

< 논 문 >

동적 유한요소에 의한 회전축 계의 진동 해석

Vibration Analysis of Rotor Systems Using Finite Dynamic Elements

양 보 석* · 황 형 섭**

B. S. Yang and H. S. Hwang

(1997년 2월 20일 접수 ; 1997년 3월 21일 심사완료)

Key Words : Finite Dynamic Element (동적유한요소), Whirl Speed (휘돌림 속도), Stability (안정성), Unbalance Response (불평형응답), Internal Damping (내부감쇠), Axial Torque (축토크), Axial Force (축력)

ABSTRACT

A rotor-bearing system has been investigated, including internal damping and axial torque using finite dynamic elements. A procedure is presented for dynamic modeling of rotor-bearing system which consist of finite dynamic shaft elements, rigid disk, and bearing and seal. A finite dynamic element model including the effects of rotatory inertia, gyroscopic moments, axial force, and axial torque is developed using the frequency dependent shape function. The natural whirl speeds, stability, and unbalance response of rotor system are calculated on several cases and compared with the conventional finite elements.

1. 서 론

회전축계의 진동해석에는 전달행렬법 (transfer matrix method) 과 유한요소법 (finite element method) 이 널리 이용되고 있다. 유한요소법은 Ruhl⁽¹⁾에 의해 회전축 요소에 도입된 이래로 Nelson 등^(2~5)과 여러 연구자^(6,7)에 의해 발전되어 왔다. 이 방법은 분포 축 요소로부터 유도된 요소질량 및 강성행렬을 기초로 경계조건과 적합성 (compatibility) 을 이용하여 계 전체의 질량 및 강성행렬을 구성하고 있다. 그러나 이 방법은 요소 양단의 절점에 정적인 전단력과 모멘트가 작용한다고 가정한 정적변위에 근거한 정적 형상함수 (static shape function) 를 이용하여 요소행렬을 유도한다. 그러나 동적인 문제에서

는 변위가 절점변위의 직전 시간이력 (time history) 에 의존되므로 일의적으로 표현할 수 없다. 그러나 계가 조화운동을 하는 경우는 절점변위의 순시치와 조화운동의 진동수 ω 의 함수로 나타낼 수 있다⁽⁸⁾. 즉

$$u(x, \omega, t) = N(x, \omega) U(t) \\ N(x, \omega) = N_0(x) + \omega N_1 + \omega^2 N_2(x) + \dots$$

로 되고, 형상함수 N 이 진동수의 함수가 되므로 자유진동을 하는 계의 엄밀한 질량 및 강성행렬은 진동수 종속의 행렬로 나타낼 수 있다. 종래의 유한요소 모델은 단지 정적변위의 가정에 의한 형상함수 $N_0(x)$ 만을 이용하였으므로 동적문제에 대한 고유치 해석의 경우, 엄밀해와 오차를 발생시키게 되고, 이러한 오차를 줄이기 위해서 동적수정항이 필요하게 된다. 이에 관한 시도로 Yang 등⁽⁹⁾은 병진 및 회전관성, 자이로스코픽 모멘트, 질량불평형 등을 고려하고 진동수 종속인 형상함수를 이용하여 회전축계

*정회원, 부경대학교 공과대학 기계공학과
**부경대학교 대학원 (현 영풍정밀 기술연구소)

에 대한 동적 유한요소 모델(finite dynamic element model, FDEM)을 유도하고, 이 요소들과 동강성행렬 사이의 관계를 조사하였다⁽¹⁰⁾.

본 논문에서는 동적 유한요소 모델을 일반화하기 위한 시도로서 축요소의 내부점성 및 히스테릭감쇠, 축력 및 축토크의 효과를 고려한 동적 유한요소를 확장하였다. 그리고 계산 예를 통하여 종래의 유한요소모델(FEM)과 비교하여 해의 수렴특성 등 그 유용성을 검토하여, 본 연구에서 제안하는 동적 유한요소가 기존의 유한요소 모델에 비해 수렴특성이 양호함을 확인하였다.

2. 좌표계 및 형상함수

자이로스코픽과 회전관성의 효과를 고려한 Rayleigh 축 요소에 대한 운동방정식은

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho I \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - i2\Omega \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right) = 0 \quad (1)$$

로서 표현된다. 여기서 E , I , ρ , A 와 Ω 는 각각 Young 계수, 관성모멘트, 밀도, 단면적 그리고 회전각속도이고, $u = u_y + iu_z$ 이다. 동적 유한요소법에서의 모든 변위는 진동수 ω 에 종속인 형태로서 구성이 된다⁽⁹⁾.

병진변위 u 는 주파수 ω 에 종속으로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, \omega, t) &= \begin{Bmatrix} u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_i(x, \omega) \mathbf{U}(t) \\ &= \{ \mathbf{N}_{i0}(x) + \omega \mathbf{N}_{i1}(x) + \omega^2 \mathbf{N}_{i2}(x) \\ &\quad + \dots \} \mathbf{U}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $\mathbf{N}_i(x, \omega)$ 는 병진변위에 대한 주파수종속 형상함수, $\mathbf{U}(t)$ 는 절점변위의 행렬로서

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{q} e^{i\omega t} \quad (3)$$

이고, \mathbf{q} 는 8개의 절점좌표($q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8$)이다. 유한 회전축 요소에 대한 전형적인 고정좌표계를 Fig. 1에 보이고 있다. 각각의 축 요소는 각 단에서 2개의 병진변위 및 회전변위로서 8자유도 계로 모델링된다. 병진변위에 대한 형상함수를 구하기 위해 식 (2)를 식 (1)에 대입하면 다음식이 얻어진다.

$$EI N_i^{IV} + \rho I \omega^2 \left(1 - 2 \frac{\Omega}{\omega} \right) N_i'' - \rho A \omega^2 N_i = 0 \quad (4)$$

여기서 '는 x 에 대한 미분을 나타낸다. 식 (4)에 급수 전개된 주파수종속 형상함수를 대입하고 ω 의 동

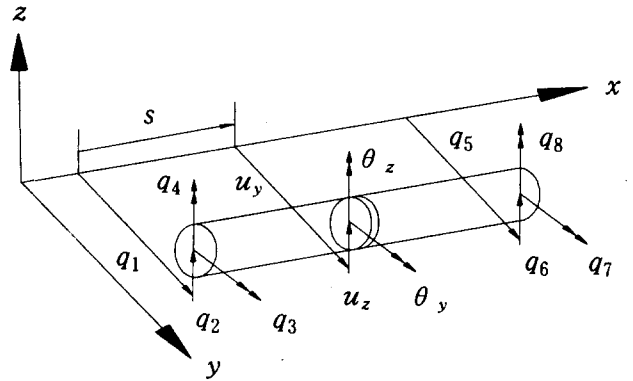


Fig. 1 Typical rotor element and coordinates

일차수식으로 ω 의 3차항까지 정리하면,

$$N_{i0}^{IV} = 0 \quad (5a)$$

$$N_{i1}^{IV} = 2\Omega ar^2 N_{i0}'' \quad (5b)$$

$$N_{i2}^{IV} = \alpha N_{i0} - ar^2 N_{i0}'' + 2\Omega ar^2 N_{i1}'' \quad (5c)$$

$$N_{i3}^{IV} = \alpha N_{i1} - ar^2 N_{i1}'' + 2\Omega ar^2 N_{i2}'' \quad (5d)$$

이다. 여기서 $\alpha = \rho A / EI$ 와 $r^2 = I / A$ 이다. 식 (5a)에 대한 경계조건은 기존 유한요소법의 경우와 같고, 고차의 계수 N_{i1}, N_{i2}, N_{i3} 에 대해서는 단지 0의 경계조건만을 고려한다. 따라서 병진변위의 형상함수 행렬은 다음과 같은 형태로 된다⁽⁹⁾.

$$\begin{aligned} N_i(\eta, \omega) &= N_{i0}(\eta) + \omega N_{i1}(\eta) + \omega^2 N_{i2}(\eta) \\ &\quad + \omega^3 N_{i3}(\eta) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $\eta = s/l$ 이고, l 은 요소의 길이이다.

회전변위에 대한 형상함수를 구하기 위해 다음과 같은 회전변위(θ_y, θ_z)와 병진변위(u_y, u_z)사이의 관계를 이용한다.

$$\theta_y = -\partial u_z / \partial s, \quad \theta_z = \partial u_y / \partial s \quad (7)$$

따라서 회전변위는 다음과 같이 표현된다.

$$\boldsymbol{\theta}(\eta, \omega, t) = \begin{Bmatrix} \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_r(\eta, \omega) \mathbf{q} e^{i\omega t} \quad (8)$$

여기서 $\mathbf{N}_r(\eta, \omega)$ 은 회전에 대한 형상함수 행렬⁽⁹⁾이다.

$$\begin{aligned} N_r(\eta, \omega) &= N_{r0}(\eta) + \omega N_{r1}(\eta) + \omega^2 N_{r2}(\eta) \\ &\quad + \omega^3 N_{r3}(\eta) + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

3. 요소 행렬의 유도

각 요소의 행렬들은 운동에너지 및 포텐셜에너지를 이용해서 구할 수 있다.

3.1 유한 축 요소

(1) 질량행렬

병진질량과 회전관성에 대응하는 총 운동에너지는 다음과 같다.

$$T^e = \frac{1}{2} \int_0^l m \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} ds + \frac{1}{2} \int_0^l I_d \{\dot{\theta}\}^T \{\dot{\theta}\} ds \quad (10)$$

여기서 m 과 I_d 는 각각 질량과 단위길이당의 직경관성모멘트이다. 식 (2)와 (8)을 시간에 대해 미분하여 식 (10)에 대입하고, 요소 길이에 대해 적분하면 총 운동에너지를 얻을 수 있다.

$$T^e = \frac{1}{2} \{\dot{q}_e\}^T ([M_t^e] + [M_r^e]) \{\dot{q}_e\} \quad (11)$$

여기서 $[M_t^e]$ 와 $[M_r^e]$ 은 각각 축요소의 병진 및 회전에 대한 질량행렬이다.

$$[M_t^e] = \int_0^l m [N_t]^T [N_t] ds = [M_t]_0 + \omega [M_t]_1 + \omega^2 [M_t]_2 + \omega^3 [M_t]_3 + \dots \quad (12a)$$

$$[M_r^e] = \int_0^l I_d [N_r]^T [N_r] ds = [M_r]_0 + \omega [M_r]_1 + \omega^2 [M_r]_2 + \omega^3 [M_r]_3 + \dots \quad (12b)$$

(2) 내부감쇠를 고려한 요소의 강성 행렬 및 감쇠 행렬

Zorzi와 Nelson⁽³⁾은 다음과 같은 응력-변형율의 관계를 가정하여 요소의 히스테릭감쇠 및 점성감쇠의 효과를 고려하고 있다.

$$\sigma_x = E \left\{ \frac{\epsilon_x}{\sqrt{1 + \eta_H^2}} + \left(\eta_V + \frac{\eta_H}{\sqrt{1 + \eta_H^2} \omega} \right) \dot{\epsilon}_x \right\} \quad (13)$$

탄성굽힘에 기인하는 포텐셜에너지 P^e 와 소산합수 D^e 는

$$P^e = \frac{1}{2} \int_0^l EI \{u''\}^T [\eta] \{u''\} ds \quad (14a)$$

$$D^e = \frac{1}{2} \int_0^l \eta_V EI \{\dot{u}''\}^T \{\dot{u}''\} ds \quad (14b)$$

여기서 $[\eta]$ 는 내부감쇠 행렬로서 다음과 같이 정의된다.

$$[\eta] = \begin{bmatrix} \eta_a & \eta_b \\ -\eta_b & \eta_a \end{bmatrix}, \quad \eta_a = \frac{1 + \eta_H}{\sqrt{1 + \eta_H^2}}, \quad \eta_b = \frac{\eta_H}{\sqrt{1 + \eta_H^2}} + \Omega \eta_V \quad (15)$$

여기서 η_V 와 η_H 는 각각 회전축 재료에 대한 점성감쇠 및 히스테릭 손실계수를 나타낸다. 따라서 내부 점성감쇠와 히스테릭감쇠를 갖는 유한 요소의 포텐셜에너지는 다음과 같다.

$$P^e = \frac{1}{2} \eta_a \{q_e\}^T [K_a^e] \{q_e\} + \frac{1}{2} \eta_b \{q_e\}^T [K_b^e] \{q_e\} \quad (16)$$

여기서 $[K_a^e]$ 는 굽힘에 기인하는 강성행렬이다.

$$[K_a^e] = \int_0^l EI [N_t]''^T [N_t] [N_t]'' ds = [K_a^e]_0 + \omega^2 [K_a^e]_2 + \omega^3 [K_a^e]_3 + \dots \quad (17a)$$

$$[K_b^e] = [N_b] [K_b^e] = [K_b^e]_0 + \omega^2 [K_b^e]_2 + \omega^3 [K_b^e]_3 + \dots \quad (17b)$$

여기서 $[N]$ 과 $[N_b]$ 는 각각 변환행렬(transformation matrix)로서 다음과 같이 정의된다.

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[N_b] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

그리고, 축 요소에 대한 축 내부의 소산에너지 D^e 는

$$D^e = \frac{1}{2} \eta_V \{\dot{q}_e\}^T [K_d^e] \{\dot{q}_e\} \quad (18)$$

(3) 축력 및 축 토크에 의한 강성행렬

먼저 축 요소에 축력(axial force) P 가 작용하는 경우, 축력에 의한 포텐셜에너지⁽⁴⁾는

$$P_a^e = \frac{1}{2} \int_0^l P \{q_e\}^T \{u'\}^T \{u'\} \{q_e\} ds = \frac{1}{2} \{q_e\}^T [K_a^e] \{q_e\} \quad (19)$$

여기서 $[K_a^e]$ 는 축력에 의해 기인하는 강성행렬로서 다음과 같다.

$$[K_a^e] = \int_0^l P [N_t]'^T [N_t]' ds = [K_a^e]_0 + \omega [K_a^e]_1 + \omega^2 [K_a^e]_2 + \omega^3 [K_a^e]_3 + \dots \quad (20)$$

다음으로 축 토크 T 가 작용하는 경우, 축의 굽힘에 영향을 미치는 축 토크의 변분일(variational work)이 실제 경로에서 변화된 경로까지의 변분변위에 대한 비보존력으로서 정의될 수 있다⁽⁴⁾. 즉 축 토크로 인해 발생하는 변분일은

$$\delta W_t = \int_0^l T \{u'\}^T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \{\delta u''\} ds = ([K_t^e] \{q_e\})^T \delta \{q_e\} \quad (21)$$

여기서 T 는 축 토크이고, $[K_i^e]$ 는 축 토크에 기인하는 강성행렬로서 다음과 같다.

$$[K_i^e] = \int_0^l T [N_i^e]^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} [N_i] ds$$

$$= [K_i^e]_0 + \omega [K_i^e]_1 + \omega^2 [K_i^e]_2 + \omega^3 [K_i^e]_3 + \dots \quad (22)$$

(4) 요소의 자이로스코픽 행렬

회전체의 회전과 각 회전 $\{\theta\}$ 사이의 자이로스코픽 연성에 기인하는 요소의 운동에너지는

$$T_g = \frac{1}{2} \int_0^l I_p \Omega \{\theta\}^T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \{\dot{\theta}\} ds$$

$$= \frac{1}{2} \Omega \{q_e\}^T [G] \{\dot{q}_e\} \quad (23)$$

로 되고, 여기서 $[G^e]$ 는 요소의 자이로스코픽 행렬이다.

$$[G^e] = \int_0^l I_p [N_r]^T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [N_r] ds$$

$$= [G]_0 + \omega [G^e]_1 + \omega^2 [G^e]_2 + \omega^3 [G^e]_3 + \dots \quad (24)$$

(5) 요소의 운동방정식

Lagrange 방정식을 이용하여 내부감쇠, 축력 및 축 토크를 포함하는 경우의 축요소의 운동방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$([M_i^e] + [M_i^f]) \{\ddot{q}_e\} + (\eta_v [K_i^e] - \Omega [G^e]) \{\dot{q}_e\}$$

$$+ \left[\frac{1 + \eta_H}{\sqrt{1 + \eta_H^2}} [K_i^e] + \left(\eta_v \Omega + \frac{\eta_H}{\sqrt{1 + \eta_H^2}} \right) [K_i^e] \right. \\ \left. - [K_a^e] - [K_i^e] \right] \{q_e\} = \{F^e\} \quad (25)$$

여기서 $\{F^e\}$ 는 질량 불평형력 및 다른 외력요소를 일반화시킨 힘벡터이다.

3.2 원판요소

질량 m_a , 직경 질량관성모멘트 I_a , 극관성모멘트 I_b 인 강체원판의 운동방정식은 원판의 운동에너지와 원판의 질량중심에 대한 편심량에 의한 불평형력으로 쓸 수 있다. 먼저 운동에너지와 불평형력 벡터를 구한 후 Lagrange 방정식을 이용함으로써 원판의 운동에너지를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[M^d] [\ddot{q}_d] - \Omega [G_d] [\dot{q}_d] = \{F^d\} \quad (26)$$

여기서

$$[M^d] = \begin{bmatrix} m_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_a \end{bmatrix}, \quad [G^d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_b \\ 0 & 0 & -I_b & 0 \end{bmatrix}$$

3.3 베어링요소

베어링을 모델링하기 위해 8개의 강성 및 감쇠계수를 가진 선형화된 모델을 이용한다. 본 모델에 있어서 각 베어링에서의 힘은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zy} & c_{zz} \end{bmatrix} \{\dot{q}_b\} + \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \{q_b\} = \{F^b\} \quad (27)$$

여기서 c_{ij} 와 k_{ij} 는 베어링에 대한 감쇠 및 강성계수이며, $\{F^b\}$ 는 베어링력 벡터이다.

3.4 불평형력 벡터

요소에 분포된 불평형력에 기인하는 요소의 대안 가상일은

$$\delta W_u = \{\delta q\}^T (\{F_c\} \cos \Omega t + \{F_s\} \sin \Omega t) \quad (28)$$

여기서

$$\{F_c\} = m \Omega^2 \int_0^l [N_i]^T \begin{bmatrix} e_y(s) \\ e_z(s) \end{bmatrix} ds$$

$$= \{F_c\}_0 + \omega \{F_c\}_1 + \omega^2 \{F_c\}_2 + \dots \quad (29a)$$

$$\{F_s\} = m \Omega^2 \int_0^l [N_i]^T \begin{bmatrix} -e_y(s) \\ e_z(s) \end{bmatrix} ds$$

$$= \{F_s\}_0 + \omega \{F_s\}_1 + \omega^2 \{F_s\}_2 + \dots \quad (29b)$$

여기서 $e_y(s)$ 와 $e_z(s)$ 는 편심량이다. 각 요소에 대해 질량불평형이 선형적이라면, 편심량은

$$e_y(s) = \eta_L \left(1 - \frac{s}{l} \right) + \eta_R \left(\frac{s}{l} \right),$$

$$e_z(s) = \xi_L \left(1 - \frac{s}{l} \right) + \xi_R \left(\frac{s}{l} \right)$$

이고, 여기서 (η_L, ξ_L) 와 (η_R, ξ_R) 은 $s=0$ 과 $s=l$ 에서의 질량편심량이다.

3.5 계의 운동방정식

전체 계의 운동방정식은 요소의 운동방정식으로부터 다음과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{F\} \quad (30)$$

여기서 $[M]$, $[C]$ 및 $[K]$ 는 각각 동적 유한요소에 의해 유도된 조합된 전체 질량, 감쇠 및 강성행렬이고, 힘 $\{F\}$ 는 불평형력 벡터이다.

4. 휘돌림속도

자유진동 문제로 가정함으로써 계의 고유치를 해석한다. 따라서 계의 운동방정식은

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (31)$$

이고, 조화해 $\{q\} = \{q_0\}e^{i\omega t}$ 를 가정하여 식 (31)에 대입한 후 ω 에 대한 차수 식⁽⁹⁾으로 다음과 같은 형태로 구성한다.

$$([C_0] - \beta[C_1] - \beta^2[C_2] - \beta^3[C_3] - \beta^4[C_4] - \dots)\{q_0\} = \{0\} \quad (32)$$

여기서 $\beta = i\omega$ 이고, 각각의 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [C_0] &= [K]_0, [C_1] = \Omega[G]_0, [C_2] \\ &= -[M]_0 - \Omega[G]_1 + [K]_2 \\ [C_3] &= [M]_1 + \Omega[G]_2 - [K]_3, [C_4] \\ &= [M]_2 + \Omega[G]_3 - [K]_4 \end{aligned}$$

계의 고유치는 식 (32)를 일반화된 고유치 형태로 변환하여 구할 수 있다.

$$[A][S]\{q_0\} = \beta[B][S]\{q_0\} \quad (33)$$

여기서 β 는 고유치, $[S]\{q_0\}$ 는 고유벡터이고, 각각의 행렬은 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} 0 & [I] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [I] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [I] \\ -[C_0] & [C_1] & [C_2] & [C_3] \end{bmatrix}, \\ [B] &= \begin{bmatrix} [I] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [I] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [I] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -[C_4] \end{bmatrix} \\ [S] &= [1 \ \beta \ \beta^2 \ \beta^3]^T \end{aligned}$$

5. 불평형응답

식 (30)에 대한 불평형력 벡터는

$$\{F\} = \{F_c\}\cos\Omega t + \{F_s\}\sin\Omega t \quad (34)$$

정상상태 운동인 경우, 외력과 같은 형태로 다음과 같이 가정한다.

$$\{q\} = \{q_c\}\cos\Omega t + \{q_s\}\sin\Omega t \quad (35)$$

식 (34)와 (35)를 식 (30)에 대입한 후, sine과 cosine 성분으로 각각 분해하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \{q_c\} \\ \{q_s\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K] - \Omega^2[M] & \Omega[C] \\ -\Omega[C] & [K] - \Omega^2[M] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \{F_c\} \\ \{F_s\} \end{bmatrix} \quad (36)$$

식 (36)의 해를 식 (35)에 대입함으로써 불평형응답을 계산할 수 있다.

6. 수치 예

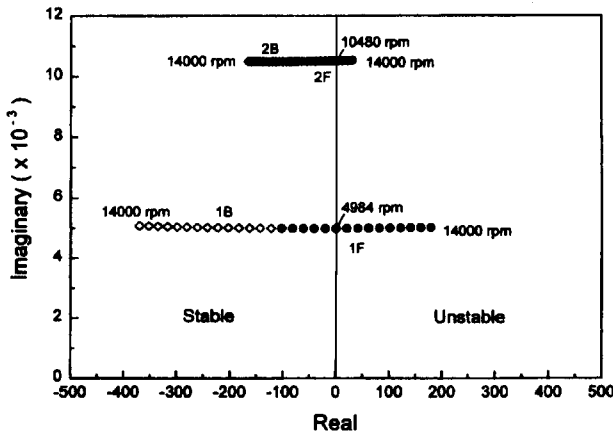
FEM과 FDEM의 고유진동수 수렴특성과 내부감쇠, 축토크, 축력을 고려한 경우의 휘돌림 속도와 안정한계를 검토하기 위해 여러 가지 경우에 대해서 수치계산을 하였다. 대상으로는 축의 길이 $l=1.27$ m, 직경 $d=0.1016$ m이고, $\rho=7806$ kg/m³, $E=2.075 \times 10^{11}$ N/m²이다. 먼저 FEM과 FDEM의 계산 정도를 비교하기 위해 양단 단순지지된 경우, 축 요소수의 변화에 대해 엄밀해 (11)와 비교하여 Table 1에 제시하였다. ω^4 항까지의 동적수정항을 포함한 FDEM의 경우가 작은 요소수임에도 불구하고, FEM보다 더 좋은 정도로서 엄밀해에 수렴하고 있다. 두 번째는 내부감쇠의 영향을 조사하기 위해 FDEM을 이용하여 점성감쇠 및 히스테릭 감쇠를 가

Table 1 Convergence characteristics of whirl frequencies ($\Omega=3,000$ rpm)

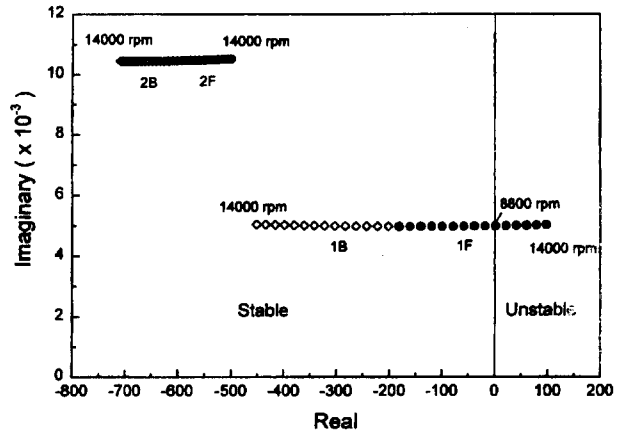
Element No.	1st mode (cpm)		2nd mode (cpm)		3rd mode (cpm)	
	FEM	FDEM	FEM	FDEM	FEM	FDEM
2	7679.19	7649.07	33752.42	30890.16	83939.21	74226.50
3	7655.23	7649.06	30775.68	30426.55	75205.31	68840.41
4	7651.03	7649.06	30536.83	30417.21	69015.18	67842.07
5	7649.87	7649.06	30467.33	30417.20	68318.31	67790.44
6	7649.44	7649.06	30441.62	30417.20	68048.62	67782.86
Exact[11]	7649.05		30417.00		67781.90	

진 Rayleigh 축 요소의 휘돌림속도와 대수감쇠율을 계산하였다. 축의 제원은 첫 번째예와 같고, 지지조건은 베어링강성 $k_{yy}=k_{zz}=17.5 \text{ MN/m}$, 베어링감쇠 $c_{yy}=c_{zz}=1.75 \text{ kN}\cdot\text{s/m}$ 인 등방성베어링으로 지지되고, 운전속도는 3,000 rpm이다. Table 2에서 알 수 있듯이 FDEM에 의해 구한 휘돌림 진동수가 FEM의 결과보다 약간 낮으며, 고차로 갈수록 그 차가 증가한다. FDEM의 동적보정항의 효과가 고차모드에서 크게 작용함을 알 수 있다. Fig. 2는 비감쇠 등

방성베어링과 감쇠베어링으로 지지된 경우 안정 한계 (stability threshold)를 나타내는 근계적선도이다. Fig. 2(a)는 비감쇠베어링으로 강성 $k_{yy}=k_{zz}=17.5 \text{ MN/m}$, $k_{zy}=k_{yz}=0$ 이고, 내부감쇠 ($\eta_v=0.0002\text{s}$)를 고려한 경우, 1차 전향모드 성분(1F)의 안정한계는 1차 위험속도인 4,984 rpm에서 발생하였다. 이 모드는 안정한계보다 높은 운전속도에서는 불안정하게 되고, 2차 전향모드성분(2F)는 2차 위험속도(10,480 rpm)에서 불안정하게 된다. 베어링의 감쇠가 $c_{yy} =$



(a) undamped isotropic bearing



(b) damped isotropic bearing

Fig. 2 Root locus ($\eta_v=0.0002 \text{ s}$)

Table 2 Whirl frequencies and logarithmic decrements of Rayleigh shaft supported by damped isotropic bearing ($\Omega=3,000 \text{ rpm}$)

Mode	Whirl frequencies(cpm)/logarithmic decrements			
	$\eta_v=0.0002 \text{ s}$		$\eta_H=0.0002$	
	FEM	FDEM	FEM	FDEM
1B	4988.42/0.3075	4986.64/0.3055	4984.34/0.0993	4982.57/0.0993
1F	4984.17/0.1509	4982.41/0.1506	4988.31/0.0994	4986.53/0.0992
2B	10465.13/0.3850	10450.21/0.3840	10463.63/0.3194	10448.85/0.3180
2F	10480.41/0.3568	10465.76/0.3547	10489.07/0.3192	10474.12/0.3178
3B	21152.31/0.1300	21082.83/0.1286	21498.64/0.2679	21410.54/0.2643
3F	21266.66/0.1045	21197.72/0.1031	21609.17/0.2666	21518.74/0.2630

Table 3 Comparison of whirl speed for considering axial torque ($H=1, \Omega=3000 \text{ rpm}$)

Element No.	1st mode(cpm)		2nd mode(cpm)		3rd mode(cpm)	
	FEM	FDEM	FEM	FDEM	FEM	FDEM
2	1208.05	1202.67	5385.47	4922.25	13556.47	12012.60
3	1203.45	1202.46	4900.32	4843.63	12122.38	11091.84
4	1202.64	1202.32	4860.45	4841.85	11113.72	10923.65
5	1202.41	1202.24	4848.81	4841.61	10998.87	10914.57
6	1202.33	1201.91	4844.49	4841.50	10954.39	10913.03

Table 4 Comparison of whirl speed for considering axial force ($F=1$, $\Omega=3000$ rpm, simple supported)

Element No.	1st mode (cpm)		2nd mode (cpm)		3rd mode (cpm)	
	FEM	FDEM	FEM	FDEM	FEM	FDEM
2	1156.80	1151.87	5336.93	4876.03	13501.60	11930.32
3	1152.80	1151.78	4855.48	4799.38	12076.97	11047.43
4	1152.10	1151.70	4816.82	4797.64	11070.80	10880.97
5	1151.91	1151.64	4805.57	4797.46	10957.39	10872.14
6	1151.83	1151.63	4801.41	4797.43	10913.52	10870.63

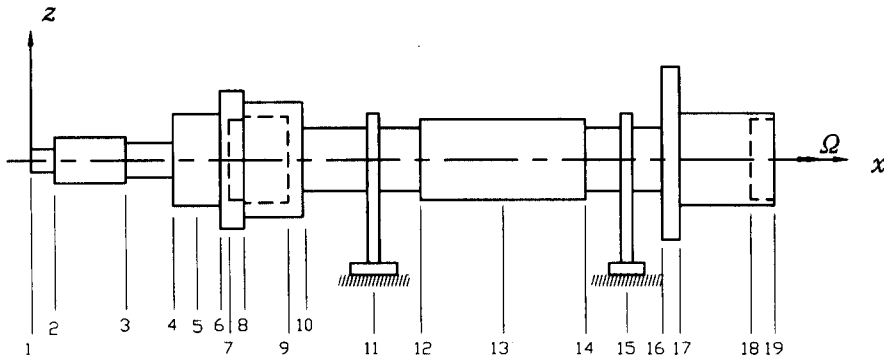


Fig. 3 System configuration

$c_{zz}=1.75$ kN·s/m, $c_{zy}=c_{yz}=0$ 인 등방성베어링을 부가함으로써 1차 모드성분의 안정한계가 약 8,800 rpm으로 상승하였고, 고차모드의 성분은 전체 운전 영역에 대해 안정함을 보였다.

Table 3과 Table 4는 각각 축토크와 축력을 고려한 경우의 휘둘림속도를 FEM과 FDEM의 계산결과를 비교한 것이다. 계는 단순지지된 Rayleigh 축요소로서 $l=1$ m, $d=0.01$ m, 세장비 $d/4l=0.0025$, 무차원 토크 $H=TI/EI=1$, 무차원 축력 $F=Pl/EI=1$ 이다. FDEM에 의한 휘둘림속도가 FEM의 경우보다 작은 요소수에서 좋은 정도를 가지는 것을 알 수 있고, 고차모드일수록 오차가 큰 것을 알 수 있다.

다음은 일반적인 회전축계의 경우 내부감쇠를 고려하였을 때 휘둘림속도와 불평형응답을 조사하기 위해 Fig. 3에 보이는 것과 같이 Nelson과 Meacham⁽⁶⁾에 의해 사용된 회전축계를 고려한다. 재료의 밀도 $\rho=7806$ kg/m³이고, Young계수 $E=2.075 \times 10^{11}$ N/m²이다. 축계의 기본 데이터는 Table 5와 같다. 축요소는 총 18개이고, 질량 $m_a=1.401$ kg, 단면관성모멘트 $I_d=0.00136$ kg·m², 극관성모멘트 $I_p=0.00203$ kg·m²인 부가질량을 5번 절점에 부착하였다. 지지베어링은 등방성베어링으로 절점 11과 절점

15에 선형 강성특성과 감쇠특성을 가지고 있다. 내부감쇠는 $\eta_v=0.000015$ s, $\eta_H=0.1$ 이다. Fig. 4에서

Table 5 Rotor configuration data

Element No.	Length of element (m)	Inner diameter (m)	Outer diameter (m)
1	0.0127		0.0102
2	0.0381		0.0204
3	0.0254		0.0152
4	0.0127		0.0406
5	0.0127		0.0406
6	0.0051		0.0660
7	0.0076	0.0304	0.0660
8	0.0127	0.0356	0.0508
9	0.0076		0.0508
10	0.0305		0.0254
11	0.0254		0.0254
12	0.0381		0.0304
13	0.0381		0.0304
14	0.0203		0.0254
15	0.0178		0.0254
16	0.0102		0.0762
17	0.0304		0.0406
18	0.0127	0.0304	0.0406

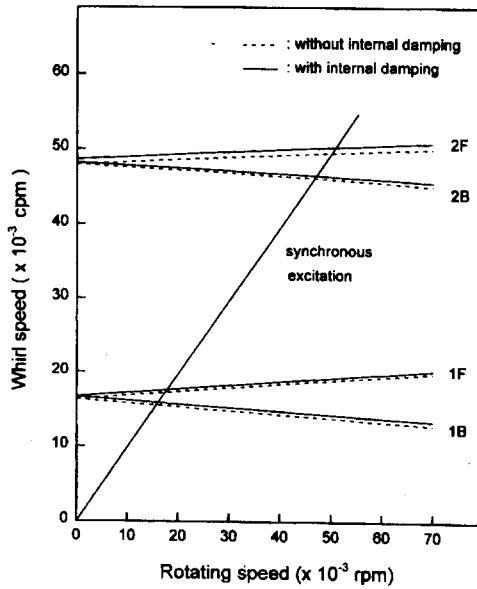


Fig. 4 Campbell diagram

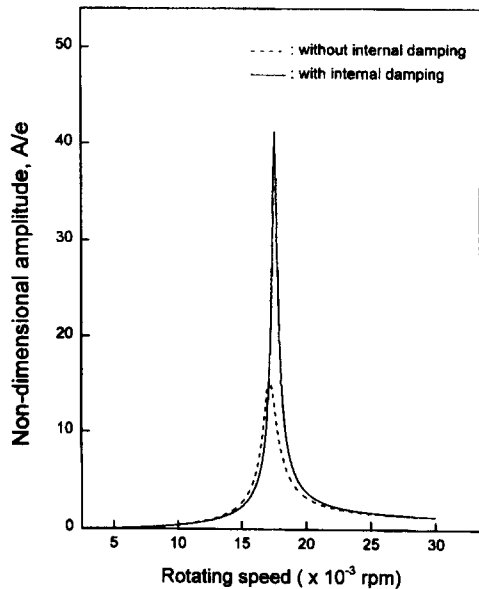


Fig. 5 Unbalance response

파선은 내부감쇠를 고려하지 않은 경우이고, 실선은 내부감쇠를 고려한 경우에 대한 Campbell 선도이다. 내부감쇠를 고려한 경우가 고려하지 않은 경우보다 전향 및 후향 모드성분 모두 높은 휘돌림 고유진동수를 나타낸다. Fig. 5는 1차 위험속도 주위에서의 불평형응답이다. 내부감쇠를 고려한 경우가 내부감쇠를 고려하지 않은 경우보다 높은 회전속도에서 동기화되고, 히스테릭감쇠에 기인하는 불안정성으로 인해 보다 높은 진폭치를 나타내고 있다.

7. 결론

본 연구에서는 종래의 정적 형상함수를 이용한 유한요소모델의 계산 정도를 향상시키기 위해서 진동주파수 종속 형상함수를 이용한 동적 유한요소 모델을 고려하여 내부감쇠, 축토크, 축력의 효과를 고려한 경우에 대한 동적 유한요소를 확장시켰다. 몇가지 계산예를 통하여 동적 유한요소를 이용한 경우의 수치계산을 엄밀해 및 종래의 유한요소의 결과와 비교하였다. 동적 유한요소의 경우가 기존의 유한요소의 경우보다 휘돌림속도의 계산정도가 향상되고 소수의 요소를 이용하여도 수렴특성이 양호함을 알 수 있었다. 내부감쇠를 포함한 경우의 안정성 해석을 통해 점성 및 히스테릭 감쇠는 계를 불안정화시키는 경향이 있으며, 외부베어링의 부차이 계의 안정한계를 향상시키는 것을 알 수 있다. 또 내부감쇠의 유무에 대한 불평형응답을 조사하였고, 히스테릭 효과가 큰 경우 내부감쇠 효과에 기인하여 불평형응답의 진폭치가 증가하는 것을 확인하였다.

참고문헌

- (1) Ruhl, R. L., 1970, "Dynamics of Distributed Parameter Turborotor System: Transfer Matrix and Finite Element Techniques", Ph. D. Thesis, Cornell University, Ithaca, New York.
- (2) Nelson, H. D. and McVaugh, J. M., 1976, "The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements", Trans. ASME, J. of Eng. Pow. May, pp. 593~600.
- (3) Zorzi, E. S. and Nelson, H. D., 1977, "Finite Element Simulation of Rotor-Bearing Systems with Internal Damping", Trans. ASME, J. of Eng. Pow., Jan., pp. 71~75.
- (4) Zorzi, E. S. and Nelson, H. D., 1980, "The Dynamics of Rotor-Bearing Systems with Axial Torque-a Finite Element Approach", Trans. ASME, J. of Mech. Design, Vol. 102, pp. 158~161.
- (5) Nelson, H. D. and Meacham, W. L., 1981, "Transient Analysis of Rotor-Bearing System Using Component Mode Synthesis", ASME Paper No. 81-GT-100
- (6) Nevzat Özgüven, H and Levent Özkan, Z., 1984, "Whirl Speeds and Unbalance Response of

- Multibearing Rotors Using Finite Element”, Trans. ASME, J. of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 106, pp. 72~79.
- (7) Childs, D. W. and Graviss K., 1982, “A Note on Critical-Speed Solutions for Finite-Element -Based Rotor Models”, Trans. ASME, J. of Mech. Design, Vol. 104, pp. 412~416.
- (8) Przemieniecki, J. S., 1986, “Theory of Matrix Structural Analysis”, McGraw-Hill
- (9) Yang, B. S., Pilkey, W. D. and Fergusson, N. J., 1992, “Frequency Dependent Element Matrices for Rotor Dynamics Analysis”, J. of Sound Vibration, Vol. 159(2), pp. 339~351.
- (10) Yang, B. S., and Pilkey, W. D., 1992, “Accurate Approach to Free Vibration Analysis for a Rotating Shaft”, Machine Vibration, Vol. 1(3), pp. 164~170.
- (11) Pilkey, W. D., 1994, “Formulars for Stress, Strain, and Structural Matrices, John Wiley & Sons, p. 881.