Fletcher-Powell방법에서 사용한 c_2, k_2, c_3, k_3 의 초기치는 각각 $1.0\text{E}4$ 이었고, 초기치를 각각 100으로 하였을 때도 동일한 매개변수가 추정되었다. 가진력진폭 $X = 0.1, 0.2, 0.3\text{N}$ 을 사용하여 앞의 과정을 반복하였을 때의 매개변수 추정결과가 Table 1에 함께 수록되어있다. 이 표로부터 가진력의 진폭이 작을 때에는 매우 정확한 매개변수가 추정됨을 알 수 있고, 가진력의 진폭이 커짐에 따라 추정된 매개변수의 정확도가 떨어짐을 알 수 있다.

본 매개변수 추정법은 가진력이 커서 점프현상과 같이 시스템의 비선형특성이 강하게 나타나는 경우

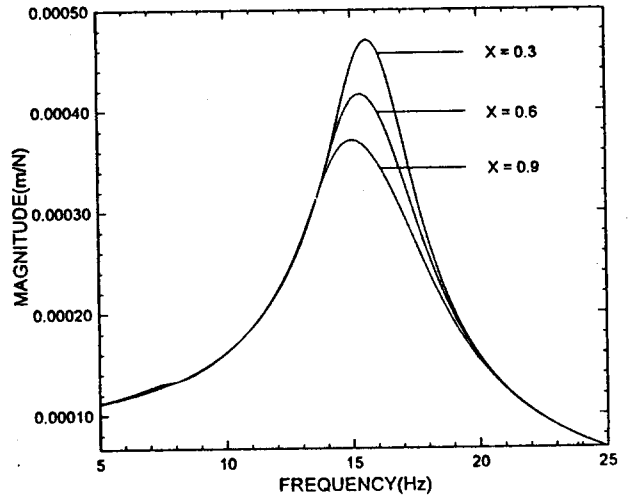


Fig. 1 Linearized frequency response functions of the non-linear system for 3 different excitation amplitudes.

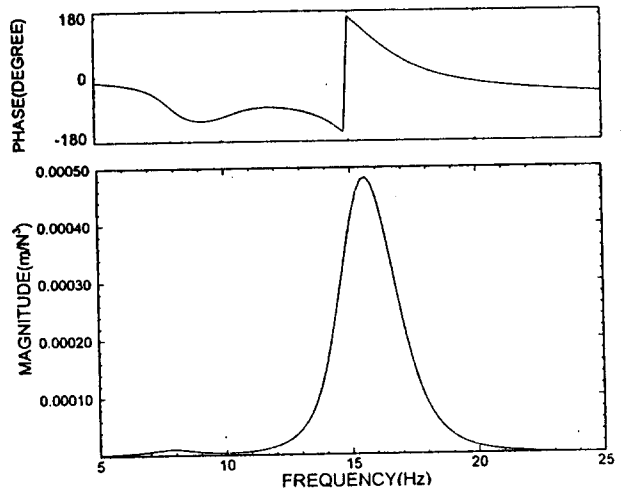


Fig. 2 $H_3(\omega, \omega, -\omega)$ of the non-linear system.

Table 1 Estimated parameters of the non-linear stiffness and damping system using two different sets of excitation amplitudes.

Pparameter	Exact value	Estimated value using $X = 0.3, 0.6, 0.9$	Estimated value using $X = 0.1, 0.2, 0.3$
m	1.0	0.99999	0.99999
c_1	20.0	20.036	20.000
k_1	$1.0\text{E}4$	$0.99958\text{E}4$	$0.99999\text{E}4$
c_2	100.0	139.78	100.03
c_3	$1.0\text{E}4$	$0.98664\text{E}4$	$0.99993\text{E}4$
k_2	$1.0\text{E}7$	$1.0003\text{E}7$	$1.0000\text{E}7$
k_3	$5.0\text{E}9$	$5.0952\text{E}9$	$5.0009\text{E}9$

에는 적용하기가 어렵다. 그 이유는 가진력의 진폭이 어느 한도이상 커지면 식 (7)의 무한급수가 발산하기 때문이다. Duffing 진동자의 경우 주파수응답함수에 점프현상을 야기하는 가진력 진폭의 절반 이하의 값에서 이미 이 무한급수는 발산을 한다.^(16,17)

추정된 매개변수의 정확도를 평가하는 방법으로 시뮬레이션에 의하여 구한 $Y(\omega)/X(\omega)$ 와, 추정된 매개변수로부터 식 (7)을 이용하여 예측한 $Y(\omega)/X(\omega)$ 를 비교하는 방법을 사용하였다. 식 (7)의 무한급수는 차수(order)가 19인 $H_{19}(\omega, \dots, -\omega)$ 항까지만 포함하였고, 추정된 매개변수에 대응하는 고차 FRF는 2.3절에서 설명한 방법에 의하여 계산하였다. Fig. 3는 가진력진폭 $X=0.3\text{ N}$ 일 때 시뮬레이션에 의한 FRF와 식 (7)에 의한 FRF가 정확하게 일치함을

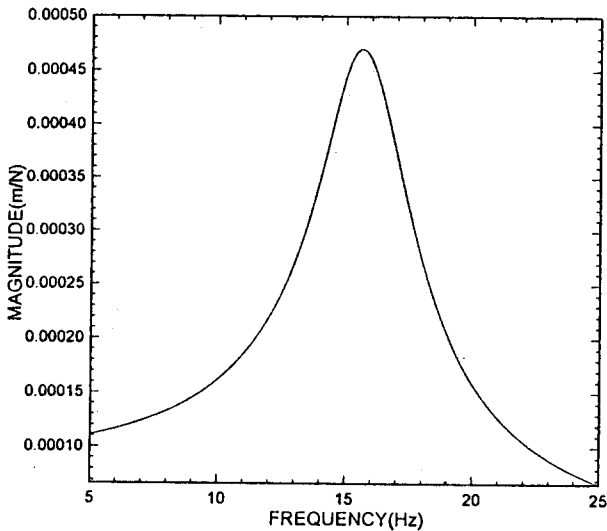


Fig. 3 Agreement of the simulated linearized FRF and the synthesized one of the non-linear system when $X=0.3\text{ N}$.

을 보이고 있다. 추정된 매개변수가 아주 정확하지는 않았음을 상기하면 정확한 매개변수가 추정되지 않았더라도 추정오차가 작을 경우에는 두 FRF가 일치함을 알 수 있다. $X=0.6\text{ N}$ 일 때는 Fig. 4에서 보이는 바와 같이 두 FRF가 고유진동수부근에서 일치하지 않고 있는데 이는 가진력의 진폭이 식 (7)의 무한급수의 수렴반경을 벗어나서 무한급수가 수렴하지 않기 때문이다⁽¹⁶⁾.

강성과 감쇠 중 하나만이 비선형인 계에 식 (9)의 모형을 가정하고 시스템 매개변수를 추정하는 경우를 고찰하기 위하여 강성만이 3차 다항식으로 나타나는 계를 다루었다. 이 계의 매개변수는 $c_2=c_3=0$ 인 것을 제외하면 앞에서 다루었던 계와 동일하다. 서로 다른 세 가진력진폭 $X=0.2, 0.4, 0.6\text{ N}$ 을 사

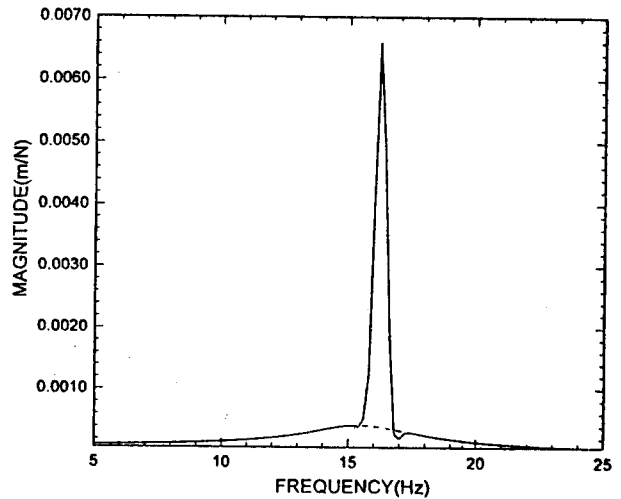


Fig. 4 Comparison of the simulated and synthesized FRFs of the non-linear system when $X=0.6\text{ N}$.

Table 2 Estimated parameters of the non-linear stiffness system and relative magnitudes of the terms including those parameters.

Parameter	Exact value	Estimated value	Maximum value of the term including the parameter
m	1.0	1.0000	3.0
c_1	20.0	19.995	0.6
k_1	1.0E4	1.0000E4	3.0
c_2	0	-4.5808	0.4123E-2
c_3	0	6.4574	0.1743E-3
k_2	1.0E7	1.0002E7	0.9002
k_3	5.0E9	4.9877E9	0.1347

용하여 추정된 매개변수를 Table 2에 수록하였고, 정확한 매개변수가 추정되었음을 알 수 있다. 이 때 c_2 와 c_3 의 값은 작기는 하나 정확하게 0은 아니다. 식 (9)에서 추정된 매개변수를 포함하는 항의 상대적인 크기를 비교하기 위하여 식 (9)의 응답을 다음과 같이 근사적으로 가정하였다.

$$y(t) = X|H_1(\omega)|\cos(\omega t - \phi) \quad (16)$$

$\omega = \omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = 100 \text{ rad/s}$ 에서 $|H_1(\omega_n)| = \frac{1}{c_1\omega_n} = 0.0005$ 이므로 $X = 0.6 \text{ N}$ 일 때 $\omega = \omega_n$ 에서 계산한 식 (9)의 각 항의 최대값을 Table 2에 수록하였다. 이 표로부터 c_2 와 c_3 를 포함하는 항의 크기는 다른 항에 비하여 상대적으로 매우 작고, 따라서 무시할 수 있으므로 해석한 계는 선형감쇠와 3차강성을 갖는 계임을 알 수 있다. 이러한 방법을 사용함으로써 계의 특성을 모르는 경우에도 식 (9)의 모형을 적용하여 비선형 매개변수를 추정할 수 있다.

4. 결 론

Volterra급수로 나타낼 수 있는 비선형 시스템이 정현과가진을 받을 때의 응답은 가진력진폭과 고차 FRF의 무한급수로 나타난다. 따라서 가진력진폭을 변화시켜가며 응답을 측정하고 고차항을 무시함으로써 선형 FRF인 $H_1(\omega)$ 와 함께 특정의 고차 FRF를 근사적으로 구할 수 있다. 이들 FRF 중 $H_1(\omega)$ 로부터 선형 매개변수를, 그리고 $H_3(\omega, \omega, -\omega)$ 로부터 비선형 매개변수를 추정할 수 있다. $H_3(\omega, \omega, -\omega)$ 는 비선형 매개변수의 복잡한 식으로 나타나므로 이로부터 비선형 매개변수를 추정할 때는 최적화 기법을 이용하였다.

본 비선형 매개변수 추정방법을 비선형강성과 비선형감쇠를 갖는 시뮬레이션 시스템에 적용한 결과 가진력의 진폭이 작을 때에는 매우 정확한 매개변수가 추정되었고, 가진력의 진폭이 커짐에 따라 추정된 매개변수의 정확도가 떨어졌다. 이처럼 본 방법은 가진력의 진폭이 커서 점프현상과 같이 비선형특성이 강하게 나타나는 경우에는 적용하기가 어렵다.

추정된 매개변수의 정확도를 평가하기 위하여 추정된 매개변수로 부터 시스템의 고차 FRF를 계산하고, 이 고차 FRF의 무한급수로 나타나는 시스템 응답을 근사적으로 구한 다음 이를 시뮬레이션으로 구한 시스템응답과 비교하는 방법을 사용하였다. 그 결과 가진력진폭이 작을 경우에는 두 가지 방법으로

구한 시스템응답이 정확히 일치하나, 가진력진폭이 클 경우에는 정확한 매개변수가 추정되었음에도 고차 FRF의 무한급수가 발산함으로써 두 응답이 일치하지 않았다.

강성과 감쇠중 하나만이 비선형인 계에 일반적인 비선형 모형을 적용하였을 경우에는 운동방정식중 추정된 매개변수를 포함하는 각 항의 상대적인 크기를 비교하여 크기가 작은 항은 무시함으로써 비선형성의 종류를 파악할 수 있다.

참 고 문 헌

- (1) Tomlinson, G. R., 1980, "An Analysis of the Distortion Effects of Coulomb Damping on the Vector Plots of Lightly Damped Systems," Journal of Sound and Vibration, Vol. 71, No. 3, pp. 443~451.
- (2) Simon, M., and Tomlinson, G. R., 1984, "Use of the Hilbert Transform in Modal Analysis of Linear and Non-linear Structures," Journal of Sound and Vibration, Vol. 96, No. 4, pp. 421~436.
- (3) Masri, S. F., and Caughey, T. K., 1979, "A Non-parametric Identification Technique for Non-linear Dynamic Problems," Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, pp. 433~447.
- (4) Billings, S. A., Tsang, K. M., and Tomlinson, G. R., 1988, "Application of the NARMAX Method to Non-linear Frequency Response Estimation," Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference, pp. 1~6.
- (5) Bedrosian, E., and Rice, S. O., 1971, "The Output Properties of Volterra Systems Driven by Harmonic and Gaussian Inputs," Proceedings of the IEEE, Vol. 59, pp. 1688~1707.
- (6) Gifford, S. J., and Tomlinson, G. R., 1989, "Recent Advances in the Application of Functional Series to Non-linear Structures," Journal of Sound and Vibration, Vol. 135, pp. 289~317.
- (7) Peyton Jones, J. C., and Billings, S. A., 1990, "Interpretation of Non-linear Frequency Response Functions," International Journal of Control, Vol. 52, pp. 319~346.
- (8) Storer, D. M., and Tomlinson, G. R., 1993, "Recent Developments in the Measurement and Interpretation of Higher Order Transfer Func-

- tions from Non-linear Structures," Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 7, No. 2, pp. 173~189.
- (9) Mohammad, K. S., Worden, K., and Tomlinson, G. R., 1992, "Direct Parameter Estimation for Linear and Non-linear Structures," Journal of Sound and Vibration, Vol. 152, No. 3, pp. 471~499.
- (10) Frank, W. A., 1994, "A Note on Higher Order Transfer Functions," Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 8, No. 1, pp. 109~111.
- (11) Boyd, S., Tang, Y. S., and Chua, L. O., 1983, "Measuring Volterra Kernels," IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 30, No. 8, pp. 571~577.
- (12) Kim, K. I., and Powers, E. J., 1988, "A Digital Method of Modeling Quadratically Nonlinear Systems with a General Random Input," IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 36, No. 11, pp. 1758~1769.
- (13) Powers, E. J., Im, S., Kim, S. B., and Tseng, C.-H., 1993, "Frequency-domain Volterra Kernel Estimation via Higher-order Statistical Signal Processing," Proceedings of the 27th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, pp. 446~450.
- (14) Volterra, V., 1959, Theory of Functionals and of Integral and Integrodifferential Equations, Dover, New York.
- (15) Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P., 1992, Numerical Recipes, Cambridge University Press, Chap. 10.
- (16) 이진명, Tomlinson, G. R., 1995, "Volterra 급수로 나타낸 비선형시스템 주파수응답함수의 수렴 특성," 대한기계학회논문집, 제19권, 제8호, pp. 1901~1906.
- (17) Tomlinson, G. R., Manson, G., and Lee, G. M., 1996, "A Simple Criterion for Establishing an Upper Limit to the Harmonic Excitation Level of the Duffing Oscillator Using the Volterra Series," Journal of Sound and Vibration, Vol. 190, No. 5, pp. 751~762.