

< 논 문 >

원판이 결합된 외팔 원통셀의 고유진동 특성

Free Vibration Analysis of the Cantilevered Circular Cylindrical Shells Combined with Circular Plates at Axial Positions

임 정 식* · 이 영 신** · 손 동 성***

Jeong-Sik YIM, Young Shin-Lee and Dong-Sung Sohn

(1997년 1월 31일 접수; 1997년 3월 20일 심사완료)

Key Words : 동적응답법 (Receptance method), 외팔 원통셀, 보 함수 (Beam function), 모달 확장법, 모드 기여계수, 조합 원통셀

ABSTRACT

A theoretical formulation for the analysis of free vibration of clamped-free cylindrical shells with plates attached at arbitrary axial position(s) was completed and it was programmed to get the numerical results which yield natural frequencies and mode shape of the combined system of the plate and the shells. The frequencies and mode shapes from theoretical calculation were compared with those of commercial finite element code, ANSYS. In order to validate the theory, modal test was also performed by impact test and FFT analysis. The results shows good agreement with those of ANSYS and test results in frequencies and mode shapes. The method developed herein is likely to be used for the analysis of the free vibration of the clamped-free circular cylindrical shells with any kinds of lids such as hollow circular plates, conical shells, spherical shells, or semi-spherical shells.

기 호 설 명

a : 셀, 원판의 반경
 A, B, C : x, y, z 방향 변위함수의 미지수
 A_1, A_2 : 셀 변수
 E, E_p : 셀, 원판의 영률
 $f_i, i=1,2,3$: 셀/원판 결합점에서의 동적하중
 f_i^* : 축방향 위치 x^* 에서 결합점의 동적하중
 F_3, F_3^p, F_3^s : 셀/원판 결합점에서의 횡방향 하중, 원판, 셀에 작용하는 하중
 h_p, h_s : 원판, 셀의 두께
 i : 셀의 진동모드 지수, $i=1, 2, 3$
 I_n, I_{n+1} : 수정 Bessel 함수
 J_n, J_{n+1} : Bessel 함수

k : 모드 지수
 L : 셀의 길이
 M_1, M_1^p, M_1^s : 원판 결합점에서의 모멘트, 원판, 셀에 작용하는 모멘트
 M_p : 원판의 질량
 M_r^p : 원판에 작용하는 모멘트
 n, \bar{n} : 원주방향 파수
 r : 원판의 반경방향 좌표
 t : 시간
 T_1, T_2, T_n : 셀변수 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 방향으로의 모멘트
 U_3^p : 원판의 횡방향 변위
 $u_i, i=1,2,3$: i 방향 셀의 변위
 U_{ik} : i, j 좌표방향의 k 모드 변위
 u_3^p, u_r^p : 원판의 횡방향 변위
 u_3^p, u_3^s : 원판, 셀의 횡방향 변위
 U_{3mn}^p : 원판의 m, n 모드의 횡방향 변위
 v, V : 셀의 접선방향 변위

*정회원, 한국원자력연구소(433)

**정회원, 충남대학교 공과대학 기계설계공학과

***한국원자력연구소

w, W	: 셀의 반경방향 변위
x, x^*	: 셀의 축방향 좌표, 축방향 원판결합 점
X_{A_i}, X_{B_i}	: 계 A, B의 변위벡터
z	: 셀 표면에 수직인 좌표
α_1, α_2	: 셀의 일반좌표
α_{ij}	: 셀의 동적응답(Receptance)
β_{ij}	: 원판의 동적응답
β^S	: 셀의 축방향 기울기
λ	: 원판의 고유치
$\phi, \phi(x), \phi', \phi'(x)$: 보함수, 보함수의 미분
Φ_k	: 위상각
η_k	: 모드기여계수
ζ_k	: 댐핑계수
ρ, ρ_p	: 셀 및 원판의 질량밀도
θ	: 셀의 원주방향 좌표
ω	: 입력의 진동수
ω_k	: k 모드의 구조물 진동수
ω_{imn}	: m, n 모드의 진동수

1. 서 론

원통셀은 강도/중량의 비가 높은 구조적 특징에 의해 항공, 원자력, 조선, 석유화학공업, 건축 등에 많이 이용된다⁽¹⁾. 한쪽 경계가 고정되고 다른 한쪽이 자유인 원통셀에 원판이 결합된 구조물은 주변에서 흔히 볼 수 있는 형상의 구조물로서 저장용기로 많이 활용되고 사용 목적에 따라 중간 중간에 구획을 두어 여러 개의 원판이 원통셀의 축방향으로 결합되기도 한다.

두 조합구조물의 고유진동해석에 사용할 수 있는 동적응답법(receptance method)은 Faulkner⁽²⁾에 의해 도입되었고 Soedel⁽³⁾에 의해 소개되었다. 또 이의 응용 연구로서 양단이 단순지지 되고 축방향 임의 위치에 원판이 결합된 경우의 연구가 Huang과 Soedel⁽⁴⁾에 의해 발표되었고 축방향에 다수의 원판이 결합된 경우도 발표되었다⁽⁵⁾. 양단 단순지지 경계 조건에서 원통셀에 원판이 결합된 구조물에 대한 강제진동 연구는 Huang⁽⁶⁾에 의해 연구되었으며, Azimi⁽⁷⁾는 다각형의 덕트에 대해 역시 동적응답법을 사용하여 고유진동해석을 수행하였고, Mead⁽⁸⁾는 일차원의 스프링-질량계에 동적응답법을 적용한 연구를 발표하였다.

참고문헌 (4)~(6)에서 보는 것과 같이 원통셀 경계조건이 대칭이 되는 양단 단순지지 경계 조건에서는 원통셀의 변위함수 가정이 경계조건을 만족하는

대칭 함수를 사용할 수 있으므로 변위함수의 가정이 비교적 간단한 삼각함수를 사용할 수 있다. 반면에 비대칭 경계조건을 갖는 외팔 원통셀 상단 또는 축방향 임의 위치에 원판이 결합된 구조물의 고유진동해석에 대해서는 경계조건을 만족하는 변위함수의 가정이 복잡하여 이러한 구조물에 대한 해석적 연구 결과가 발견되지 않고 있다. 따라서 고정-자유 경계 조건 원통셀의 축방향 임의 위치에 하나 또는 두 개 이상의 원판이 결합된 구조물에 대하여 변위함수로서 보함수(beam function)을 사용하고 모달확장법과 동적응답법을 적용하여 고유진동해석을 수행할 수 있는 수식의 전개를 통하여 개인용 컴퓨터에서도 간단하게 고유진동해석을 할 수 있는 수치적인 방법 및 프로그램을 개발하였다. 개발된 프로그램의 수치적 타당성을 유한요소해석 코드 및 진동시험으로 확인한 후 이 프로그램을 이용하여 원판이 결합된 외팔 원통셀의 고유진동 특성 연구로서 원판의 두께 및 원판의 결합위치, 반경/길이 비가 조합원통셀 구조물의 고유진동 특성에 주는 영향을 평가하였다.

2. 이론적 배경

2.1 조합구조물의 진동방정식

Fig. 1은 원통셀의 좌표계와 변위계를 보이며, Fig. 2는 원통셀에 두 개의 원판이 축방향 임의 위치에 결합되어 있는 조합구조물 결합경계에서의 변위/기울기 및 하중/모멘트를 나타낸다. 원판이 셀의 축방향 임의 위치에 결합된 구조물에서는 진동에 의해 결합부위에서 각 좌표방향 3개 및 접선방향으로 2개의 변위량과 이에 상응하는 5개의 하중 및 모멘트가 나타나는데 이들 하중과 모멘트는 원판의 결합부위인 원통셀의 원주방향에 걸쳐 작용하므로 선 하중(line load) 또는 선 모멘트(line moment)이다. 한 구조물에서 하중과 변위 관계는 식 (1)과 같이 쓸 수 있다.

$$\{X_{A_i}\} = \{a_{ij}\}^T \{F_{A_j}\} \quad (1)$$

여기서, a_{ij} (i, j=1, 2, 3, 4, 5)는 독립된 계 A의 응답(response)이다. 또 독립계 B에 대한 하중과 변위 관계는 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\{X_{B_i}\} = \{\beta_{ij}\}^T \{F_{B_j}\} \quad (2)$$

여기서, β_{ij} (i, j=1, 2, 3, 4, 5)는 독립계 B의 응답이다.

두 독립계가 연결되어 있고 외력이 없다면 하중과

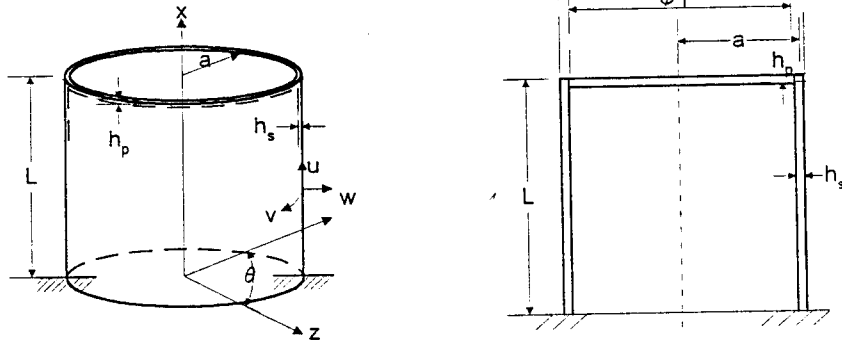


Fig. 1 Coordinates system and notation

변위는 다음과 같다.

$$\{F_{Aj}\} = -\{F_{Bj}\} \quad (3)$$

$$\{X_{Ai}\} = -\{X_{Bi}\} \quad (4)$$

식 (1)~(4)로 부터 다음의 방정식을 얻는다.

$$[\alpha_{ij} + \beta_{ij}]\{F_{Aj}\} = 0 \quad (5)$$

식 (5)에서 $\{F_{Aj}\} = 0$ 이어야 하고 무용 해를 갖지 않기 위한 조건으로부터 다음과 같은 조합 구조물의 진동수 방정식을 얻는다.

$$|\alpha_{ij} + \beta_{ij}| = 0 \quad (6)$$

2.2 원판 결합 외팔 원통셀의 고유진동 해석

(1) 변위의 가정

(i) 동적 주기 하중에 의한 셀의 변위 한 구조물의 변위는 모드 기여 계수와 그 모드에

서의 모달변위를 사용하여 다음과 같이 표현 할 수 있다⁽³⁾.

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) U_{ik}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (7)$$

식 (7)의 모드 기여계수 η_k 는 다음의 모드 기여계수 방정식의 근이다.

$$\ddot{\eta}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = F_k(t) \quad (8)$$

여기서 $F_k(t) = F_k^* e^{j\omega t}$ 이고

$$F_k^* = \frac{1}{\rho h N_k} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} (f_1 U_{1k} + f_2 U_{2k} + f_3 U_{3k}) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (9)$$

$$N_k = \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} (U_{1k}^2 + U_{2k}^2 + U_{3k}^2) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (10)$$

이다.

따라서 무한대의 모드 중에서 k 번째까지의 모드를 취하여 모드 합으로 변위를 나타낼 수 있다. 여기서 3개의 셀 좌표 방향으로의 하중함수 f_1, f_2, f_3 는 입력으로 주어지는 주기력으로서 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_i(\alpha_1, \alpha_2, t) = f_i^*(\alpha_1, \alpha_2) e^{j\omega t}, \quad i=1, 2, 3 \quad (11)$$

식 (8)의 해는 정상상태에서 조화적이며 위상 각 (phase angle) ϕ_k 를 사용하여 k 번째 모드에서의 모드 기여계수를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\eta_k = \frac{F_k^*}{\omega_k^2 \sqrt{[1 - (\frac{\omega}{\omega_k})^2]^2 + 4\zeta_k^2 (\frac{\omega}{\omega_k})^2}} e^{j(\omega t - \phi_k)} \quad (12)$$

따라서 구조물의 변위는 댐핑이 없다고 가정 ($\zeta = 0$)하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) U_{ik}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (13a)$$

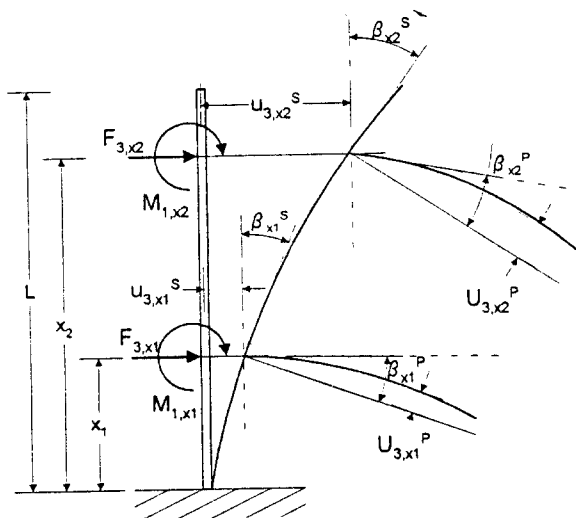


Fig. 2 Displacement/slope and loads at shell/plate joint

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k^*}{(\omega_k^2 - \omega^2)} e^{j\omega t} U_{ik}(a_1, a_2) \quad (13.b)$$

원판이 셸의 축방향 위치 $x=x^*$ 에서 원통셸의 내부에 결합되어 있을 경우, 원판 구속으로부터 발생된 셸의 변위 중에서 셸의 반경방향 변위보다 상대적으로 작은 두 변위를 무시하면 이 반경방향 셸의 변위를 발생하게 하는 동적 횡 방향력(dynamic excitation)은 Dirac Delta 함수를 사용하여 식 (14)와 같이 쓸 수 있다.

$$f_3(x^*, \theta, t) = F_3^s \cos \bar{n} \theta \delta(x-x^*) e^{j\omega t} \quad (14)$$

이 하중이 원통셸에 작용할 때 식 (9)로부터

$$F_k^* = [F_3^s \phi(x^*)] / [\rho h \{ (A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi'^2(x) dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2(x) dx + \int_0^L \phi^2(x) dx \}] \quad (15)$$

을 얻는다. 여기서 보 함수와 그의 미분은 다음의 식 (16), (17)과 같다.

$$\phi(x) = \cosh p_r x - \cos p_r x - C_r (\sinh p_r x - \sin p_r x) \quad (16)$$

$$\phi'(x) = \sinh p_r x + \sin p_r x - C_r (\cosh p_r x + \cos p_r x) \quad (17)$$

또 C_r, p_r 은 다음의 식 (18)과 (19)로부터 얻는다.

$$C_r = \frac{\sinh p_r L - \sin p_r L}{\cosh p_r L + \cos p_r L} \quad (18)$$

$$\cosh p_r L \cos p_r L + 1 = 0 \quad (19)$$

따라서 구하여진 F_k^* 를 식 (13)에 대입하면, k 번째까지의 모드 합으로 원통셸의 반경방향 동적 변위를 나타낼 수 있다. 즉,

$$u_3^s(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\omega_{imn}^2 - \omega^2)} \frac{F_3^s \phi(x^*) \phi(x)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi'^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} * \cos n\theta e^{j\omega t} \quad (20)$$

또 원판 결합에 따른 동적 횡방향 구속력에 의해 발생하는 원통셸의 축방향 기울기는 식 (20)을 미분하여 얻는다. 즉,

$$\beta^s(x, \theta, t) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\omega_{imn}^2 - \omega^2)} \frac{F_3^s \phi(x^*) p_r \phi(x)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi'^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} * \cos n\theta e^{j\omega t} \quad (21)$$

(ii) 동적 주기 모멘트에 의한 셸의 변위

주기적 횡방향 동적 모멘트 하중이 작용할 때의 변위 또한 모드 확장법을 이용하여 나타낼 수 있다. 이 때의 동적 하중항 F_k^* 는 일반적 셸변수를 사용하여 나타내면 다음과 같다.³⁾

$$F_k^* = \frac{1}{\rho h N_k} \int_{a_1} \int_{a_2} \left[f_1 U_{1k} + f_2 U_{2k} + f_3 U_{3k} + \frac{U_{1k}}{2A_2} \frac{\partial T_n}{\partial \alpha_2} - \frac{U_{2k}}{2A_2} \frac{\partial T_n}{\partial \alpha_2} + \frac{U_{3k}}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial(T_1 A_2)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(T_2 A_1)}{\partial \alpha_2} \right) \right] * A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (22)$$

횡방향 모멘트만 작용할 때는 f_1, f_2, f_3 는 영이 되며 F_k^* 는 다음 식 (23)에서 구할 수 있다.

$$F_k^* = \frac{1}{\rho h N_k} \int_{a_1} \int_{a_2} U_{3k} \left[\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial(T_1 A_2)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial(T_2 A_1)}{\partial \alpha_2} \right) \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (23)$$

여기서의 N_k 는 식 (10)과 동일하다.

한편 횡방향 동적 모멘트 $M_1(x^*, \theta, t)$ 에 의한 셸의 동적응답을 구하기 위하여 동적 모멘트 가진(dynamic moment excitation)을 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$M_1(x^*, \theta, t) = M_1^s \cos \bar{n} \theta \delta(x-x^*) e^{j\omega t} \quad (24)$$

이 모멘트에 의한 셸의 반경방향 변위 및 기울기는 모달 확장식 (7)을 사용하여 댐핑을 무시하고 구한 결과를 이용하여 표시하면 다음의 식 (25)와 같다.

$$u_3^s(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{M_1^s}{(\omega_{imn}^2 - \omega^2)} \frac{-p_r \phi'(x^*) \phi(x)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi'^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} * \cos n\theta e^{j\omega t} \quad (25)$$

또 모멘트 주기 동적 가진에 의한 원통셸의 원판 결합점에서의 기울기는 변위를 미분하여 다음 식을 얻는다.

$$\beta^s = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{M_1^s}{(\omega_{imn}^2 - \omega^2)} \frac{-p_r^2 \phi'(x^*) \phi'(x)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi'^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} * \cos n\theta e^{j\omega t} \quad (26)$$

(iii) 동적 주기 하중에 의한 원판의 변위
원판의 반경방향 내평면 운동의 진동수는 횡방향 진동수에 비해 월등히 크므로 횡방향 진동에 비해

강체운동으로 볼 수 있다. 원통과 접하는 부위에서 원판에 작용하는 주기적인 힘은

$$F_P(r, \theta, t) = F_P(a, \theta, t) = F_3 \cos \bar{n}\theta e^{j\omega t} \quad (27)$$

라 하면 원판의 반경방향으로의 운동은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_r^P(a, \theta, t) = U_o \cos \theta e^{j\omega t} \quad (28)$$

댐핑이 없는 원판의 내평면 운동은 원판의 질량을 M_P 라 할 때 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_P \ddot{\eta}_k = F_k(t) \quad (29)$$

식 (29)에서 외력은 식 (23)으로부터

$$F_k(t) = \left\{ \int_{a_1} \int_{a_2} f_i U_{ik} A_1 A_2 da_1 da_2 \right\} e^{j\omega t}, \quad i=1, 2, 3 \quad (30.a)$$

$$= \left\{ \int_{a_1} \int_{a_2} [F_3^P \cos \bar{n}\theta \delta(r-a)] a \cos \theta \right\} dr d\theta e^{j\omega t} \quad (30.b)$$

으로 표현되고 원판의 운동은 다시

$$M_P \ddot{u}_r^P = \left\{ \int_0^a \int_0^{2\pi} [F_3 \cos \bar{n}\theta \delta(r-a) r] \cos \theta \right. \\ \left. dr d\theta \right\} e^{j\omega t} \quad (31.a)$$

$$= \begin{cases} F_3 a \pi \cos \theta e^{j\omega t} & \text{for } \bar{n}=1 \\ 0 & \text{for } \bar{n} \neq 1 \end{cases} \quad (31.b)$$

로 표현할 수 있다.

식 (28)을 미분하여 식 (31)에 대입하면 원판의 횡방향 변위와 관련된 다음 식을 얻는다.

$$M_P \ddot{u}_r^P = \pi a^2 \rho h_p (-\omega^2 u_r^P) = F_3 a \pi \cos \theta e^{j\omega t} \quad (32)$$

(iv) 동적 선 모멘트에 의한 원판의 변위

원판이 원통셀에 결합된 부위의 선 모멘트에 의해 발생하는 원판의 횡방향 변위 및 기울기를 구하면 다음과 같다. 주기적 선 모멘트를 다음과 같이 가정한다.

$$T_1(r, \theta, t) = -M_1^P(r, \theta, t) \delta(r-a) \quad (33.a)$$

$$= -M_1^P \cos \bar{n}\theta \delta(r-a) e^{j\omega t} \quad (33.b)$$

원판의 횡방향 변위는 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\bar{u}_3^P(r, \theta, t) = U_3^P(r, \theta) e^{j\omega t} \quad (34.a)$$

$$= \left[J_n(\lambda r) - \frac{J_n(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} I_n(\lambda r) \right] \\ * \cos n\theta e^{j\omega t} \quad (34.b)$$

이 변위를 모달 확장식을 사용하여 나타내면

$$u_3^P = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) U_{3k}(r, \theta) \quad (35)$$

이고 $\eta_k(t)$ 는 모드 기여계수(modal participation factor)이며 모멘트가 작용할 경우 식 (7)의 하중항 $F_k(t)$ 를 $F_k(t) = G_k^* e^{j\omega t}$ 로 나타내어 G_k^* 를 다음 식으로부터 구할 수 있다⁽⁹⁾.

$$G_k^* = -\frac{M_1^P \pi(\lambda a)}{\rho h_p N_{mn}} \left[J_n(\lambda a) - \frac{J_n(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} I_n(\lambda a) \right]^2 \quad (36)$$

여기서 N_{mn} 은

$$N_{mn} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \left[J_n(\lambda r) - \frac{J_n(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} I_n(\lambda r) \right]^2 \\ * \cos n\theta r dr d\theta \quad (37)$$

으로서 수치적분에 의해 구한다.

따라서 원판의 변위를 모드 합으로 나타내면

$$u_3^P(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) U_{3k}^P(r, \theta) \quad (38.a)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{mn}^* U_{3mn}^P(r, \theta)}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} e^{j\omega t} \quad (38.b)$$

여기서 ω_{mn} 는 원판의 고유진동수이고 ω 는 구하고자 하는 조합구조물의 진동수이며,

$$G_{mn}^* = -\frac{M_1^P \pi(\lambda a)}{\rho h N_{mn}} \left[J_{n+1}(\lambda a) + \frac{J_n(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} I_{n+1}(\lambda a) \right] \quad (39)$$

$$U_{3mn}^P(r, \theta) = \left[J_n(\lambda r) - \frac{J_n(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} I_n(\lambda r) \right] \cos n\theta \quad (40)$$

이다.

또한 선 모멘트에 의한 원판의 기울기는 식 (38)을 미분하여 구할 수 있다.

$$\beta^P(r, \theta, t) = -\frac{\partial}{\partial r} u_3^P(r, \theta, t) \quad (41.a)$$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_{mn}^* U_{3mn}^{P'}(r, \theta)}{\omega_{mn}^2 - \omega^2} e^{j\omega t} \quad (41.b)$$

식 (41)의 $U_{3mn}^{P'}$ 은

$$U_{3mn}^{P'} = \lambda \left\{ \frac{n}{\lambda r} J_n(\lambda r) - J_{n+1}(\lambda r) - \frac{J_n(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} \right. \\ \left. * \left[\frac{n}{\lambda r} I_n(\lambda r) - I_{n+1}(\lambda r) \right] \right\} \cos n\theta \quad (42)$$

이고 λa 는 단순경계 원판의 고유값으로부터 구한다. 따라서 원판의 기울기는 다음 식 (43)과 같다.

$$\beta^P(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 a \pi M_1^P}{\rho h_p N_{mn} (\omega_{mn}^2 - \omega^2)} [J_{n+1}(\lambda a)$$

$$-\frac{J_n(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} I_{n+1}(\lambda a)]^2 \cos n\theta e^{i\omega t} \quad (43)$$

(2) 축방향 임의 위치에 하나의 원판이 결합된 경우 구조물의 고유진동해석에서 고차 진동 모드로 갈수록 변위는 현저히 낮아지므로 공진 방지에 관심이 있을 경우 우선 저차 진동수 및 저차 진동모드 특성이 중요하게 된다. 원판이 결합된 원통셀 구조물의 저차 진동 모드 및 낮은 진동수에 관심이 있을 때는 5개의 변위/하중 성분을 모두 고려하는 대신 원판은 내평면(in-plane)에서 셀의 횡진동에 의해 강제운동을 한다고 가정할 수 있고 이 가정으로부터 원판의 진동은 원판의 두께 방향으로 횡진동(transverse vibration)만 고려할 수 있다.

또 원통셀에 나타나는 횡방향 진동 크기를 다른 방향의 진동 크기와 비교할 때 셀의 접선방향의 작은 결합 변위의 영향은 무시할 수 있으므로 결합부 위에서는 원판과 원통셀 변위의 연성은 단지 원판의 반경방향 기울기 변화 및 횡방향 변위와 원통셀의 축방향 기울기 변화 및 원통셀의 횡방향 운동만을 고려할 수 있다. 이 가정에 의해 5개의 변위는 2개로 줄어들게 되어 식 (5)는 간단히 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_3 \\ M_1 \end{Bmatrix} = 0 \quad (44)$$

여기서 F_3 은 원판과 셀 결합부위에서 셀의 운동에 연성된 원판의 강제 평면 운동을 일으키는 힘의 크기이고, M_1 는 원판의 횡방향 운동이 셀 운동에 연성된 모멘트의 크기이다. 동적응답 β_{12} 와 β_{21} 은 원판의 내평면 운동과 원판의 횡방향 운동의 연성이 없으므로 영이고 $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ 이다. 이에 따라 하나의 원판이 원통셀의 임의 위치에 결합되어 있는 경우에 구해야 할 동적응답은 다음과 같다.

(i) 셀의 동적응답

횡방향 동적 가진에 의한 동적응답은 변위 표현식 (20)과 기울기를 나타내는 식 (21)로부터 구할 수 있고 이들 변위를 사용하여 셀의 동적응답을 구하면

$$\alpha_{11} = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\omega_{imn}^2 - \omega^2)} * \frac{\phi(x^*) \phi(x^*)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi'^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} \quad (45)$$

$$\alpha_{21} = - \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\omega_{imn}^2 - \omega^2)} * \frac{p_r \phi(x^*) \phi'(x^*)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi'^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} \quad (46)$$

식 (45) 및 (46)의 하첨자 i 는 각 모드에 해당하는 원통셀만의 진동수 방정식의 세 근이므로 $i=1, 2, 3$ 이고, m 은 축방향 반파수, n 은 원주방향 파수를 나타낸다.

또 동적 모멘트에 의한 셀의 동적응답은 $x=x^*$ 에서 식 (25), (26)을 이용하여 다음의 식 (47), (48)과 같이 구해진다.

$$\alpha_{22} = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\omega_{imn}^2 - \omega^2)} * \frac{-p_r^2 \phi'(x^*) \phi'(x^*)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi'^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} \quad (47)$$

$$\alpha_{21} = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(\omega_{imn}^2 - \omega^2)} * \frac{-p_r \phi(x^*) \phi'(x^*)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi'^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} \quad (48)$$

(ii) 원판의 동적응답

구해야 할 원판의 응답은 연성되어 영이 되는 두 개를 제외한 β_{11} 과 β_{22} 이다.

따라서 원판의 동적응답 β_{11} 은 식 (32)에서

$$\beta_{11} = \begin{cases} -\frac{1}{a \rho h_p \omega^2} & \text{for } \bar{n}=1 \\ 0 & \text{for } \bar{n} \neq 1 \end{cases} \quad (49)$$

다음으로 선 모멘트에 의한 원판의 동적응답은 식 (43)으로부터 다음 식을 얻는다.

$$\beta_{22} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi \lambda^2 a}{\rho h_p} \frac{[J_{n+1}(\lambda a) - \frac{J_n(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} I_{n+1}(\lambda a)]^2}{N_{mn} (\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \quad (50)$$

(iii) 진동수 방정식 및 모드 형상

원판과 원통셀의 결합 경계에서의 연속조건을 적용하여 얻은 식 (5)에서 무용해를 얻지 않기 위한 조건으로부터 다음의 진동수 방정식(Frequency Response Equation : FRE)을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (51)$$

전개하면 조합 원통셀의 고유진동수인 ω 에 대한 함수로서 다음식과 같다.

$$f(\omega) = (\alpha_{11} + \beta_{11})(\alpha_{22} + \beta_{22}) - \alpha_{12} \alpha_{21} = 0 \quad (52)$$

식 (52)는 특이점(singular point)를 갖는 비선형 방정식으로서 수치적인 방법으로 해를 구해야 하며 이로부터 구한 조합 원통셀의 진동수를 이용하여 식 (5)로부터 모멘트/하중 비를 구하고, 식 (20)과 식

(25)를 이용하여 셀의 모드 형상을 구하면 다음 식과 같다.

$$u_3^s(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{F_3^s}{\omega_{imn}^2 - \omega^2} \phi(x) * \left\{ \frac{\phi(x^*) - (M_i^s/F_3^s) p_r \phi'(x^*)}{\rho h [(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi^2 dx + \int_0^L \phi^2 dx]} \right\} \cos n\theta e^{j\omega t} \quad (53)$$

원판의 모드 형상은 식 (38)로부터 다음 식과 같다.

$$u_3^p(r, \theta, t) = -F_3^s \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(M_i^s/F_3^s) \pi \lambda a}{\omega_{imn}^2 - \omega^2} * \left[\frac{J_n(\lambda r) - \frac{J_n(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} I_n(\lambda r)}{\rho_p h_p N_{mn}} \right] * \left[\frac{J_{n+1}(\lambda a) - \frac{J_n(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} I_{n+1}(\lambda a)}{I_n(\lambda a)} \right] * \cos n\theta \quad (54)$$

(3) 축방향 임의 위치에 두 개의 원판이 결합된 경우

두 개의 원판이 결합된 원통셀의 고유진동해석에서 필요한 셀 및 원판의 동적응답은 다음과 같다.

(i) 셀의 동적응답

모달 변위 식 (20)과 (25)를 이용하여 셀의 동적응답을 구하면

$$\alpha_{11} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\omega_{imn}^2 - \omega^2} \frac{\phi(x_1^*) \phi(x_1^*)}{\rho h [AOCN]} \quad (55)$$

여기서

$$[AOCN] = \left[(A/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi'(x)^2 dx + (B/C)_{imn}^2 \int_0^L \phi(x)^2 dx + \int_0^L \phi(x)^2 dx \right] \quad (56)$$

이다.

$$\alpha_{12} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\omega_{imn}^2 - \omega^2} \frac{-p_r \phi'(x_1^*) \phi(x_1^*)}{\rho h [AOCN]} \quad (57)$$

$$\alpha_{13} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\omega_{imn}^2 - \omega^2} \frac{\phi(x_1^*) \phi(x_1^*)}{\rho h [AOCN]} \quad (58)$$

$$\alpha_{14} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{-1}{\omega_{imn}^2 - \omega^2} \frac{p_r \phi'(x_1^*) \phi(x_1^*)}{\rho h [AOCN]} \quad (59)$$

$$\alpha_{21} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{-p_r}{\omega_{imn}^2 - \omega^2} \frac{\phi(x_1^*) \phi'(x_1^*)}{\rho h [AOCN]} \quad (60)$$

$$\alpha_{22} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\omega_{imn}^2 - \omega^2} \frac{p_r^2 \phi'(x_1^*) \phi'(x_1^*)}{\rho h [AOCN]} \quad (61)$$

$$\alpha_{23} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{-1}{\omega_{imn}^2 - \omega^2} \frac{p_r \phi(x_2^*) \phi'(x_1^*)}{\rho h [AOCN]} \quad (62)$$

$$\alpha_{24} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{-1}{\omega_{imn}^2 - \omega^2} \frac{p_r^2 \phi(x_1^*) \phi'(x_2^*)}{\rho h [AOCN]} \quad (63)$$

$$\alpha_{31} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\omega_{imn}^2 - \omega^2} \frac{\phi(x_1^*) \phi'(x_2^*)}{\rho h [AOCN]} \quad (64)$$

$$\alpha_{32} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{-1}{\omega_{imn}^2 - \omega^2} \frac{p_r \phi(x_1^*) \phi'(x_2^*)}{\rho h [AOCN]} \quad (65)$$

$$\alpha_{33} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\omega_{imn}^2 - \omega^2} \frac{\phi(x_2^*) \phi'(x_2^*)}{\rho h [AOCN]} \quad (66)$$

$$\alpha_{34} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{-1}{\omega_{imn}^2 - \omega^2} \frac{p_r \phi(x_2^*) \phi'(x_2^*)}{\rho h [AOCN]} \quad (67)$$

$$\alpha_{41} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{-1}{\omega_{imn}^2 - \omega^2} \frac{p_r \phi(x_1^*) \phi'(x_2^*)}{\rho h [AOCN]} \quad (68)$$

$$\alpha_{42} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\omega_{imn}^2 - \omega^2} \frac{p_r^2 \phi'(x_1^*) \phi'(x_2^*)}{\rho h [AOCN]} \quad (69)$$

$$\alpha_{43} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{-1}{\omega_{imn}^2 - \omega^2} \frac{p_r \phi(x_2^*) \phi'(x_2^*)}{\rho h [AOCN]} \quad (70)$$

$$\alpha_{44} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\omega_{imn}^2 - \omega^2} \frac{p_r^2 \phi(x_2^*) \phi'(x_2^*)}{\rho h [AOCN]} \quad (71)$$

$$\alpha_{31} = \alpha_{13} \quad (72)$$

$$\alpha_{32} = \alpha_{23} \quad (73)$$

(ii) 원판의 동적응답

이 경우의 원판의 동적응답은 하나의 원판이 결합된 경우의 동적응답에서 원판결합 위치를 달리하면 되므로 동일 식이 되어 기술은 생략한다.

(iii) 진동수 방정식

원판과 원통셀의 결합 경계에서의 연속조건을 적용하면 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} + \beta_{33} & \alpha_{34} + \beta_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} + \beta_{43} & \alpha_{44} + \beta_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{3,x1} \\ M_{1,x1} \\ F_{3,x2} \\ M_{1,x2} \end{Bmatrix} = 0 \quad (75)$$

따라서 식 (75)가 무용해를 갖지 않을 조건으로부터 다음의 조합 원통셀의 진동수 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} + \beta_{33} & \alpha_{34} + \beta_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} + \beta_{43} & \alpha_{44} + \beta_{44} \end{bmatrix} = 0 \quad (76)$$

이 진동수 방정식은 하나의 원판이 결합된 경우와 같이 특이점을 갖는 비선형 방정식이 되어 폐형해를 구할 수가 없으므로 수치적인 방법에 의해 해를 구해야 한다.

3. 결과 및 고찰

3.1 이론해석, ANSYS 및 고유진동 시험

2절에서 기술한 수식전개를 이용하여 외팔형 원통셀 및 여기에 축방향으로 임의의 위치에 하나 또는 두 개의 원판이 결합되어 있을 경우의 수치해를 얻을 수 있는 FORTRAN 프로그램을 작성하여 그 이

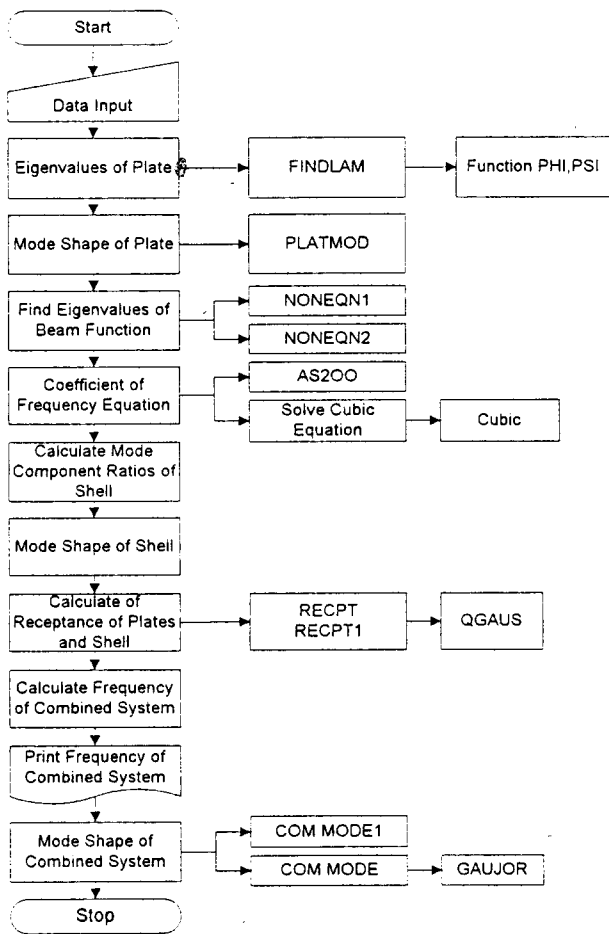


Fig. 3 Flow chart of CFRCP program

를 CFRCF (Clamped-Free by Receptance Method)라 하였다. Fig. 3은 CFRCF의 프로그램 흐름도를 보인다. CFRCF 프로그램을 이용하여 Fig. 4 (a)의 외팔 원통셀(Case 1), Fig. 4 (b)의 축방향 임의 위치에 하나의 원판이 결합된 경우(Case 2) 및 중간에 하나의 원판이 결합된 경우(Case 3)인 Fig. 4 (c), 그리고 Fig. 4 (d)의 원판 덮개를 갖고 중간에 하나의 원판이 더 결합된 경우(Case 4)를 계산하고 그 결과의 타당성을 유한요소 해석 코드인 ANSYS 및 Case 1과 Case 2, Case 3에 대한 고유진동 시험 결과와 비교를 하였다.

ANSYS를 사용한 유한요소 모델은 셀의 반경에 대한 두께비가 34.8(=104.5/3)로서 충분히 작아 얇은 셀로 볼 수 있으므로 고체요소(solid element) 대신 셀 요소를 사용하였다. 모달해석 계산에 대한 선택사항은 Reduction 법을 사용할 때는 약간의 계산 시간에 이득이 있으나 축 대칭 모드의 왜곡현상이 나타나서 정확한 모드 형상을 구분할 수 없으므로

시간이 다소 걸리더라도 Subspace iteration 방법을 사용하여 대칭의 모드에 대해서도 정확히 계산을 하도록 하였다.

고유진동 시험에서는 충격해머의 충격량을 고려하고 해석의 결과 및 ANSYS 해석결과를 이용하여 원판이 결합된 조합 원통셀의 기본진동수가 대략 500 Hz가 되도록 셀의 제원이 정해졌다. 기하학적 제원들은 Table 1에 나타내었다.

Fig. 5는 원통셀 시험시편의 가진점을 보이고 있다. 시험에 사용된 주파수 분석기는 ONO-SOKKI CF-920 Mini FFT Analysis System으로서 Fig. 6에는 시험장치의 개요를 나타내었다. 시험은 충격해머의 충격에 의해 가속도계에 나타나는 응답을 증폭하여 FFT로 보내고 이 결과로 FFT에서 진동수 응답 곡선을 얻었으며 이를 이용하여 순차적인 진동수를 구하여 침투 진동수 및 위상각으로부터 셀의 진동수를 결정하였다.

3.2 수치해석과 유한요소 해석 및 시험결과의 비교

(1) 외팔 원통셀 : Case 1

외팔 원통셀만의 고유진동수는 Rayleigh-Ritz법을 적용하여 유도된 3차의 진동수 방정식에서 근의 공식을 이용하여 구할 수 있으며 얻어진 진동수를 이용하여 고유진동 모드를 구할 수 있다. 이러한 해석 방법으로 얻은 진동수 계산 결과의 타당성은 임정식^(10,11)에 의해 Sharma⁽¹²⁾가 사용한 3가지 경우의 외팔 원통셀과 같은 제원 및 물성을 사용하여 고유진동수를 얻고 기존의 결과와 비교를 통해 얻어진 진동수의 정확성을 밝히고 있다. Sharma의 결과에서도 시험으로는 원주방향 파수 $N=0, 1$ 또는 $N=2$ 에서의 고유진동수는 얻지 못하였으며, 이론해는 시험으로 얻은 값보다 높음을 보이고, 원주방향 파수 증가에 따라 그 차이는 작아지는 경향을 보이고 있다.

외팔 원통셀만의 진동수를 이론적 계산 결과, ANSYS 해석 결과 및 시험 결과를 같이 나타내면 Fig. 7과 같다. Fig. 7에서 보면 수치해 및 ANSYS 해석과 시험의 세 경우 모두 진동수는 동일한 변화 경향을 보이며 그들의 수치적인 값은 예측한 대로 시험의 경우 기본진동수에서 가장 낮은 진동수를 보이고 원주방향 모드 수의 증가에 따라 세 경우 잘 일치하는 경향을 보인다. 축방향 반파수 $M=1$ 에서의 원주방향 0 진동모드는 셀의 호흡(breathing) 모드로서 높은 진동수 때문에 시험에서는 얻지 못하였고, 축방향 반파수 $M=2$ 일 때의 $N=0, 1$ 및 $M=3$ 일 때의 $N=0, 1, 2$ 진동수도 같은 이유로 시험으로

부터는 얻지 못하였다.

(2) 상단에 원판이 결합된 원통셀의 고유진동 해석
 결과 : Case 2

상단에 원판이 결합된 Case 2의 원통셀에 대한 진

동수 계산 결과는 Fig. 8과 같다. Fig. 8에서 보면
 축방향 모드 $M=1$ 및 $M=2$ 에서 원주방향 파수 N
 의 변화에 따른 진동수의 변화는 서로 잘 대응함을
 보이며 전체적으로 시험의 결과는 이론해 및

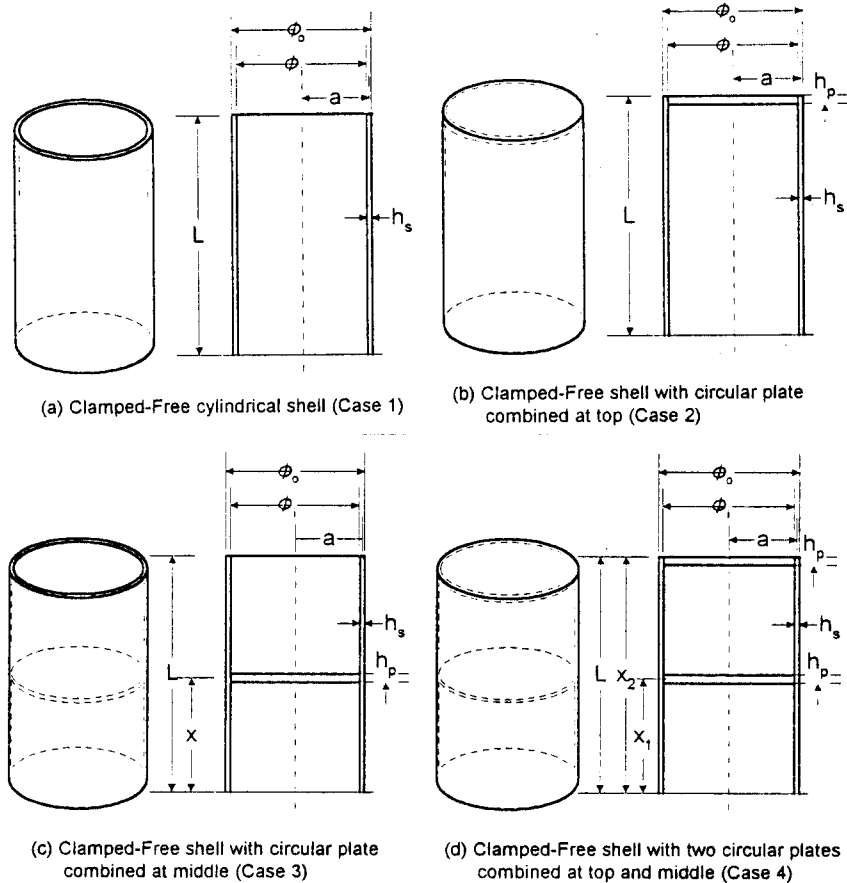


Fig. 4 Scope of the analyses

Table 1 Dimensions and material properties for shells and plate

Description		Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
○ Length(mm)	L	500	500	500	500
○ Radius(mm)	a	104.5	104.5	104.5	104.5
○ Outer diameter of shell(mm)	ϕ_o	212	212	212	212
○ Inner diameter of shell(mm)	ϕ_i	206	206	206	206
○ Thickness(mm) of shell	h_s	3.0	3.0	3.0	3.0
plate	h_p	3.0	3.0	3.0	3.0
○ Young's Modulus($\times 10^4 \text{N/mm}^2$)	E	20.6	20.6	20.6	20.6
○ mass density($\times 10^{-9} \text{Ns}^2/\text{mm}^4$)	ρ	7.85	7.85	7.85	7.85
○ Poisson's ratio	ν	0.3	0.3	0.3	0.3
○ X_1^* (mm)		-	500	250	250
○ X_2^* (mm)		-	-	-	500
○ Thickness of base plate(mm)	t_B	12	12	12	12
○ Diameter of bolt hole(mm)	d_B	10	10	10	10

ANSYS 경우에 비해 낮은 진동수 값을 보이지만 원주방향 모드 수가 증가할수록 세 경우의 진동수 일치 정도는 높게 나타난다.

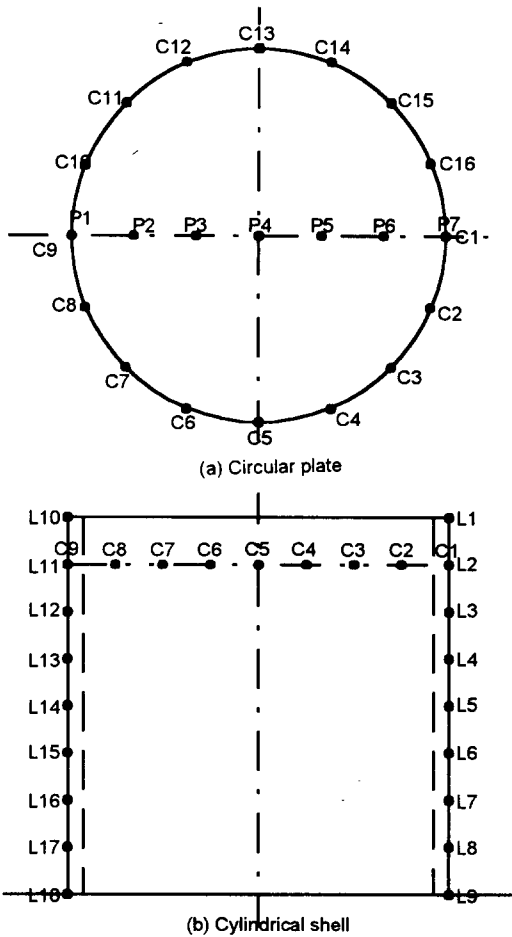


Fig. 5 Impact point on circular plate and shell

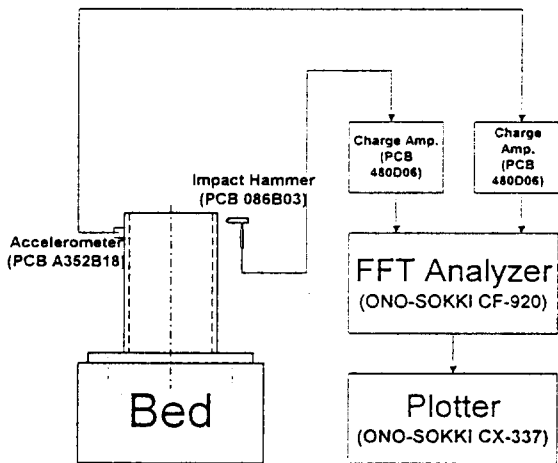


Fig. 6 Schematic view of test equipment

원판이 결합되지 않은 외팔 원통셀의 고유진동수 변화가 원주방향 모드 수에 따라 포물선 형태의 변화를 하는데 비해 원판이 결합됨으로 인해 축방향 반파수 $M=1$ 의 경우 원통셀의 호흡(breathing) 모드인 원주방향 파수 $N=0$ 에서는 원판의 진동이 일

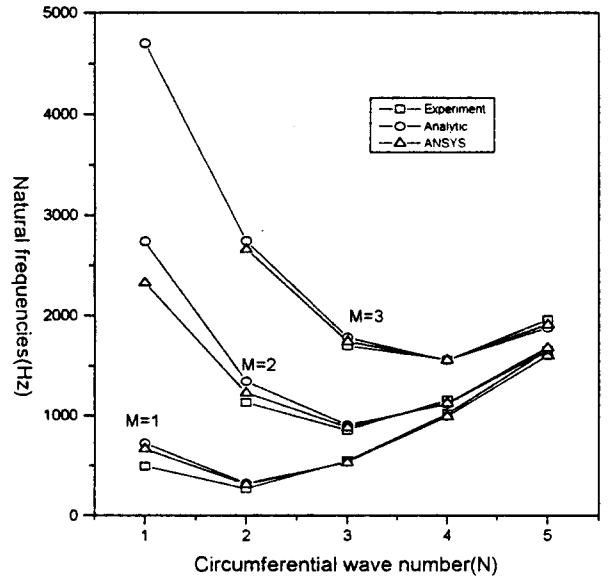


Fig. 7 Comparison of frequencies of clamped-free cylindrical shell from analytic, ANSYS and experiment

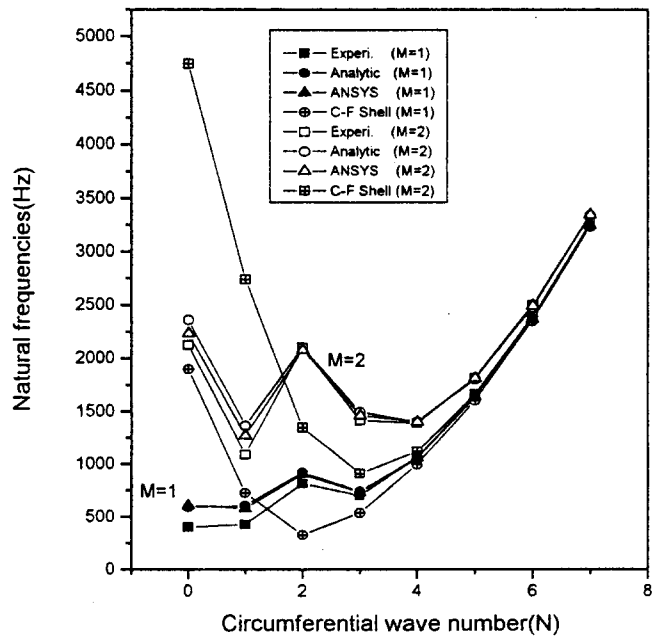


Fig. 8 Comparison of frequencies of Case 2 from analytic, ANSYS and experiment

차로 나타나는 원판 지배 진동모드가 되어 조합 원통셀의 고유진동수를 크게 낮추며 원통셀의 흔들림 (swaying) 모드인 $N=1$ 모드에서는 원통셀의 진동이 지배적인 모드로서 원판이 고유진동수에 주는 영향은 크지 않고 원판 결합의 질량부가 효과에 의해 작은 진동수의 감소를 보인다. 이에 비해 외팔 원통셀에서 기본진동수를 보이는 $N=2$ 모드의 진동수는 원판결합에 의해 큰 진동수의 증가를 나타내는데 이것은 원판이 결합되므로 인해 원통셀의 타원모드인 $N=2$ 의 변형에 대한 구속효과가 크게 나타나기 때문으로 생각되며 원주방향 파수 N 이 증가 할수록 진동의 모드는 셀의 지배 진동모드가 되어 원판의 결합에 따른 진동수의 변화에 주는 영향은 크지 않음으로써 원래의 외팔 원통셀만의 진동수 변화를 따른다고 생각된다.

축방향 반파수 $M=2$ 에서도 원주방향 파수 $N=0$ 및 $N=1$ 일 때는 원판 결합 원통셀의 진동수는 외팔 원통셀만의 진동수에서 크게 낮아지는 것을 보인다. 이에 비해 $M=2$ 에서 $N=2, 3, 4$ 모드의 진동수는 원판의 결합에 의해 큰 진동수의 증가 현상을 보이는데 이것은 원판의 결합에 의해 셀의 진동모드에 대한 구속의 영향이 크기 때문으로 볼 수 있으며, 원주방향 파수가 증가 할수록 원판이 주는 진동수의 영향이 작아지는 것은 원주방향 파수가 증가 할수록 셀 지배 진동모드가 되고 원통셀의 자유단 변위는 상대적으로 작아서 이 변위에 대한 원판의 구속이 작음에서 오는 결과라고 볼 수 있다.

한편 원주방향 파수에 따른 조합원통셀의 고유진동수 변화인 Fig. 8은 유한요소 해석을 통해서 회전 타원체의 데이터를 갖는 조합원통셀의 진동수 변화를 보였던 Galletely⁽¹³⁾의 결과와도 유사함을 보인다.

외팔 원통셀의 상단에 원판이 결합된 경우의 원판 경계조건은 단순지지와 고정경계의 중간형태로 볼 수 있고 이에 따라 결합 원판의 고유진동수도 단순 지지 경계와 고정경계 원판의 고유진동수 사이에 나타나야 할 것으로 예측된다. 이론해로부터 구한 조합 원통셀의 최저진동수는 589 Hz이고 ANSYS로부터 구한 최저진동수는 603 Hz로서 이 값들이 조합 원통셀의 최저진동수인 원판의 진동수라고 볼 수 있다. 한편 시험에서는 원판에 가속도계를 부착하고 원판을 가진한 경우에 얻은 최저 진동수는 425 Hz이며 이들은 단순과 고정경계의 원판 고유진동수인 334.5 Hz와 692 Hz 사이가 되어 그 값은 타당한 것으로 보이며, 이 값이 조합 원통셀의 최저 진동수로 볼 수 있다.

(3) 중간에 원판이 결합된 조합 원통셀 : Case 3
Case 3의 고유진동수를 이론해 및 유한요소 해석, 시험의 결과를 동시에 나타내면 Fig. 9와 같다. 이 Fig. 9에서 보면 축방향 반파수 $M=1$ 에서의 원주방향 모드 수에 따른 진동수 변화는 N 이 3 이상에서 큰 차이를 보이지 않는다. 원판 결합에 따른 조합 원통셀의 고유진동수 변화는 Case 2의 상단에 원판이 결합된 경우와 크게 차이를 보이지는 않으나 외팔 원통셀의 최저 진동수를 보이는 축방향 반파수 $M=1$ 이고 원주방향 파수 $N=2$ 의 기본진동수의 증가가 상단에 원판이 결합된 경우보다는 작은 증가를 보인다.

Case 3의 경우 이론해의 최저 진동수는 585 Hz이고 ANSYS의 예측은 645 Hz로서 원판이 상단에 부착된 경우와 크게 차이를 보이지 않는다. 이 경우 시험에서 얻은 최저 진동수는 475 Hz로서 이것은 원판만의 고유진동수라고 판단되지만 원판을 가진하기 위한 공간이 부족하여 원판을 가진 할 수가 없어 정확한 원판의 진동모드인지를 확인할 수 없었다. 단지 셀을 가진하고 가속도계를 원판의 각 점에 이동하여 상대적인 변위를 구할 수는 있었으나 셀의 가진방향과 원판에 부착된 가속도계의 응답방향이 수직이 되는 조건이 되어 정확한 모드형상이라고는 생각되지 않고 상단에 원판이 부착된 경우와 같이 이 최저 진동수가 원판의 진동수라고 가정할 경우 이 진동수는 단순경계와 고정경계를 갖는 원판의 고유

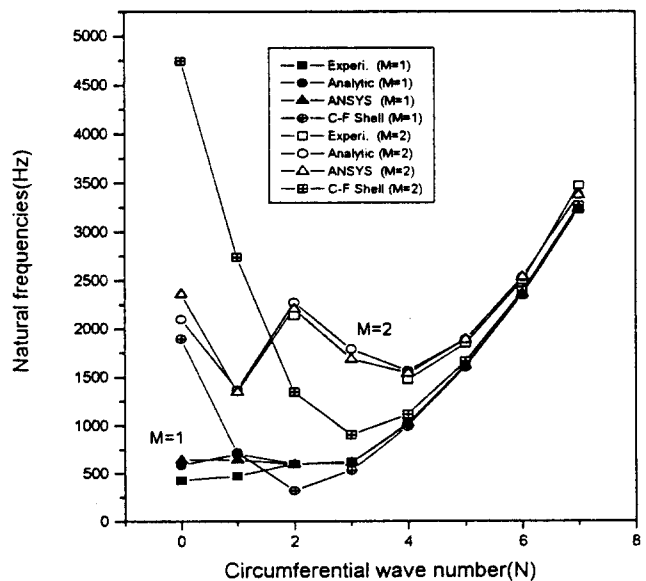


Fig. 9 Comparison of frequencies of Case 3 from analytic, ANSYS and experiment

진동수 사이에 위치하여 그 값의 타당성은 인정된다.

축방향 반파수 $M=2$ 에서 원주방향 파수 $N=0, 1$ 의 시험값은 진동수가 증가할수록 해당 모드 형상을 찾기가 어려워 언지를 못하였고, 가진점을 더 세분하여 가진하거나 가진점 및 가속도계의 부착 위치를 더 많이 이동해 가며 찾아야 할 것으로 보인다.

(4) 상단에 원판이 결합되고 중간에 원판이 결합된 조합원통셀 : Case 4

상단 및 중간에 원판이 결합된 조합 원통셀에 대한 이론해석 및 유한요소 해석의 진동수 계산 결과는 Fig. 10과 같다. Fig. 10에서 원판의 결합에 의해 포물선 형태의 원통셀만의 원래 진동수 변화는 Case 2와 Case 3의 경우와 마찬가지로 축방향 반파수 $M=1$ 일 때 호흡 모드인 $N=0$ 에서는 원판의 지배진동에 의해 조합 원통셀 진동수의 큰 감소가 나타나고 원통셀의 흔들림 모드인 $N=1$ 에서는 원통셀만의 진동수를 다소 낮추며 이것은 원판의 질량부가의 효과로 설명된다. 원통셀의 타원모드인 원주방향 파수 $N=2$ 에서는 원판 부착에 의해 큰 진동수의 증가가 나타나고 이것은 $N=2$ 일 때는 셀의 타원형 모드에서 원판의 결합에 의해 이 모드의 진동이 구속되므로 진동수의 증가를 보이며 원주방향 파수 N 이 증가할수록 셀의 진동이 지배적이 되어 원판의 영향이 적어지므로 원래의 원통셀의 진동수 변화 형태를 따름을 보인다. 따라서 원판 결합이 진동수에 주는 영향은 원주방향 파수의 낮은 범위에서는 큰 영향을

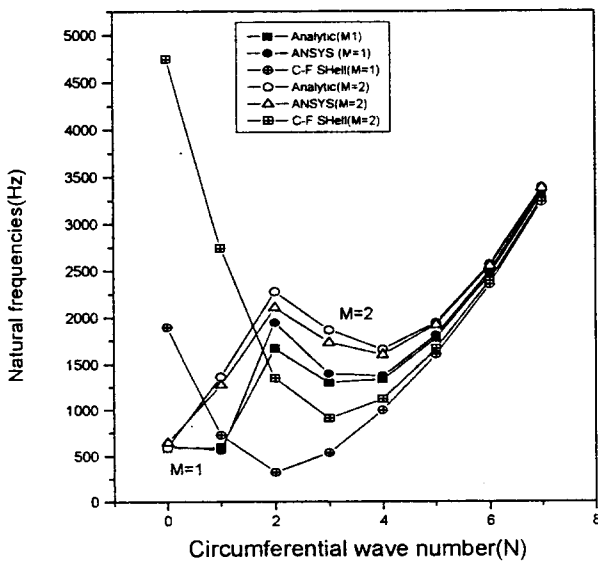


Fig. 10 Comparison of frequencies of Case 4 from analytic and ANSYS

주지만 원주방향 파수 N 이 커지면 그 영향은 작아진다고 할 수 있다.

4. 원판 결합이 조합원통셀의 고유진동 특성에 주는 영향

4.1 원판 두께가 고유진동수에 주는 영향

지금까지 원판의 결합에 의해 조합 원통셀의 고유진동수의 변화를 통하여 원판의 영향은 낮은 원주방향 파수에서 크고 큰 원주방향 파수에서는 진동수에 주는 영향은 작음을 보았다. 구조설계자의 관심이 되는 저차 진동모드에서 이러한 진동의 변화는 공진을 피하기 위하여 파악되어야 하는 중요한 변수이다.

결합되는 원판의 두께가 조합 원통셀의 고유진동수에 주는 영향을 알아보기 위하여 원판이 상단에 결합된 Case 2에서 원판의 두께를 변화시켜 가며 이론해석 및 ANSYS로 얻은 원주방향 파수에 따른 진동수의 계산결과를 Fig. 11에 나타내었다. Fig. 11에서는 결합 원판의 두께가 두꺼울수록 $N=0$ 모드에서의 이론해석과 ANSYS의 차이가 커짐을 보이는데 이것은 이론해석에서는 무시한 원판의 전단 변형의 영향에 기인하는 것으로 판단되고, 원주방향 파수가 커질수록 이들 결과의 차이는 줄어드는 경향을 보인다.

원주방향 파수 변화에 따라 원판 두께를 변화시켜 가며 얻은 조합 원통셀의 고유진동수 변화를 Fig. 12($M=1$) 및 Fig. 13($M=2$)에 보였으며 Fig. 12에

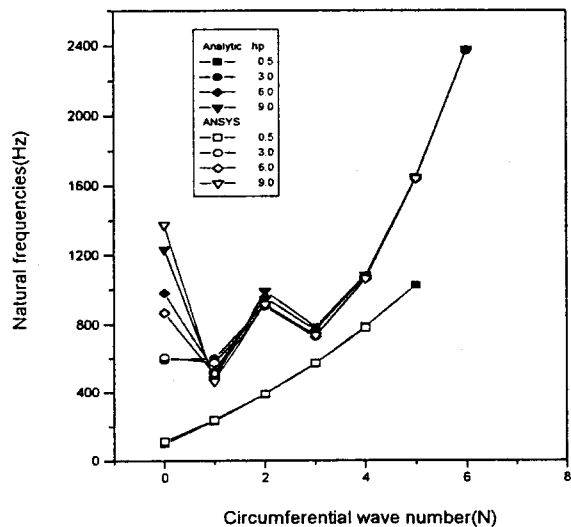


Fig. 11 Comparison of frequencies from analytic and ANSYS with varying plate thickness for Case 2

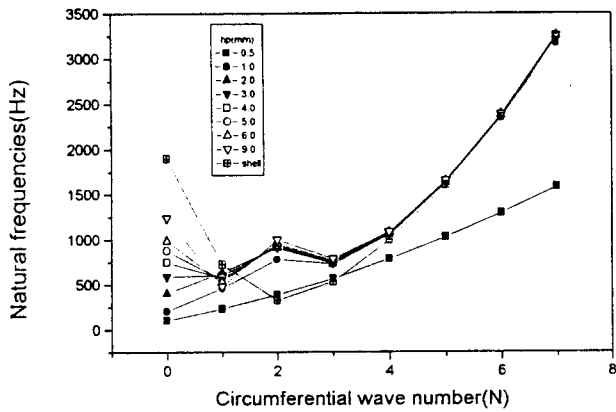


Fig. 12 Natural frequencies of $M=1$ as a function of plate thickness

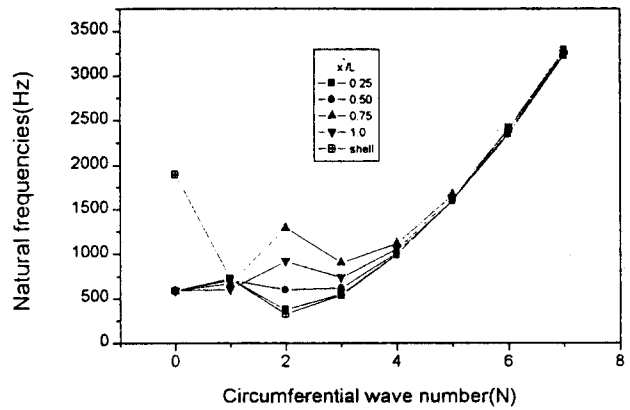


Fig. 14 Natural frequencies of $M=1$ as a function of plate position

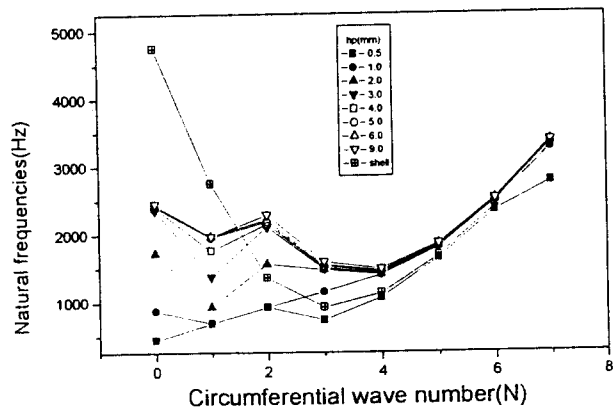


Fig. 13 Natural frequencies of $M=2$ as a function of plate thickness

서 보면 원판의 결합에 의해 축방향 모드 수 $M=1$ 일 때 원판의 두께가 얇은 경우인 $h_p=0.5$ mm에서는 원판의 진동이 지배적인 낮은 진동수 영역이어서 원주방향 파수 증가에 따라 거의 선형적인 진동수 변화를 보이고, 원판의 두께가 증가할수록 가장 낮은 진동수를 보이는 $N=0$ 에서의 진동수가 원판의 진동수 증가에 기인하여 조합 원통셀의 진동수는 외팔 원통셀만의 진동수에 접근하는 진동수의 증가경향이 뚜렷하게 보인다.

특히 원통셀의 최저 진동수를 보이는 $N=2$ 에서의 기본진동수에서 원판의 두께가 어느 정도 이상이 되면 진동수의 증가가 현격하지만 이 증가의 차이는 원판 두께의 영향에는 크게 차이를 보이지 않음을 보이며, 원주방향 파수에 따른 진동수의 변화는 보강 링을 갖는 원통셀의 진동수의 변화 추이와 유사한 경향을 보임을 알 수 있다. 또 $N=1$ 에서는 원판

의 두께 영향을 거의 받지 않고 있는데 이는 $N=1$ 의 진동모드는 보의 흔들림 진동모드를 보이므로 원판의 진동과 무관하는데 기인하는 것으로 생각할 수 있고, 이 때의 작은 진동수의 감소는 원판 결합에 의한 질량부가에 의해 감소되므로 원판 두께가 증가할수록 진동수 감소가 큼을 알 수 있다. 반면에 셀의 진동이 지배적인 높은 원주방향 파수에서는 원판 결합이 진동수에 주는 영향이 작아짐을 보인다.

외팔 원통셀만의 진동수와 원판이 결합되었을 경우의 진동수를 비교해 보면 원판의 결합에 의해 원주방향 파수가 작은 곳에서는 원판의 낮은 진동수에 의해 고유진동수의 큰 감소를 보이고 원주방향 파수가 증가하면 원판의 결합에 의한 고유진동수의 변화에 주는 영향은 크지 않고 원래의 원통셀의 진동수 변화와 유사함을 보인다.

4.2 원판결합 위치가 고유진동수에 주는 영향

Fig. 14와 Fig. 15는 하나의 원판이 결합되는 축방향 위치에 따라 나타나는 진동수의 변화를 보인다. Fig. 14에서 축방향 모드 $M=1$ 일 때 원주방향 파수 $N=0$ 과 $N=1$ 모드는 원판이 결합되는 축방향 위치에 관계없이 거의 동일한 고유진동수를 보이고 셀만의 진동수에서 최저 진동수를 보이는 $N=2$ 에서의 기본진동수는 원판결합의 위치에 따라 가장 큰 진동수 증가의 영향을 보이는데 가장 큰 진동수 증가를 보이는 원판결합 위치는 셀 길이의 $3/4$ 위치에 결합될 때이며 축방향 위치가 $1/4$ 에 원판이 결합될 때에는 기본진동수에 주는 증가는 크지 않음을 보인다. 이러한 축방향 위치에 따른 원판의 진동수에 주는 영향은 낮은 원주방향 파수일 때이고 높은 원주방향 파수에서는 원판의 결합 위치에 따른 고유진동수의

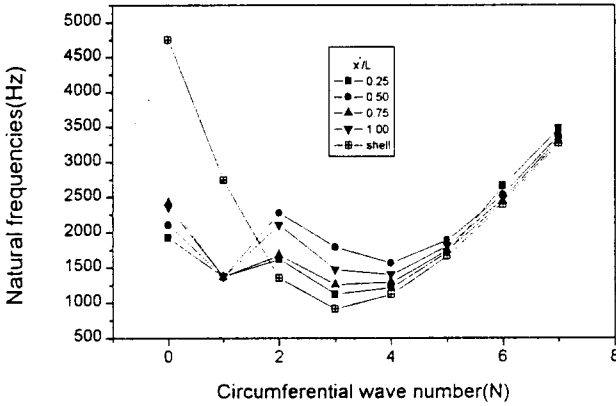


Fig. 15 Natural frequencies of $M=2$ as a function of plate position

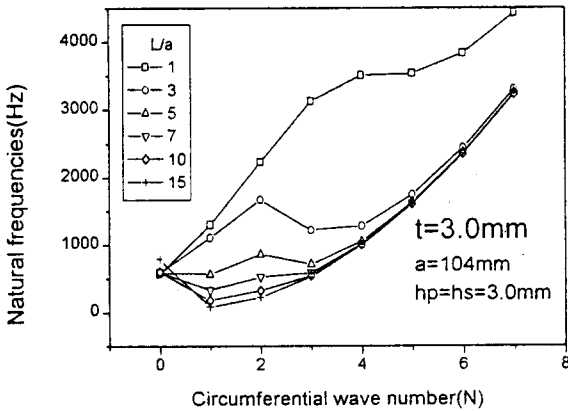


Fig. 16 Natural frequencies of $M=1$ as a function of circumferential wave number

변화는 크지 않은데 이는 Fig. 12 및 Fig. 13과 일치하는 경향이다.

Fig. 15는 원판의 축방향 결합위치에 따른 진동수 변화를 축방향 반파수 $M=2$ 에서 원주방향 파수 변화에 따른 영향을 보이는 그림이며, 원판의 결합 위치에 따라 고유진동수가 $N=0, 1$ 에서는 감소하며 $N=1$ 모드는 원판의 진동과 무관한 흔들림 진동모드이므로 원판 결합에 따른 영향은 나타나지 않고 원판 결합위치에 따른 진동수의 증가가 가장 큰 경우는 $N=2, 3, 4$ 에서 축방향 중간에 원판이 결합될 경우이다. 이것은 $M=2$ 의 진동모드는 셀 길이의 중간에서 가장 큰 진동 모드를 보이므로 이 진동을 구속하는데 필요한 에너지가 가장 크게 기여하기 때문으로 해석된다.

그리고 Fig. 14에서와 마찬가지로 원주방향 파수 N 이 증가할수록 셀 지배진동 모드가 되어 원판 결합이 진동수에 주는 영향이 상대적으로 작으므로 원

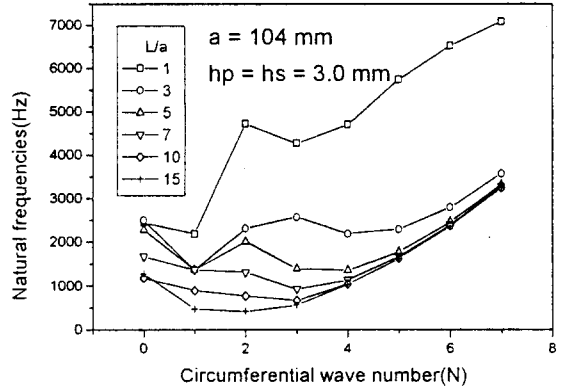


Fig. 17 Natural frequencies of $M=2$ as a function of circumferential wave number

판의 결합위치에도 큰 영향을 받지 않는다.

4.3 길이/반경 비에 따른 진동수의 영향

조합 원통셀의 고유진동수에 영향을 주는 인자는 물성 외에 셀의 길이, 셀 및 원판의 반경 및 두께 등의 기하학적 제원이 있다. Fig. 16과 Fig. 17은 셀의 두께를 3 mm, 셀 및 원판의 반경을 104.5 mm로 고정하고 셀의 길이를 변경하여 얻은 셀의 길이/반경 비에 따른 조합원통셀의 고유진동수 변화를 축방향 반파수 $M=1$ 및 $M=2$ 에 대하여 원주방향 파수의 변화에 따라 나타내었다. 축방향 반파수 $M=1$ 의 진동수 변화를 보이는 Fig. 16에서 보면 원판의 진동이 지배적인 원주방향 파수 $N=0$ 의 진동수는 셀의 길이/반경 비 변화에 무관함을 나타내고 다른 원주방향 파수에서는 원통셀의 길이가 길어질수록 원판이 조합 원통셀의 진동에 주는 영향이 작아져서 원통셀의 고유진동수 변화추이와 같은 진동수의 변화를 보인다.

또한 축방향 반파수 $M=2$ 에서도 마찬가지로 길이/반경 비가 커질수록 셀의 낮은 진동수가 지배적인 진동이 되어 원판의 결합이 조합원통셀의 진동수에 주는 영향은 작아짐을 보인다.

이러한 길이/반경 비에 따른 진동특성을 이용하여 공진이 일어나는 외력 진동수가 알려져 있을 경우 공진을 피하기 위한 길이/반경 비 및 셀, 원판의 제원을 결정할 수 있을 것으로 보인다.

5. 결 론

비대칭 경계조건을 갖는 외팔 원통셀의 축방향 임의 위치에 원판이 결합되어 있을 경우의 고유진동 해석을 동적응답법을 사용하여 이론적인 수식전개를

완성하고 프로그램을 작성하여 수치해를 얻었다.

이론해로부터 얻은 수치결과를 범용의 유한요소 코드인 ANSYS 코드 해석의 결과 및 고유진동 시험의 결과를 비교하여 이론적 수치해의 타당성을 검토하였다. 또 원판의 두께 및 결합 위치가 조합 원통셀의 고유진동수에 주는 영향을 알아보기 위하여 원판의 두께 및 결합 위치를 변화시켜 가며 계산하고 셀의 길이/반경 비에 따른 고유진동수의 변화를 구하였다. 이들 결과에 대한 검토 고찰을 통하여 다음의 결론을 얻었다.

(1) 이론해석으로 얻은 고유진동수는 유한요소 해석 및 시험 결과와 일치하는 경향을 보이고 수치적으로는 유한요소 해석의 결과에 보다 잘 일치한다.

(2) 원판 결합이 조합 원통셀의 진동수 변화에 주는 영향은 원판의 지배 진동 모드인 저차의 원주 방향 파수 N 에서는 진동수를 크게 낮춘다.

(3) 원주방향 파수가 증가할수록 원판 결합이 진동수에 주는 영향은 감소한다.

(4) 결합되는 원판의 두께가 작으면 원판의 낮은 진동수의 진동 모드가 지배적이 되어 원주방향 파수 증가에 따라 셀의 진동수 변화와는 다르게 변하는 선형적인 진동수 변화추이를 보인다.

(5) 원주방향 파수 $N=0$ 모드에서는 원판 지배진동 모드가 되어 조합 원통셀의 진동수를 크게 감소시킨다.

(6) 흔들림 진동모드를 보이는 $N=1$ 모드에서는 원판의 두께 영향이 진동수에 주는 영향은 크지 않으며 타원형 진동모드를 보이는 $N=2$ 에서는 원판이 결합되므로써 진동수의 증가에 가장 크게 기여를 한다.

(7) 원판결합 위치가 조합 원통셀의 진동수에 주는 영향은 셀의 진동이 가장 크게 나타나는 원주 방향 파수 $N=2$ 일 때 가장 크며 N 이 증가할수록 원판이 진동수에 주는 영향은 작게 나타난다.

(8) $N=0, 1$ 모드는 원판의 지배진동 모드이므로 원판이 결합되는 위치에 관계없이 조합원통셀의 고유진동수는 원판의 진동수에 종속됨을 보인다.

(9) 조합 원통셀의 길이/반경 비가 커 질수록, 즉, 원통셀의 길이가 증가 할수록 원판 결합이 진동수에 주는 영향이 작아지며 포물선 형상의 고유진동수 변화를 하고 원판의 진동수 영향은 원주방향 모드 $N=0$ 일 때에 국한하여 나타난다.

참고 문헌

(1) Kraus, H., 1967, "Thin Elastic Shells," John

Wiley & Sons Inc., New York.

(2) Faulkner, L., 1969, Ph. D., Thesis, Purdue University, Vibration Analysis of Shell Structures Using Receptances.

(3) Soedel, W., 1993, "Vibration of Shells and Plates," Marcel Dekker Inc., New York, 2nd edition.

(4) Huang, D. T. and Soedel, W., 1991, "Natural Frequencies and Modes of a Circular Plate Welded to a Circular Cylindrical Shell at Arbitrary Axial Positions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 162, No. 3, pp. 403~427.

(5) Huang, D. T. and Soedel, W., 1993, "On the Free Vibration of Multiple Plates Welded to a Cylindrical Shell with Special Attention to Mode Pairs," Journal of Sound and Vibration, Vol. 166, No. 2, pp. 315~339.

(6) Huang, D. T. and Soedel, W., 1993, "Study of the Forced Vibration of Shell-Plate Combinations Using the Receptance Method," Journal of Sound and Vibration, Vol. 166, No. 2, pp. 341~369.

(7) Azimi, S., Soedel, W. and Hamilton, J. F., 1986, "Natural Frequencies and Modes of Cylindrical Polygonal Ducts Using Receptance Methods," Journal of Sound and Vibration, Vol. 108, No. 1, pp. 78~88.

(8) Mead, D. J. and Lee, S. M., 1984, "Receptance Methods and the Dynamics of Disordered One-Dimensional Lattices," Journal of Sound and Vibration, Vol. 92, No. 3, pp. 427~445.

(9) Soedel, W., 1976, "Shell and Plate Loaded by Dynamic Moments with Special Attention to Rotating Point Moments," Journal of Sound and Vibration, Vol. 48, No. 2, pp. 179~188.

(10) Yim, J. S., Lee, Y. S. and Sohn, D. S., 1996, "Free Vibration Analysis of Clamped-Free and Clamped-Free with Ring Stiffened Circular Cylindrical Shells", Advanced in Computational Method for Simulation, Civil Comp. Press, Edinburgh, pp. 247~262.

(11) 임정식, 1996, "일단고정-일단자유 원통셀의 고유진동해석," 한국소음진동공학회지, 제6권, 제1호, pp. 45~56.

(12) Sharma, C. B., 1974, "Calculation of Natural Frequencies of Fixed-Free Circular Cylindrical

Shells", Journal of Sound and Vibration, Vol. 35,
No. 1, pp. 55~76.
(13) Galletely, G. D. and Mistry, J., 1974, "The Free

Vibration of Cylindrical Shells with Various End
Closures," Nuclear Engineering and Design, Vol.
30, pp. 249~268.