

정규모드 동역학을 활용한 비선형 진동

박 철 희

(인하대학교 기계공학과)

1. 머리말

물리계에서 일어나는 동적 현상들은 선형해석만으로 설명하기에는 불충분한 점이 많이 있다. 이는 기계구조물과 같은 실제 계의 진동이 기하학적 비선형성, 강성의 비선형성 또는 경계조건의 비선형성 등의 영향으로 비선형적인 거동을 하기 때문이다. 비선형 진동을 하는 기계 계는 우리 주변에서 쉽게 찾아 볼 수 있는데, 그 예로써 진자운동을 포함하여 동흡진기, 회전체계, 공작기계의 절삭운동, 건마찰(dry friction) 관련 기계장치, 치차 및 기차의 바퀴와 레일 간의 접촉에서 볼수 있는 구분적 선형(piecewise linear) 진동계, 충격 진동계 등을 들 수 있다. 비선형 진동 연구는 limit cycle, 준주기운동(quasiperiodic motion), 점프현상(jump phenomena) 등의 인식에서 시작되어, 과거에는 설명이 안 되어 회피되 왔던 랜덤(random) 형태의 비주기운동에 대한 연구로 까지 발전하고 있다.

비선형 진동을 다루는데 있어서 정규모드(normal mode)를 이용하는 방법이 있다. 일반적으로 선형계는 선형 정규모드(linear normal mode)가 존재하는 것과 같이 비선형계에도 이와 유사한 정규모드가 존재한다는 사실이 연구 보고⁽¹⁾된 바 있다. 비선형계에 존재하는 정규모드는 계의 매개변수(system parameters)에 따라 그 안정성이 바뀔 수 있으며, 만일 안정한 정규모드가 어떤 매개변수에서 그 안정성이 바뀐다면 선형이론으로는 설명될 수 없는 새로운 운동이 일어나고 이러한 운동을 분기모드(bifurcation mode)라고 한다. 안정한 정규모드 및 분기모드를 포함하여 비선형계를 다루는 것을 "정규모드 동역학(normal mode dynamics)"이라고 한다. 정규모드 동역학은 앞에서 언급된 비선형 현상들의 원인규명, 예측, 안정성해석 및 강제진동 해석을 가능하게 한

다. 또한 최근에 활발히 연구되고 있는 혼돈운동(chaotic motion)의 해석도 가능하다.

이 글에서는 정규모드 동역학의 기본이론을 부족하나마 간략하게 설명하고 예를 들어 이해를 돕고자 한다.

2. 기본이론

어떤 대칭성의 비선형 요소를 갖는 시스템은 기계계에서 흔히 볼수 있다. 비선형 계에 존재하는 모드의 안정성이 변화 함에 따라 새로운 모드가 생성되는데 이러한 모드를 분기모드라 하고 이러한 분기모드를 어떻게 찾아낼 것인가가 관심의 대상이 되어왔다. 어떤 기계 구조물의 선형 고유진동수의 비가 $1:N(N=1, 2, 3, \dots)$ 인 경우를 내부공진이라 하며, 이에 대한 연구는 많은 진척을 보아왔다⁽²⁾. 이러한 내부공진조건에 맞지 않을지라도 보다 많은 응답을 예측하거나 또는 계산하는데 본 이론의 목적이 있다. 이 이론의 정성적 접근방법은 "가진 주파수가 비선형 고유진동수와 일치하면 비선형 공진이 발생한다"는 Rosenberg의 관점⁽³⁾을 명백하게 설명할 수 있다는데 그 특징이 있으며, 그 과정을 통하여 비선형 약감쇠 가진계(weakly damped and forced system)의 강제진동을 해석할 수 있다는 데 강점이 있다. 여기에서의 공진이라 함은 비교적 작은 힘에 의해서도 큰 정상상태의 진동을 하는 것을 말한다.

2.1 계의 정의 및 정규모드

계의 운동에너지와 위치에너지가 식 (1)과 같이 표현되는, 강성과 관성이 연성된 2자유도의 비선형 보존계를 생각하자.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 m_{ij}(\mathbf{x}) \dot{x}_i \dot{x}_j$$

$$V = V(\mathbf{x}) \quad (1)$$

$$T + V = h$$

여기서, \mathbf{x} 는 일반화좌표 벡터(generalized coordinate vectors)이고, h 는 총에너지, m_{ij} 는 관성항을, 그리고 (\cdot) 는 시간에 대한 미분을 나타낸다. $V(\mathbf{x})$ 는 양정치(positive definite)성을 갖고, 어떤 총에너지에 대해 계의 운동이 상태공간(configuration space)에서 $h - V(\mathbf{x}) \geq 0$ 의 영역 내에서만 존재한다고 가정한다. 또 $V(-\mathbf{x}) = V(\mathbf{x})$ 이고 $m_{ij}(-\mathbf{x}) = m_{ij}(\mathbf{x})$ 라고 가정한다. 이러한 계는 선형 관점에서 두 개의 정규모드가 존재하는 진동계를 나타낸다.

총에너지 h 가 충분히 작을 때 계는 적분가능하고, 모든 운동은 2차원 불변토러스(invariant torus) 상에 존재한다. 이러한 두 개의 주기운동을 정규모드라 한다. h 가 증가됨에 따라 계의 운동은 더 이상 토러스상에 있지 않고, 일련의 분기과정(series of bifurcation)^(4,5)을 통하여 무수히 많은 주기운동들이 발생한다. 이러한 많은 주기운동을 해석할 일반적인 방법은 알려져 있지 않다. 정규모드는 에너지가 매우 작을 때 선형 정규모드와 같고, 에너지가 커짐에 따라 연속적으로 확장되어 간다. 정규모드에 관한 연구로는 정규모드의 존재성⁽¹⁾, 정규모드의 분기^(6,7), 및 분기모드의 안정성⁽⁸⁾ 등이 있다.

총에너지 h 가 충분히 작을 때 선형 정규모드가 안정하기 때문에 정규모드도 안정하고 총에너지가 증가함에 따라 그들은 불안정해진다. 이러한 안정성의 변화를 Poincare 사상도를 통해 보면, 그림 1과 같이 안정한 타원형 중심점(elliptic center)에서 불안정한 안장점(saddle)으로 대체된다.

이렇게 형성된 안장점은 그림 2와 같이 안정다양체(stable manifold)와 불안정다양체(unstable manifold)가 안장고리(saddle-loop)를 형성하거나 서로 교차하게 된다. 따라서 안장고리 또는 안정 다양체와 불안정다양체가 교차하는 안쪽에 새로운 주기운동(elliptic center)이 생성되고, 이 주기 운동을 분기모드라고 한다.

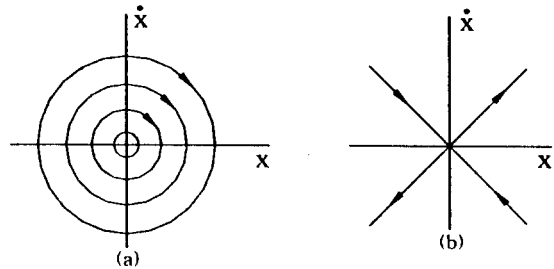


그림 1 해밀토니안계에서 정규모드의 안정성 변화를 보여주는 포앙카레사상도 (a) 안정한 운동 (b) 불안정한 운동

2.2 정규모드의 안정성 해석

정규모드의 안정성을 해석하기 위하여 식 (1)의 계에 대한 운동방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_j m_{ij}(\mathbf{x}) \dot{x}_j \right\} - \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial m_{ik}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \dot{x}_j \dot{x}_k + \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0, \quad i=1, 2 \quad (2)$$

식 (2)의 주기해를 섭동(perturbation)시킴으로써, 방정식의 계수들이 주기함수인 연성된 선형 2계 미분방정식을 얻을 수 있고 그 해의 안정성은 Floquet 이론으로 해석될 수 있다. Floquet 이론을 적용하기 위해서는 4개의 Floquet 지수(exponents)를 모두 계산하여야 하며 이는 매우 어렵다. 그러나 쌓이되는 지수의 합이 영이 된다는 사실^(5,9)이 잘 알려져 있으며, 특히 계가 보존계 일 때 한쌍의 지수는 동시에 0이 되어 남은 2개의 지수만으로 계의 안정성을 결정할 수 있다. 이 때 두 지수가 복소수이면 주기운동은 타원형 중심(elliptically center)으로 안정하며, 실수이면 안장점(saddle)으로 불안정하다. 식 (1)의 2자유도 해밀토니언 보존계(conservative Hamiltonian system)는 Birkhoff 이론⁽¹⁰⁾에 의하여 1자유도 해밀토니언 계로 변환하여 두 지수를 결정함으로써 계의 안정성을 해석 할 수 있으나, 실제적으로 1자유도 계로의 변환은 매우 어렵다.

따라서 해밀토니언 계의 안정성 해석을 위하여는

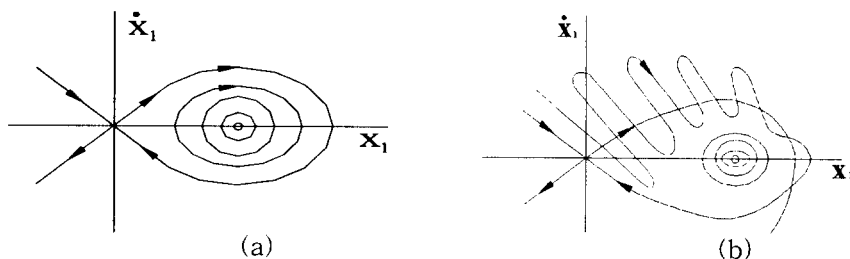


그림 2 안장고리(a)와 안정 및 불안정다양체의 교차(b)에 의한 분기모드의 형성을 보여주는 포앙카레 사상도

리만 기하학(Riemannian geometry)의 개념을 이용한 Synge의 해석이론⁽¹¹⁾을 적용할 수 있다. 이 때 운동방정식은 식 (3)과 같은 Jacobi의 최소 작용원리(least action principle)를 이용한 변분법(calculus of variations)으로 유도된다.

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{2(h - V(\mathbf{x}))} ds = 0,$$

$$ds^2 = \sum_{j,j=1}^2 m_{ij}(\mathbf{x}) dx_i dx_j \quad (3)$$

Synge는 그림 3에서 보는 바와 같이 동시성(simultaneity, Lyapunov sense)이 아닌 직교성(orthogonality)으로 거리벡터(disturbance vector) $\vec{\beta}$ 를 정의하고, 그 크기는 식 (4)와 같이 유도하였다.

$$\vec{\beta} + Q(t)\beta + 2x\delta h = 0 \quad (4)$$

여기서, $Q(t) = Kv^2 + 3x^2v^2 + \sum V_{ij}n_i n_j$ 이며 정규모드를 나타내는 비섭동계적 C 를 따라 결정된다. x 는 C 의 곡률이고, K 는 식 (2)의 Gaussian 곡률, v 는 C 의 속도, $V_{ij} = \nabla \nabla V$ 그리고 δh 는 C 와 섭동계적(perturbed trajectory) 사이의 에너지의 미소한 차이를 나타낸다. 이 때 식 (4)의 모든해가 일정한 범위내에 한정되면 정규모드 C 는 "kinemetic-statical sense"에서 안정하다고 정의된다. 따라서 에너지 h 인 정규모드 C 의 안정성 해석이 가능하다. 즉, 정규모드 C 가 주기성을 갖기 때문에 식 (4)의 계수 $Q(t)$ 는 주기함수가 되어 Floquet 이론을 적용할 수 있다. $Q(t)$ 는 평균값 \bar{Q} 와 변동성분 $\tilde{Q}(t)$ 의 합으로 표현된다. 이 때 식 (4)는 다음과 같은 고유치 문제의 형태가 된다.

$$L\beta = -\bar{Q}\beta \quad (5)$$

여기서 L 은 선형 연산자로 $L = \frac{d^2}{dt^2} + \tilde{Q}(t)$ 로 정의한다.

앞에서 안정성 해석을 통하여 얻어진 안정성 차트는 계의 매개변수 평면에서 불안정 영역과 안정영역

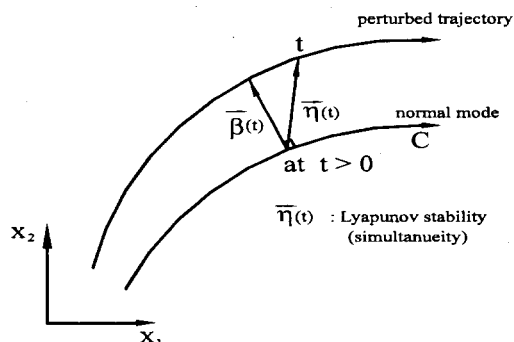


그림 3 정규모드와 섭동계적 사이의 변위 벡터 $\vec{\beta}$

을 구분하는 경계곡선으로 구성된다. 이 경계곡선을 구하는 데 있어서 주기 τ 와 2τ 를 갖는 주기해를 찾아야 하는데, 이러한 주기해를 찾는 문제는 식 (5)의 고유함수(eigenfunction)를 구하는 것과 같다⁽¹²⁾.

2.3 분기모드의 계산

그림 2(a)의 안정고리 내에 위치한 타원형 중심으로 새롭게 발생한 분기모드를 계산하기 위하여 식 (5)의 고유함수는 분기모드의 씨(seed)⁽¹¹⁾라고 말할 수 있으며, $x^*(t)$ 와 $\beta^*(t)$ 를 각각 정규모드와 식 (5)의 고유함수라 놓으면, 분기점에서의 섭동된 운동 $x(t)$ 는 식 (6a)와 같이 된다.

$$\vec{x}(t) = \vec{x}^*(t) + \vec{\beta}^*(t) \quad (6a)$$

총 에너지가 증가함에 따라 식 (6a)의 방정식은 분기모드를 설명할 수 있는 모함수(generating function)가 되며, 이것은 일반화 좌표로 표현된 식 (6b)로 재구성되어 식 (2)에 대입하므로써 조화 균형법(harmonic balance method)를 적용할 수 있게되어 분기모드를 찾을 수 있다.

$$x_i(\omega t) = x_i^*(\omega t) + \beta_i^*(\omega t) \quad (6b)$$

2.4 강제진동 해석

식 (5)로부터 얻어진 안정성 차트는 보통 총에너지 또는 정규모드의 크기로 표현되는 하나의 축과 또다른 매개변수로 표현된 다른 한축으로 구성된 2차원 평면상에 작성된다. 분기모드는 그림 2(a)에서와 같이 안정한 상태로 발생되고, 에너지의 작은 범위내에서는 적어도 그 안정성을 유지하기 때문에 안정성 차트상에 안정한 영역이 존재한다. 먼저 비감쇠계에서의 분기모드와 관련한 강제진동 해석과정을 알아보자. 안정성 차트상의 안정영역내의 한점 P 를 선택한다. 그리고, $\alpha(P)$ 는 P 점에 상응하는 계의 매

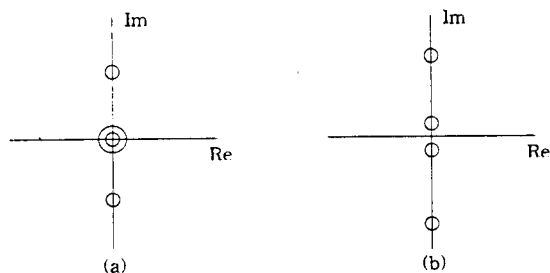


그림 4 (a) : 그림 2(a)의 분기모드에 대한 Floquet 지수, (b) : 근사 자연가진함수에 의한 강제진동 응답의 Floquet 지수

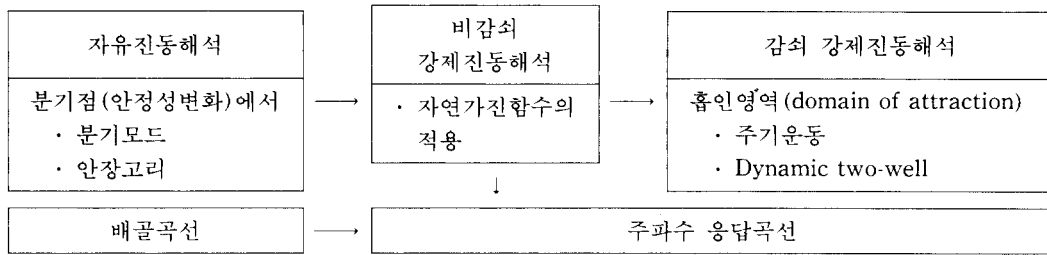


그림 5 정규모드 동역학의 일반적인 과정

개변수, $\vec{\beta}(t, a)$ 는 매개변수에 따라 변하는 식 (5)의 고유함수라고 하자. 계의 매개변수들의 변분치 δa_i 에 따라 변화된 분기모드는 안정영역내에 있게 되고, 이 때 자연가진함수(natural forcing function) $\vec{f}(t)$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\vec{f}(t) = \sum C_i \frac{\partial \vec{\beta}(t, a)}{\partial a_i} \delta a_i \quad (7)$$

여기서, C_i 는 임의의 작은 상수이고, δa_i 는 각 매개변수들의 변분값이다. 이 가진함수로 계를 가진할 때 초기의 모드로부터 약간 변화된 또다른 분기모드가 이 계의 응답이 될 것이다. 이와 유사하게, 자연가진함수의 개념은 강제진동의 응답을 쉽게 계산하기 위하여 Harvey⁽¹³⁾와 Vakakis⁽⁴⁾에 의하여 사용되었다.

자연가진함수는 계의 에너지 h 를 포함하여 서로 독립적인 많은 매개변수의 수와 같은 유한한 차원의 벡터공간을 구성한다. 한편으로 식 (5)의 고유함수 $\vec{\beta}^*(t)$ 가 무한히 많은 조화함수(harmonics)들의 합으로 표현되기 때문에 자연가진함수는 실제적이지 못하지만 그 조화성분들 중 처음 몇 개의 항들이 지배적이어서 근사적인 가진함수(forcing function)로 사용되어질 수 있다. 근사적으로 구한 자연가진함수가 사용될 때 계는 더 이상 보존적이지 않고, 시간의존적 해밀토니안계(time dependent Hamiltonian system)가 된다. 만일 강제진동응답이 주기적이라면 분기모드는 타원형 안정(elliptically stable)이기 때문에 그 응답은 타원형 안정하고, 따라서 그림 4에서와 같이 한쌍의 Floquet 지수는 복소수축으로 약간 이동하게 된다.

계에 약간의 감쇠가 추가되는 경우에도 강제응답 해석은 조화균형법에 의하여 해석될 수 있다. 이 때 Floquet 지수는 복소평면상의 원편으로 이동하고, 강제진동의 응답은 점근적 안정(asymptotically stable)이 된다.

2.5 결론

앞에서 언급된 형식화된 공식들은 보편적으로 사용되는 섭동법으로는 적용할 수 없는 강비선형계(strongly nonlinear system)에도 적용할 수 있는 특징이 있으며, 극히 논리적 근거에 기초한다기 보다는 발견적 접근방법을 통해 설명되었다. 정규모드 동역학을 적용하는데 있어서 언급된 가정들이 확인되어야 하며, 특히 안장고리(saddle-loop, homoclinic orbit)의 존재는 분기모드를 구하는데 있어서 중요하다. 안장고리가 존재한다는 것은 식 (5)의 고유함수를 모함수로 하여 조화 균형법에 의해 분기모드를 계산할 수 있게 한다. 또한 자연가진함수는 모함수들의 근사식으로 되어 강제진동해석을 가능하게 한다. 강제진동의 경우 안장고리 상의 안정 및 불안정 다양체가 섭동을 일으키게 되어 그림 2(b)와 같이 두 다양체의 교차가 일어날 수 있으며, 이때 계는 무수히 많은 주기 운동과 비주기운동 등을 포함한 혼동운동이 된다⁽⁴⁾.

정규모드 동역학의 적용과정을 간략하게 도식화하면 그림 5와 같다.

3. 적용 예

실제로 두 개의 정규모드가 존재하는 기계구조물에 대해 정규모드 동역학을 적용할 수 있으며, 그 예로서 굽힘모드와 비틀림모드가 존재하는 보에 대해 적용과정을 살펴보고, 그밖의 경우에 대하여는 서술적으로 논해보고자 한다.

3.1 지지부의 비틀림 가지를 받는 얇은 보 (Elastica)⁽¹⁵⁾

0.19mm×12.7mm×280mm의 크기를 갖는 그림 6과 같은 얇은 보의 지지부에 주기적인 비틀림 가진이 될 때 나타나는 비선형 거동을 정규모드 동역학을 이용하여 이론적으로 해석하면서 실험결과들과

비교 검토하였다.

굽힘과 비틀림의 1차 모드들을 이용하여 그림 6의 모델의 운동방정식을 2자유도계로 간략히 유도하면 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$(1 - \alpha y^2)(\ddot{x} + \ddot{\theta}) + 2\alpha y \dot{y}(\dot{x} + \dot{\theta}) + p^2 x = 0 \quad (8)$$

$$\ddot{y} - \alpha(\dot{x} + \dot{\theta})^2 y + y = 0$$

여기서 x 는 비틀림 변위이고 y 는 굽힘변위 이다. 또한 α 는 계의 물리적 특성에 의하여 결정되는 값이고 $p=48.7$ 로써 이 보의 굽힘과 비틀림의 선형 고유진동수 비이며 이는 정수비가 아닌 경우다.

식 (8)에서 가진변위 $\theta=0$ 인 보존계의 정규모드 및 분기모드에 대하여 알아보자. 먼저 $y=0$ 이고 $x=X\sin pt \neq 0$ 인 비틀림 모드와 $x=0$ 이고 $y=Y\cos t \neq 0$ 인 굽힘모드가 식 (8)의 두 개의 정규모드가 된다. 이 보의 비틀림 가진을 받기 때문에 비틀림 모드에 대한 안정성을 고찰하여야 한다. 이 비틀림 모드에 대한 안정성 방정식은 2.2절에서 제시된 방법에 따라 y 의 섭동량 β 에 의해 아래와 같은 식의 형태로 표현된다.

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + (\delta + 2\epsilon\cos 2\tau)\beta = 0 \quad (9)$$

식 (9)로 부터 얻어진 안정성 차트는 그림 7과 같다. 그림 7에서 선(line)들은 이론해석을 통해 얻어진 안정과 불안정 영역의 경계선인 분기점(bifurcation point)이며, 특히 실선은 굽힘과 비틀림의 각 1차 모드에 의한 안정성 경계(stability boundary)로서 그것은 기호(symbol)들로 표시된 실험결과와 잘 일치하고 있음을 보여준다.

2.3절에서 살펴본 바와 같이 이 경계선 상에서 정규모드는 분기되어 안장고리가 형성되고 새로운 분

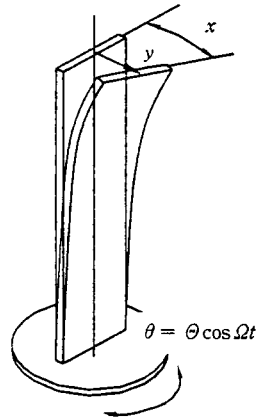


그림 6 지지부의 비틀림 가진을 받는 얇은 보

기모드가 발생한다. 안정한 영역내에서 이 보의 순수한 비틀림 운동 만을 한다. 그러나, 분기된 직후의 매개변수들을 설정하여 실험한 결과는 그림 8에서 보는 바와 같이, 비틀림 운동은 가진주파수와 동일한 응답을 보이고, 굽힘운동은 일정 변위(한쪽 방향으로 휨 상태)와 가진주파수의 두 배인 주기운동의 합으로 되어 새롭게 안정한 분기모드가 발생되었음을 보여준다.

강제진동해석은 2.4절에서의 모함수 정의와 같이 고유함수의 형태로 선정하여 해석이 수행되었고 그 결과는 그림 9와 같다. 그림 9의 Poincare사상도를 통해서 dynamic two-well 현상과 안정한 분기모드가 공존함을 알 수 있다. 실험적으로 가진력의 증가에 따른 보의 운동은 이러한 현상을 명백하게 보여주며, 가진력이 충분히 증가될 때 보의 응답은 그림 10과 같이 넓은 주파수 범위에서 랜덤(random) 형태의 스펙트럼(spectrum)으로 보여주고 있다. 그림

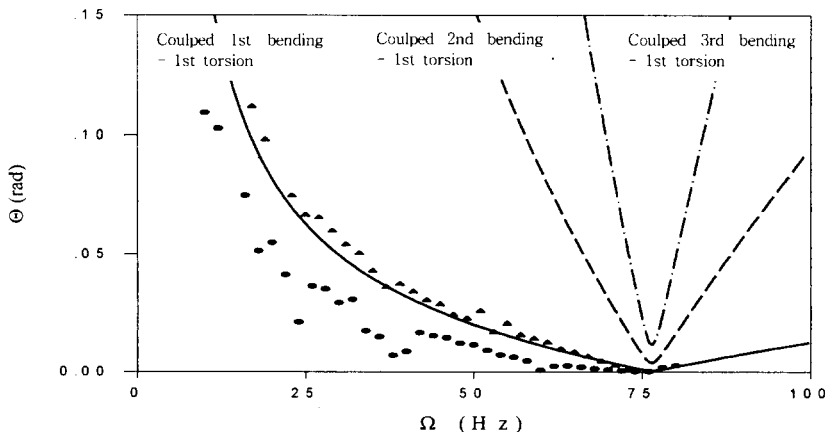


그림 7 비틀림모드의 안정성 차트(선: 이론결과, 기호: 실험결과)

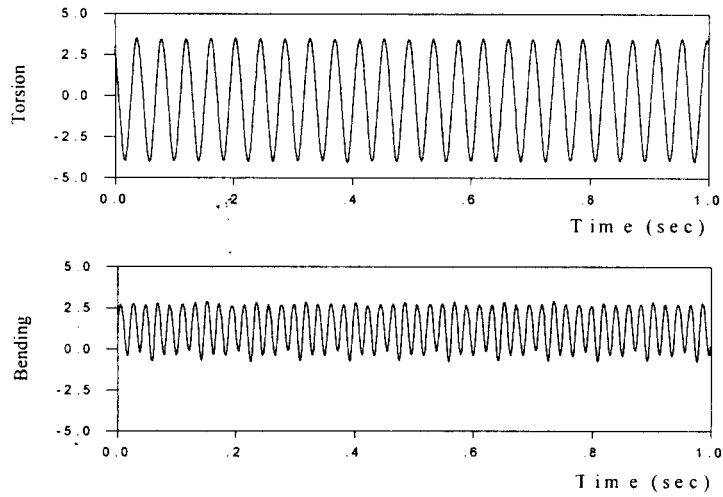


그림 8 실험에 의한 분기모드의 예 ($\Omega=24$ Hz)

10의 스펙트럼은 넓은 주파수 범위에서 백색잡음(white noise)의 형태를 보이나 실제로는 위상공간(phase space) 또는 Poincare 사상도에서 어떤 정형성을 갖게 된다.

3.2 기타

얇은 단면적($0.21\text{mm} \times 12.7\text{mm}$)을 갖고 길이가 288mm 인 유연한 강철 외팔보의 지지부가 굽힘방향으로 주기적으로 가진될 때, 이 외팔보(elastica)의 비선형 거동이 Cusumano⁽¹⁶⁾에 의하여 실험적으로 연구된 바 있다. 일반적으로 이러한 계는 굽힘과 비틀림의 2자유도계로 모델링할 수 있으며, 이 때 두 개의 운동(두 개의 정규모드)은 선형관점에서 독립적이고 또한 안정하다. 따라서 굽힘모드로 이 계가 가진될 때 응답은 굽힘운동이어야 한다. 그러나, 이 연구는 계의 조절매개변수들(가진력, 가진주파수)이 특정한 값을 가질 때 비틀림운동이 관찰됨을 보이고 있으며, 가진력의 크기를 더욱 증가시킬 때 혼돈운동이 발생하고 있음을 보고하고 있다. 이 현상을 비

선형 모드 및 굽힘과 비틀림운동 사이의 에너지 교환으로 설명하고 있으나 그 설명이 충분치 않은 것은 사실이다. 정규모드 동역학의 관점으로 볼 때, 이 계의 안정한 굽힘모드(정규모드)는 조절매개변수의 변화에 따라 불안정해지는 분기가 일어나고, 따라서 계는 비틀림운동과 연계된 새로운 안정한 운동(분기모드)을 하게 되어 비틀림운동이 관찰 되는 것이다. 이 것은 앞 절에서 언급한 안장점이 안장고리를 형성하였다는 것을 의미한다. 또 가진력의 크기가 보다 더 증가하면, 안장점의 안정 및 불안정 다양체가 서로 교차하게 되어 혼돈운동으로 나타나게 되는 것이다.

알루미늄 외팔보($4\text{mm} \times 20\text{mm} \times 910\text{mm}$)가 지지부의 주기적인 굽힘가진을 받을 때, 가진력의 변화에 따라 굽힘-굽힘 및 굽힘-비틀림의 연성 운동이 발생

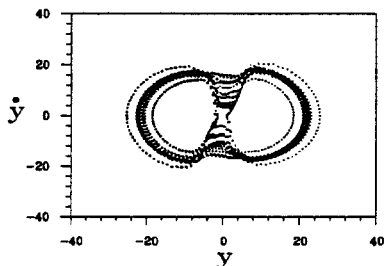


그림 9 강제진동 응답의 포앙카레 사상도

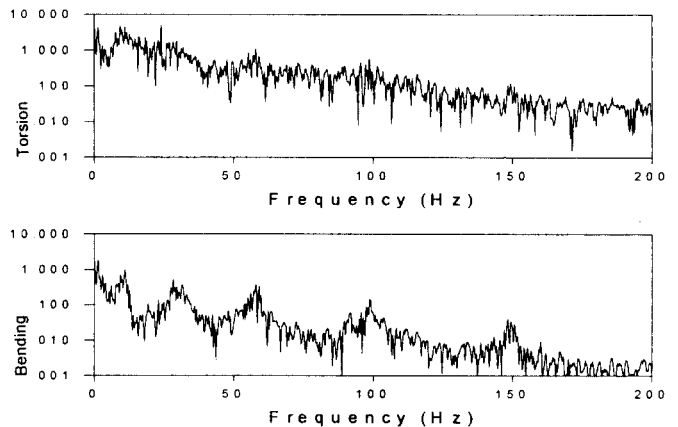


그림 10 분기후의 혼돈 스펙트럼

됨을 저자에 의하여 실험적으로 관찰된 바 있다. 이러한 현상 또한 위에서와 같은 정규모드 동역학으로 설명 될 수 있다.

또다른 예로써, 동흡진기는 비선형성을 포함하는 2자유도계로 근사 모델링 할 수 있으며, 따라서 두 개의 정규모드가 존재한다. 정규모드 해석을 통하여 동흡진기를 구성하는 매개변수들의 변화에 따른 동흡진기의 안정성 변화 및 새로 발생하는 분기모드를 예측할 수 있기 때문에 공진을 제어하기 위한 설계 변수의 선정 및 제어에 활용 될 수 있다.

이밖에 정규모드 동역학은 강비선형계에도 적용되어 안정성과 분기현상 등의 비선형 거동 및 혼돈운동에 대한 해석을 가능하게 하며, 두 개 이상의 정규모드가 존재하는 다 자유도계에 대하여도 적용 가능하다.

4. 맺음말

본 글에서는 비선형 진동 해석을 위한 정규모드 동역학에 대한 연구동향 및 기본 이론을 살펴보고, 그 적용 예를 통하여 실험결과와 비교 고찰 함으로써 정규모드 동역학의 적용성을 서술하여 보았다. 선형이론으로 이해하기 어려운 현상들에 대하여는 비선형의 관점에서 새롭게 접근하려는 노력이 필요하며 비선형이론에 대한 연구가 지속적으로 진행 되어야 한다.

참고 문헌

- (1) Pak, C. H. and R. M. Rosenberg, 1968, "On the Existence of Normal Modes Vibrations in Nonlinear Systems," Q. Appl. Math., Vol 24, pp. 177~193.
- (2) Nayfeh A. H. and D. T. Mook, 1979. Non-linear Oscillations, Wiley-Interscience, New York.
- (3) Rosenberg. R. M., 1966, "On Nonlinear Vibrations of Systems with Many Degrees of Freedom," Advnced in Applied Mechanics 9, pp. 155 ~242, Academic Press.
- (4) Guckenheimer, J. and P. J. Holms, 1983, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Spring-Verlag, N. Y.
- (5) Ott, E., 1993, Chaos in Dynamical Systems, Cambridge University Press.
- (6) Johnson. T. and R. H. Rand, 1979, "On the Existence and Bifurcation of Minimal Normal Modes." Int. J. of Nonlinear Mechanics. Vol. 14, pp. 1~12.
- (7) Rand, R. H., C.H. Pak and F. C. Moon, 1992, "Free Vibrations of Thin Elastica, " Non-linear Dynamics, 3, pp. 347~364.
- (8) Pak, C. H., 1989. "On the Stability Behaviors of Bifurcated Normal Modes in Coupled Non-linear Systems." 3, pp. 347~364.
- (9) Meirovitch, L., 1970, Methods of Analytical Dynamics. McGrow-Hill. N. Y.
- (10) Birkhoff, G. D., 1927, Dynamical Systems, A. M. S. Publication.
- (11) Synge, J. L. 1926, "On the Geometry of Dynamics," Philosophical Transcations A, Vol. 226, pp. 31~106.
- (12) McLachlan. N. W., 1964, Theory and Application of Mathieu Functions, Dover Publications, N. Y.
- (13) Harvey, T. and P. Alto, 1958, "Natural Forcing Functions in Nonlinear Systems," J. Appl. Mech., pp. 352~356.
- (14) Vakakis, A. F., 1991, "Analysis and Identification of Linear and Nonlinear Normal Modes in Vibrating systems," Ph. D. Thesis, Caltech..
- (15) Joo, J. M. and C. H. Pak, 1997, "Normal Mode Dynamics and Experiments of Thin Elastica Under Torsional Base-Excitation," Applied Mechanics in the Americas. Vol. 4, pp. 383~386.
- (16) Cusumano. J. P. and F. C. Moon, 1995, "Chaotic Non-Planar Vibrations of the Thin Elastica, Part 1," J. Sound and Vibration, 179(2), pp. 185~208.