

# 구조물의 내부공진에 대하여

## 장 서 일

(서울시립대학교 환경공학과)

### 1. 서 론

비선형 동적시스템(nonlinear dynamical system)의 특징은 여러 가지가 있다<sup>(1)</sup>. 예를 들자면 시스템의 반응진폭이 급격히 변화하는 점프(jump)현상, 가진주파수와 다른 주파수의 응답을 갖는 저조화(subharmonic) 응답과 고조화(superharmonic) 응답, 그리고 초기조건에 따라서 두 개 이상의 응답을 가질 수 있다는 점 등은 비교적 널리 알려진 비선형 동적시스템의 특징이다. 비교적 최근에 알려진 것으로서는 주기해(periodic solution)의 주기배가(period doubling)현상<sup>(2,3)</sup>, 그리고 최근에 많은 관심을 모은 혼돈(chaos)현상<sup>(3,4)</sup> 등이 있으며 위에 열거한 특징들은 1자유도계 이상의 비선형계에서 존재할 수 있는 것들이다. 그러나 이 글에서 다루고자 하는 “내부공진(interanal resonance)”은 2자유도계 이상의 계, 즉 다자유도계에서만 거론할 수 있는 비선형계의 특징이다. 이 내부공진은 다자유도계의 고유진동수들의 일부 또는 전부인  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$ 가  $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 + \dots + m_n\omega_n \approx 0$ 를 만족시키는 양 또는 음의 정수  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ 가 존재할 때 일어날 수 있다. 결과적으로 일어날 수 있는 것은 특정 내부공진에 관련된 모드들 사이에서의 간섭작용(modal interaction)이며 실제로 관찰되어질 수 있는 물리적 현상은 그 계의 형상에 따라, 그리고 그 계가 갖는 특정한 비선형성에 따라 매우 다양하다. 예를 들어 그림 1(a)의 양끝이 팽팽히 당겨진 현에 수직방향,  $y$ 방향만으로 조화가진력이 가해지고 있다고 가정하면 선형이론이 적용가능한 경우에는  $y$ 방향으로의 진동만을 예상할 수 있다. 그러나 그 진폭이 커져서 비선형성의 영향이 중요해지는 경우에는  $y$ 방향으로 작용하는 진동에너지가 내부공진에 의해  $x$ 방향으로의 진동으로 일부 또는 전부가 옮겨져

서 그림 1(b)에서 처럼 결과적으로 타원의 궤적을 그리는 현의 진동을 관찰할 수 있다<sup>(5)</sup>.

평판의 경우 이 내부공진에 의해 일어나는 현상은 현의 경우와는 전혀 다르다. 잘 알려진 바대로 정사각형 평판의 경우  $(m, n)$  모드와  $(n, m)$  모드는 같은 고유진동수를 가지며 이 2개의 모드는 내부공진에 의해 연관되어질 수 있다. 그림 2에서 볼 수 있듯이 첫 번째 그림의  $(2, 3)$  모드만이 이상적으로  $(2, 3)$  모드와 같은 형상의 외부가진력에 의해 가진된다고 가정하면 선형진동의 범위내에서는 관찰되어지는 진동은 직접적으로 가진되어지는  $(2, 3)$ 모드만으로 이루어지게 된다. 그러나 비선형 진동을 고려해야하는 경우 내부공진에 의해 연결된  $(3, 2)$  모드가 얼마간의 위상차, 또는 시간차를 두고 같이 가진되기 때문에 그림 2에서 볼 수 있는 것처럼 2개의

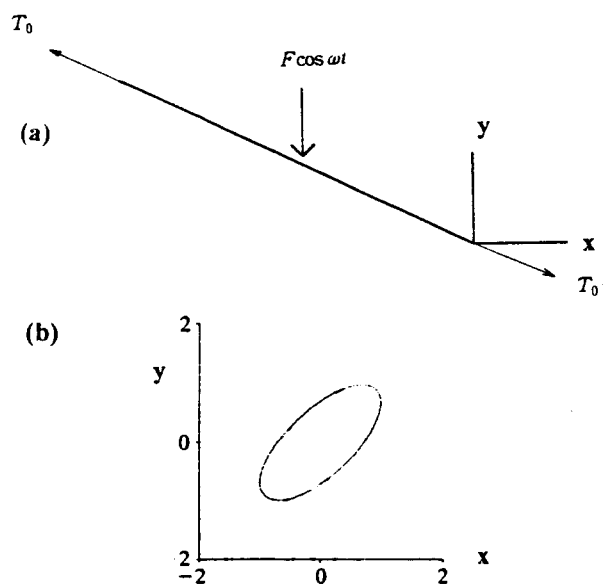


그림 1 (a) 양끝이 당겨진 현의  $y$ -방향 가진, (b) 현의  $x$ - $y$  공간상의 궤적

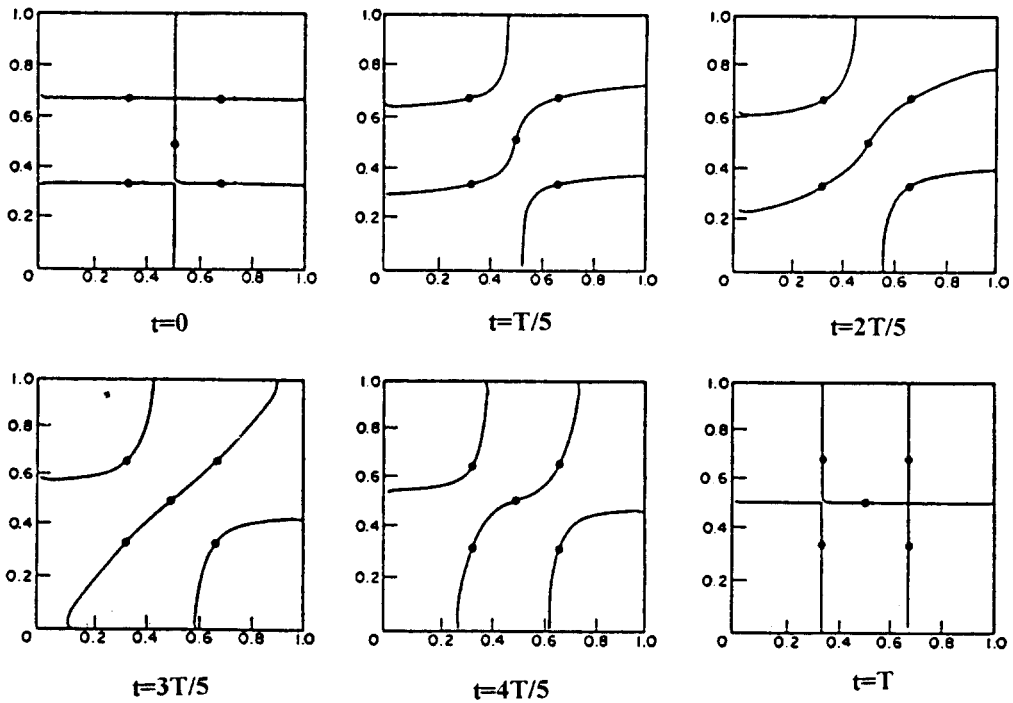


그림 2 정사각형 평판의 움직이는 파형

모드가 혼합되어 진동하는 모습, 다시 말하자면 움직이는 파형(traveling wave)을 관찰할 수 있게 된다<sup>(6)</sup>.

위에서 서술한 현과 정사각형 평판의 경우 고유진동수가 같은 2개의 모드가 내부공진에 관련된 것으로 예를 들었으나 3개 이상의 모드가 내부공진에 의해 연관되어 질 수도 있고 그 모드들 사이의 고유진동수의 비도 1:1이 아닌 1:2 또는 1:3과 같은 임의의 정수비를 가질 수 있다. 내부공진과 관련된 이러한 사항들, 즉 내부공진에 참여할 수 있는 모드들의 결정, 또는 그 모드들의 고유진동수 비 등은 그 시스템의 기하학적 형상, 예로서 사각형 평판의 양변의 비 등과 그 시스템의 비선형성을 일으키는 요인, 예로서 현의 과도한 진동으로 인한 늘어남, 또는 비선형 경계조건 등에 의해 결정되어 진다. 이러한 내부공진은 현과 사각형 평판을 포함한 다양한 형태의 구조물에 존재할 수 있으며, 보, 링, 원형평판, 원통셀 등에 대해 연구가 되어왔다<sup>(7,8)</sup>.

내부공진의 더 정확한 이해를 위해서 본 글에서는 1:2 내부공진을 갖는 흡진기와 1:1 내부공진을 갖는 직사각형 평판을 예로 들어 자세히 서술하기로 한다. 약비선형(weakly nonlinear) 시스템을 해석하는데 널리 쓰여온 섭동법의 하나인 평균법<sup>(3)</sup>이 사용되어지며 그 결과로 나온 진폭의 운동방정식을 분기

이론(bifurcation theory)<sup>(9)</sup>을 이용하여 해석한다.

## 2. 흡진기의 1:2 내부공진

그림 3에서 볼 수 있듯이 이 흡진기는 선형스프링-질량-점성댐퍼로 구성된 기본 시스템(primary system)과 그것에 고정된 진자로 구성되어 있다. 그림 3에서처럼 조화가진력이 기본 시스템에 가해지면 이 기본 시스템은 수직방향으로 병진운동하게 되며 이 진동 에너지의 일부가 진자의 회전운동을 일으킴

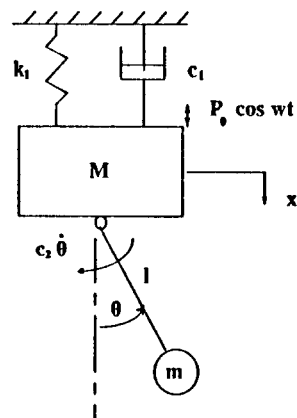


그림 3 흡진기의 단순화된 모델

으로써 흡진기로서의 역할을 한다. 2-자유도계 시스템인 이 흡진기는 많은 연구의 대상이었으며 무차원화된 운동방정식은 다음과 같다<sup>(10)</sup>.

$$\eta'' + 2\frac{\zeta_1}{p(1+R)}\eta' + \frac{1}{p^2(1+R)}\eta - \frac{R}{(1+R)} \times (\theta'' \sin\theta + \theta'^2 \cos\theta) = \frac{F}{(1+R)p^2} \cos\tau, \quad (1)$$

$$\theta'' + 2\frac{\zeta_2 q}{p\sqrt{1+R}}\theta' + \left(\frac{q^2}{p^2(1+R)} - \eta''\right) \sin\theta = 0. \quad (2)$$

여기에서

$$\begin{aligned} \tau &= \omega t, \quad \eta = x/l, \quad R = m/M, \quad p = \omega/\Omega_1, \\ F &= P_0/k_1 l, \\ \Omega_1 &= \sqrt{k_1/M}, \quad q = \omega_2/\omega_1, \quad \omega_1 = \sqrt{k_1/(M+m)}, \\ \omega_2 &= \sqrt{g/l}, \quad \zeta_1 = \frac{c_1}{2M\Omega_1}, \quad \zeta_2 = \frac{c_2}{2ml^2\omega_2}. \end{aligned}$$

그리고 미분 기호는 무차원 시간,  $\tau$ 에 대한 미분을 의미한다.  $R$ 은 두 질량의 비이며  $\Omega_1$ 은 진자를 제외한 기본시스템의 고유진동수,  $\omega_1$ 은 진자의 회전 운동이 없는 전체 시스템의 고유진동수,  $\omega_2$ 는 진자만의 고유진동수,  $q$ 는 두 고유진동수,  $\omega_1$ 과  $\omega_2$ 의 비,  $p$ 는  $\omega$ 과  $\Omega_1$ 의 비이다.

이 운동방정식에서 주목할 점은 비선형항들이 중력에 의한 복원력에, 그리고 운동에너지가 일반좌표 (generalized coordinate),  $\theta$ 의 함수라는 점에 기인한다는 것이다. 후자는 2개의 일반좌표,  $\eta$ 와  $\theta$ 의 관성 커플링 (inertia coupling)을 유발시킨다.

섭동법 (method of perturbation)<sup>(11)</sup>을 적용하기 위해서는 수직방향으로의 병진운동과 진자의 회전운동의 진폭이 작다는 가정이 필요하며 다음과 같은 rescaling과정을 거친다.

$$\eta = \epsilon \bar{\eta}, \quad \theta = \epsilon \bar{\theta}, \quad \zeta_1 = \epsilon \bar{\zeta}_1, \quad \zeta_2 = \epsilon \bar{\zeta}_2, \quad F = \epsilon^2 \bar{F}. \quad (3)$$

여기에서  $\epsilon$ 는 섭동매개변수이며,  $0 < \epsilon \ll 1$ . 댐핑계수,  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ 도 rescaling되었다는 것을 주목할 필요가 있다. 식 (3)을 식 (1)과 식 (2)에 대입하고 삼각함수들을 Taylor series로 대치하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\eta}'' + \Omega_{n1}^2 \bar{\eta} &= \epsilon (\bar{F} \Omega_{n1}^2 \cos\tau - 2\bar{\zeta}_1 \Omega_{n1}^2 \bar{\eta}' \\ &\quad + 8\bar{\theta}'^2 - 8\Omega_{n2}^2 \bar{\theta}^2) + O(\epsilon^2), \\ \bar{\theta}'' + \Omega_{n2}^2 \bar{\theta} &= \epsilon (-4\bar{\zeta}_2 \Omega_{n2} \bar{\theta}' - \Omega_{n1}^2 \bar{\theta} \bar{\eta}) \\ &\quad + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (4)$$

여기에서

$$\bar{\theta} = \frac{\bar{\theta}}{2} \sqrt{R/2(1+R)}, \quad \bar{\zeta}_1 = p\hat{\zeta}_1, \quad \bar{\zeta}_2 = \frac{1}{2}\hat{\zeta}_2,$$

$$\Omega_{n1} = \frac{1}{p\sqrt{1+R}}, \quad \Omega_{n2} = \frac{q}{p\sqrt{1+R}}$$

운동방정식 (4)에서 주목할 점은  $\epsilon$ 의 1차 범위 내에서 2차의 비선형항 (quadratic nonlinearity)들이 존재한다는 점이며 이 사실은 1:2 내부공진의 가능성을 의미한다.

그 과정을 여기에 실지는 않겠지만 이론적인 해석 결과 1:2 내부공진을 갖는 것이 밝혀졌으며<sup>(12)</sup> 이 내부공진에 의한 시스템의 해석을 위해 다음과 같이 가정한다.

$$\Omega_{n1}^2 = 1 + 2\epsilon\sigma_1, \quad \Omega_{n2}^2 = \frac{1}{4} + \epsilon\sigma_2.$$

다시 말하자면  $\Omega_{n1} \cong 1$ ,  $\Omega_{n1}/\Omega_{n2} \cong 2$ 인 경우를 다루고 있으며 이것의 물리적 의미는 흔히 말하는 외부 조화가진력과 공진과 1:2 내부공진이 동시에 일어나는 것을 말한다. 여기에서  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ 는 각각 외부, 내부공진 주파수 조절 매개변수 (external, internal detuning parameter)로서 공진주파수의 일치도를 의미한다. 다시 말하자면  $\sigma_1$ 의 변화는 가진주파수의 변화를 의미한다.  $\sigma_2$ 의 변화는 식 (2)의  $q$ 의 변화를 의미하나 본 논문에서는  $\sigma_2$ 와 관련된 내용은 논하지 않겠다.

이러한 가정하에 식 (4)의 근사해는 여러 가지 섭동법으로 구할 수 있으며 여기서는 그 중 하나인 평균법 (method of averaging)을 사용하기로 한다. 일반적인 평균법에서 하듯이 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(\tau) &= x_1(\tau) \cos\tau + y_1(\tau) \sin\tau, \\ \bar{\eta}'(\tau) &= -x_1(\tau) \sin\tau + y_1(\tau) \cos\tau, \\ \bar{\theta}(\tau) &= x_2(\tau) \cos\frac{1}{2}\tau + y_2(\tau) \sin\frac{1}{2}\tau, \\ \bar{\theta}'(\tau) &= -\frac{1}{2}x_2(\tau) \sin\frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}y_2(\tau) \cos\frac{1}{2}\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)를 식 (4)에 대입하고 정리하면 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$\bar{z}' = \epsilon g_1(\bar{z}, \tau) + O(\epsilon^2) \quad (6)$$

여기에서  $\bar{z} = [x_1, y_1, x_2, y_2]^T$ . 평균법에 따르면 식 (4)의 1차 근사해를 식 (6)의 우변의 시간에 대한 평균으로 대체할 수 있다<sup>(3)</sup>. 결과적으로 나오는  $\eta$ 와  $\theta$ 의 진폭과 위상에 관한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_1' &= \epsilon [-0.5\hat{F} \sin\beta_1 - \bar{\zeta}_1 a_1 - a_2^2 \sin(2\beta_2 - \beta_1)], \\ a_1 \beta_1' &= \epsilon [-0.5\hat{F} \cos\beta_1 + \sigma_1 a_1 + a_2^2 \cos(\beta_1 - 2\beta_2)], \end{aligned} \quad (7)$$

$$a_2' = \epsilon [ -\bar{\xi}_2 a_2 + 0.5 a_1 a_2 \sin(2\beta_2 - \beta_1) ],$$

$$a_2 \beta_2' = \epsilon [ \sigma_2 a_2 + 0.5 a_1 a_2 \cos(\beta_1 - 2\beta_2) ].$$

여기에서  $a_1, \beta_1, a_2, \beta_2$ 는 각각 기본 시스템의 진폭과 위상각, 그리고 진자의 진폭과 위상각을 나타내며 다음과 같이 정의된다.

$$a_1 = (x_1^2 + y_1^2)^{1/2}, \quad \beta_1 = -\tan^{-1}(y_1/x_1),$$

$$a_2 = (x_2^2 + y_2^2)^{1/2}, \quad \beta_2 = -\tan^{-1}(y_2/x_2). \quad (8)$$

식 (7)의 일반적인 정상해는 이론적 해석으로 구할 수 있으며<sup>(12)</sup> 그 결과를 아래에 설명하겠다.

진폭과 위상의 운동방정식 (7)의 정상해(steady-state solution)는 크게 두 가지로 분류할 수 있다. 그 첫 번째는  $a_2=0$ 이고  $a_1 \neq 0$ 인 경우이다. 이 해의 물리적 의미는 진자의 회전운동이 없이 가진력을 직접 받는 기본시스템의 진동만이 있는 경우로서, 흡진기로서 작용하고 있지 않는 것을 말한다. 두 번째 정상해는  $a_1 \neq 0$ 이고  $a_2 \neq 0$ 인 경우이다. 이 해는 진자의 진동이 있는 상태로서 가진력에 의해 기본 시스템으로 들어온 진동에너지가 내부공진을 통해 진자의 운동을 유발시킨 것을 의미한다. 이 2개의 정상해를 각각 단일 모드해 (single-mode solution), 연성모드해 (coupled-mode solution)라 칭한다. 그림 4는 대표적인 정상해,  $a_1, a_2$ 를  $\sigma_1$ 의 함수로 보여주고 있다. 실선으로 그려진 부분은 안정해(stable solution)를, 점선으로 그려진 부분은 불안정해(unstable solution)를 나타낸다. 해의 안정성에 대해서는 다음 장에서 자세히 설명하겠으며 여기에서는 단지 불안정해는 이론적으로는 존재하나 물리적으로는 얻을 수 없는 해라는 것만을 말해둔다. 그림 4의 첫 번째 그림에서 수평축과 평행한 부분은 위에서 설명한 연성모드해이고 주목할 점은 기본시스템의 진폭이  $\sigma_1$ 의 변화, 즉 외부가진력의 주파수의 변화와 무관하다는 점이다. 이론적인 해석과 수치해석 결과 기본시스템의 진폭이  $\sigma_1$ 의 변화에 뿐만 아니라 외부가진력의 크기,  $\hat{F}$ , 그리고 기본시스템의 댐핑인  $\bar{\xi}_1$ 의 변화에도 무관하다는 것이 밝혀졌고 이 사실들은 흡진기로서 필요한 성질들이기 때문에 예측할 수 있는 사실이다. 이러한 현상은 "saturation"이라 불리우며 2차의 비선형성을 갖고 있는 시스템에서 많이 발견되어진다. 그림 4의 두 번째 그림을 보면 연성모드해, 즉 진자의 회전진동의 진폭은  $\sigma_1$ 이 증가함에 따라, 즉 외부가진력의 주파수가 증가함에 따라 증가함을 알 수 있다. 그림 4에서 한가지 더 주목할 점은 안정된 단일모드해와 안정된 연성모드해가 같이 존재하는  $\sigma_1$ 의 구간이 있다는 점이다. 이

러한 구간에서는 초기조건이 어떠한 해를 갖는가를 결정하게 된다.

위에서 설명한 바와 같이 내부공진은 이 흡진기에 있어서 필수적인 요건이며 평균법의 사용이 saturation의 발견을 포함한 이론적인 해석에 매우 효과적이었다는 것을 알 수 있다. 정상해의 발생과 그 안정성의 변화는 분기이론으로 효과적으로 설명할 수 있으나 직사각형 평판의 경우로 미룬다.

### 3. 직사각형 평판의 1:1 내부공진

서론에서 기술한 정사각형 평판의 경우와 유사하게 직사각형 평판의 양변의 특정한 비에 대해 2개 이상의 모드가 근접한 고유진동수를 가질 수 있으며 1:1 내부공진에 참여할 수 있다. 이 글에서는 양변의 비,  $x$ 가 1.633에 가까울 때 (1, 2) 모드와 (3, 1) 모드가 갖는 1:1 내부공진<sup>(13,14)</sup>을 예를 들어 설명하겠다.

얇은 평판의 비선형 진동의 운동방정식은 폰 칼만

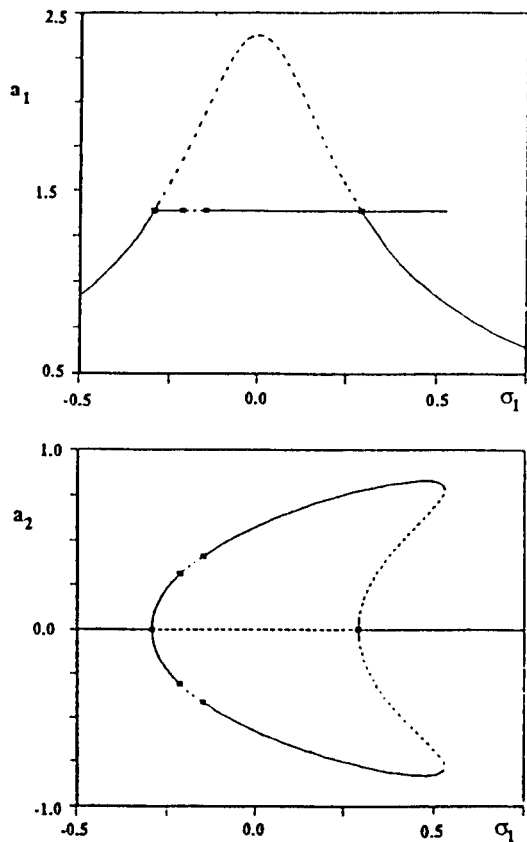


그림 4 External detuning parameter,  $\sigma_1$ 의 함수로서의 정상해,  $a_1, a_2$ ;  $\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2 = 0.21, \sigma_2 = 0.66$

의 식이 널리 사용되어 왔다. 이 폰 칼만의 식은 멤브레인력의 영향을 고려한 식으로 시간과 공간에 대한 편미분방정식으로 이루어져 있다. 진동이 유한개의 모드로 이루어진다는 가정하에 갤러킨법을 통해 이 폰 칼만의 식은 유한개의 상미분 모드 방정식으로 전환되어지며 그 진동이 (1, 2) 모드와 (3, 1) 모드만으로 이루어진다고 가정하면 다음과 같은 2개의 2차 상미분방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{X}_1 + \Omega_1^2 X_1 &= \epsilon(A_1 X_1^2 + A_2 X_2^2) X_1 - c\dot{X}_1 + Q_1 \cos \omega t, \\ \ddot{X}_2 + \Omega_2^2 X_2 &= \epsilon(A_2 X_1^2 + A_3 X_2^2) X_2 - c\dot{X}_2 + Q_2 \cos \omega t \end{aligned} \quad (9)$$

여기에서  $A_1, A_2, A_3$ 는 비선형 계수들이며 특정한 2개 모드의 선정에 의하여 결정되어진다. 특히  $A_2$ 는 2개의 모드를 연결시켜주는 역할을 하는 항의 계수 (coupling coefficient)이다.  $\Omega_1, \Omega_2$ 는 각각 두 모드의 고유진동수이며  $X_1, X_2$ 는 각각 (1, 2) 모드와 (3, 1) 모드의 진폭을 나타낸다.  $Q_1, Q_2$ 는 외부가진력 중 각각 (1, 2) 모드와 (3, 1) 모드의 진동에 직접 기여하는 부분이다.

식 (9)의 근사해를 구하기 위하여 흡진기의 경우와 유사하게 다음과 같이 정의한다.

$$X_i = R_i \cos(\omega t - \gamma_i) = u_i \cos \omega t + v_i \sin \omega t, \quad i=1, 2. \quad (10)$$

그리고 평균법을 적용하면 다음과 같은 진폭과 위상에 대한 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= -\frac{c}{2} R_1 + \frac{Q_1}{2\omega} \sin \gamma_1 + \frac{\epsilon A_2}{8\omega} R_2^2 R_1 \sin 2(\gamma_1 - \gamma_2), \\ \dot{\gamma}_1 &= \frac{\omega^2 - \Omega_1^2}{2\omega} + \frac{Q_1}{2\omega R_1} \cos \gamma_1 + \frac{3\epsilon A_1}{8\omega} R_1^2 + \frac{\epsilon A_2}{8\omega} R_2^2 \\ &\quad \times (2 + \cos 2(\gamma_1 - \gamma_2)), \\ \dot{R}_2 &= -\frac{c}{2} R_2 + \frac{Q_2}{2\omega} \sin \gamma_2 + \frac{\epsilon A_2}{8\omega} R_1^2 R_2 \sin 2(\gamma_2 - \gamma_1), \\ \dot{\gamma}_2 &= \frac{\omega^2 - \Omega_2^2}{2\omega} + \frac{Q_2}{2\omega R_2} \cos \gamma_2 + \frac{3\epsilon A_3}{8\omega} R_2^2 + \frac{\epsilon A_2}{8\omega} R_1^2 \\ &\quad \times (2 + \cos 2(\gamma_2 - \gamma_1)). \end{aligned} \quad (11)$$

일반적인 형태의 외부가진력이라면  $Q_1 \neq 0$ 이고  $Q_2 \neq 0$  이겠지만 여기에서는 내부공진에 의해 한 모드가 다른 한 모드에 끼치는 영향에 관심이 있으므로  $Q_1 \neq 0$  이고  $Q_2 = 0$ 인 경우에 대해 생각하기로 한다. 다시 말하자면 (1, 2) 모드만이 외부가진력에 의해 직접 가진되는 경우를 의미한다.

직사각형 평판의 경우에도 흡진기처럼 단일모드해와 연성모드해를 갖는다. 단일모드해는 (1, 2) 모드

만으로 이루어지는 진동이고 연성모드해인 경우는 (1, 2) 모드와 (3, 1) 모드의 합으로 이루어지고 일반적으로 2개의 모드 사이에 위상차가 있기 때문에 움직이는 파형을 보여주게 된다. 식 (11)의 이론적인 해석과 수치해석으로부터 얻은 대표적인 정상해를 외부가진력의 주파수,  $\omega$ 의 함수로 그림 5에서 보여 주고 있다. 첫 번째 그림에서 볼 수 있듯이 이 시스템이 가질 수 있는 해들에 따라서 4개의 주파수 구간, I, II, III, IV로 나눌 수 있다. 구간 I에서는 단 1개의 단일모드해가 존재하며, 구간 II에서는 1개의 안정한 연성모드해와 1개의 불안정한 단일모드해가 존재한다. 이 구간 I, II에서는 1개의 안정해가 존재하며 따라서 구간 I과 구간 II에서는 시스템의 정상해의 결정에 초기조건이 중요한 역할을 하지 않는다. 그러나 구간 III, IV에서는 1개의 안정한 단일모드해와 1개의 안정한 연성모드해가 같이 존재하므로 초기조건이 시스템의 정상해를 결정한다. A, B, C 점에 대응하는 주파수들은 위에서 언급한 구간의 경계점과 일치한다는 사실을 주목할 만하다.  $Q_1 = 0$ 이고  $Q_2 \neq 0$ 인 경우도 유사한 방법으로 분석할 수 있으며 그 결과는 첫 번째 경우와는 그 성격이 매우 다르다는 것이 밝혀졌으나 여기에서는 논하지

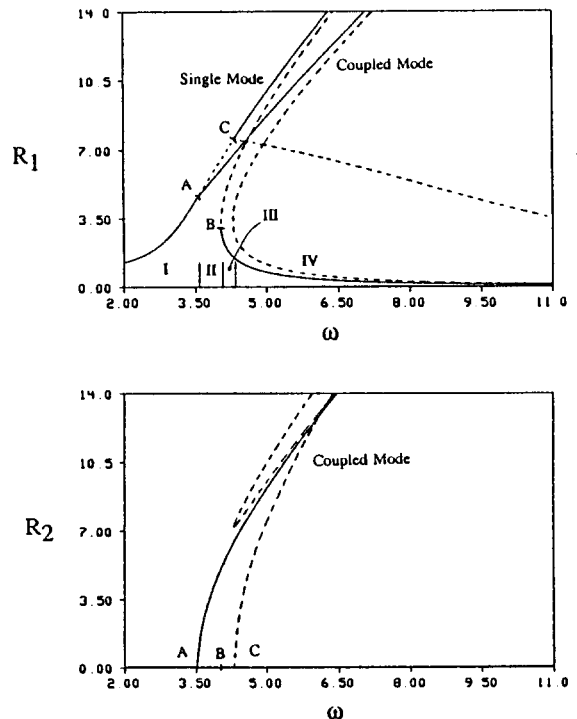


그림 5 (1, 2) 모드의 정상해,  $R_1$ 과 (3, 1) 모드의 정상해,  $R_2$ ;  $Q_1=10.0, Q_2=0.0, c=0.0$

않겠다.

지금부터는 앞에서 설명한 여러 가지 해의 안정성과 분기점(bifurcation point)들에 대해서 논의하겠다. 특정해의 안정성을 알아보기 위해 편의상 식 (11)을 식 (10)에서 정의한  $u_1, v_1, u_2, v_2$ 로서 표현하고 그 시스템의 자코비안 행렬을 구한다. 그리고 그 자코비안 행렬의 1개 이상의 고유치(eigenvalue)의 실수부가 양인 경우 그 특정해는 불안정해이다. 시스템의 안정성과 밀접한 관련이 있는 분기는 그 시스템의 물리적, 또는 수학적 매개변수(parameter)의 변화와 관련하여 논의한다. 예를 들어서 외부가진력의 주파수의 변화와 그 시스템이 가질 수 있는 해의 분기에 대해 설명을 하기로 한다. 그림 5에서 볼 수 있는 것처럼 구간 I에서 구간 II로 넘어갈 때 1개의 안정적인 단일모드해는 1개의 불안정한 단일모드해와 1개의 안정적인 연성모드해로 분기한다

(bifurcate). 분기이론에서는 그림 5와 같이 해를 매 매개변수의 함수로서 표시한 것을 분기 다이어그램(bifurcation diagram)이라 한다. A점, 또는 A점에 해당하는 주파수 값을 피치포크 분기점(pitchfork bifurcation point)이라고 한다. 구간 II에서 구간 III으로 넘어갈 때, 즉 B점에서 안정적인 단일모드해, 그리고 불안정한 단일모드해가 각각 1개씩 분기하게 되며, 이러한 경우를 새들노드 분기(saddle-node bifurcate).

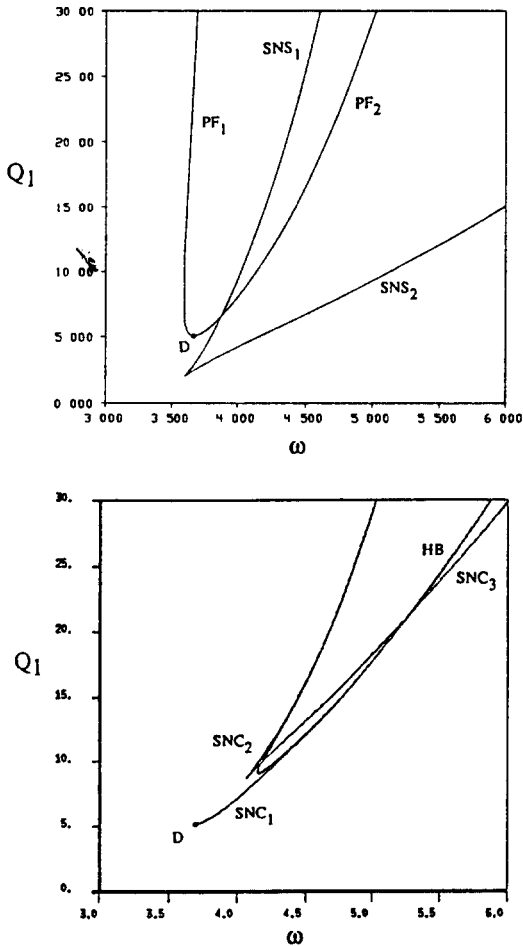
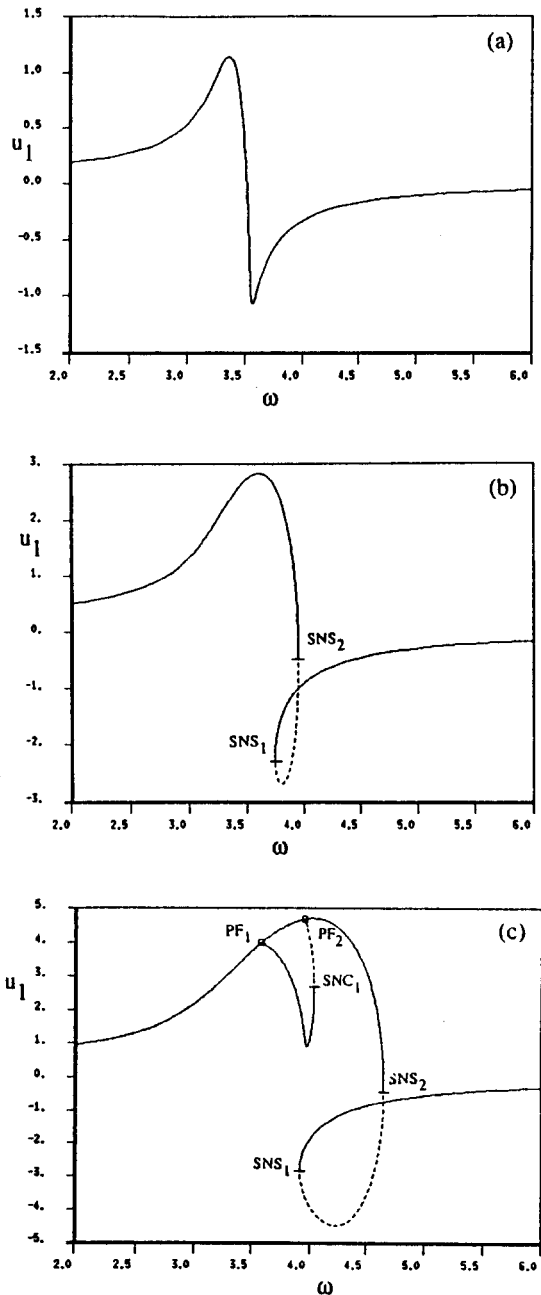


그림 6  $Q_1$ - $\omega$  공간상의 다양한 분기 세트들;  $Q_2=0.0, c=0.195$



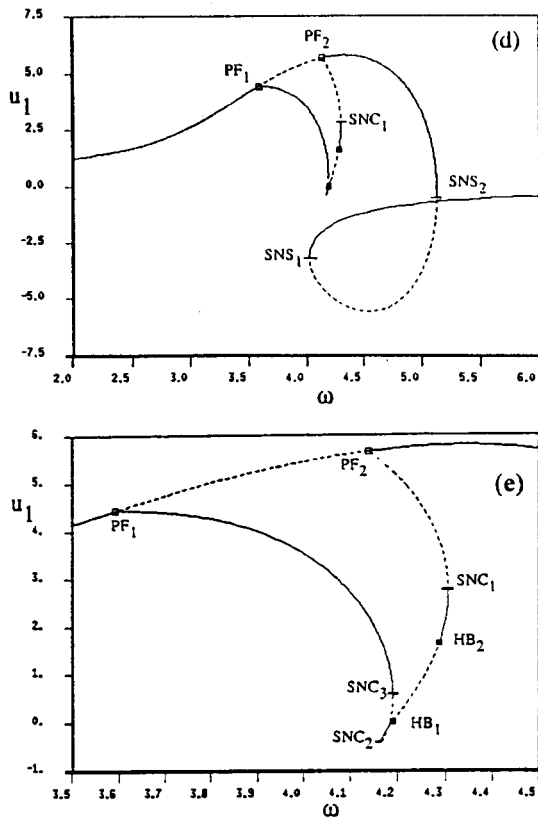


그림 7 외력의 변화에 따른 분기 다이어그램 ;  $c=0.195$ ,  $Q_2=0.0$ . (a)  $Q_1=1.5$ , (b)  $Q_1=4.0$ , (c)  $Q_1=7.5$ , (d)와 (e)  $Q_1=10.0$

bifurcation)라 한다. 분기 또는 분기점에 대해 주목할 만한 점은 언제나 해의 안정성이 변화한다는 점이다. 그림 5에서 볼 수 있듯이 A, B, C 점에서는 해의 개수도 변화하지만 그 안정성 역시 변화하는 것을 알 수 있다.

이러한 분기는 시스템의 물리적 또는 수학적 매개 변수의 변화에 따라 매우 다양하게 변화한다. 예를 들어 외력의 크기,  $Q_1$ 의 변화에 따라 분기의 존재 여부, 또는 분기점의 위치 등이 외부 가진력의 주파수,  $\omega$ 축상에서 바뀌게 된다. 그런데 이러한 분기점, 또는 시스템의 안정성이 변화하는 조건을 그림 6와 같이  $Q_1$ 과  $\omega$ 의 공간상에 표시할 수 있으며 분기이론에서 말하는 분기세트(bifurcation set)의 한 예이다. 그림 6에서 PF, SNS, SNC, HB는 각각 pitchfork bifurcation set, saddle-node bifurcation set of single-mode solution, saddle-node bifurcation set of couple-mode solution, 그리고 아래에서 설명할 hopf bifurcation set들을 의미한다. 예를 들어  $Q_1$ 이 10.0인 경우 그림 6에서  $Q_1=10.0$ 인 점에서 수

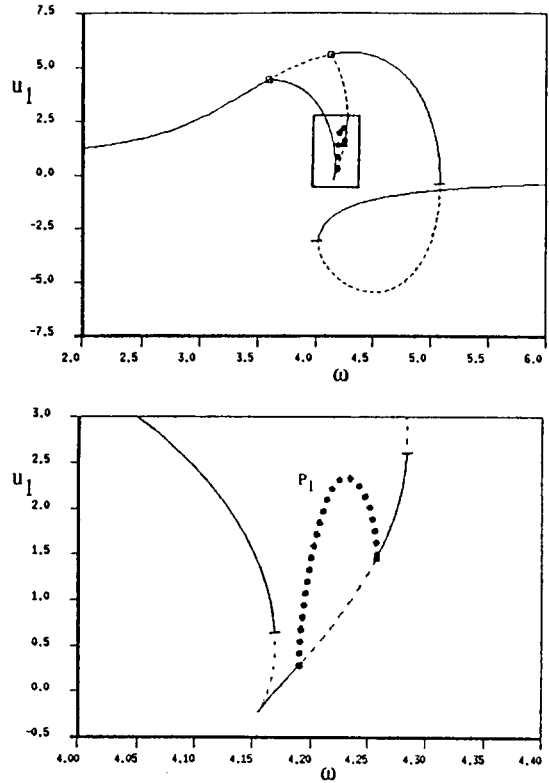


그림 8 분기 다이어그램 ;  $Q_1=10.0$ ,  $Q_2=0.0$ ,  $c=0.20$ .

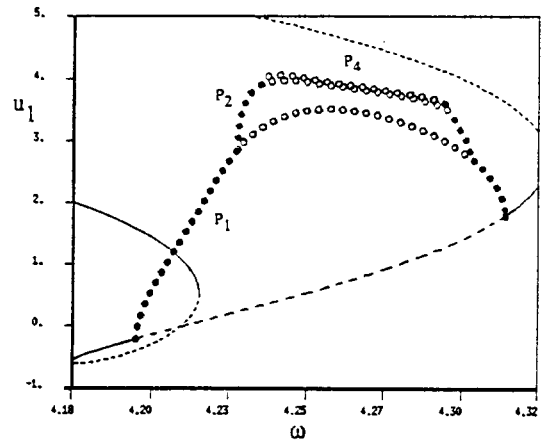


그림 9 분기 다이어그램 ;  $Q_1=10.0$ ,  $Q_2=0.0$ ,  $c=0.19$ .

평선을 그으면 각각의 분기 세트와 만나는 점들에 대응하는  $\omega$ 의 값이 분기점이 된다.

이러한 분기가 발생할 때 위에서 언급한 고유치의 실수부는 음에서 양으로, 또는 양에서 음으로 변하게 되며, 그 분기점에서는 영(zero)의 실수부를 갖게 된다. 이때 고유치의 허수부는 영의 값을 가질 수도, 아닐 수도 있다. 피치코프 분기와 새들노드

분기는 허수부가 영인 경우이며 호프 분기는 허수부가 영이 아닌 경우, 즉 고유치가 순수허수인 경우이다. 호프 분기의 경우 피치 포크 분기와 새들노드 분기의 경우와는 다른 종류의 정상해가 분기하며 주

기적 정상해 (periodic steady-state solution)라 불리운다. 일반적인 정상해는 식 (11)의 우변이 영인 경우의 해이며 주기적 정상해는 그렇지 않은 경우이다. 정상해라는 점에서 비정상해 (transient solution)

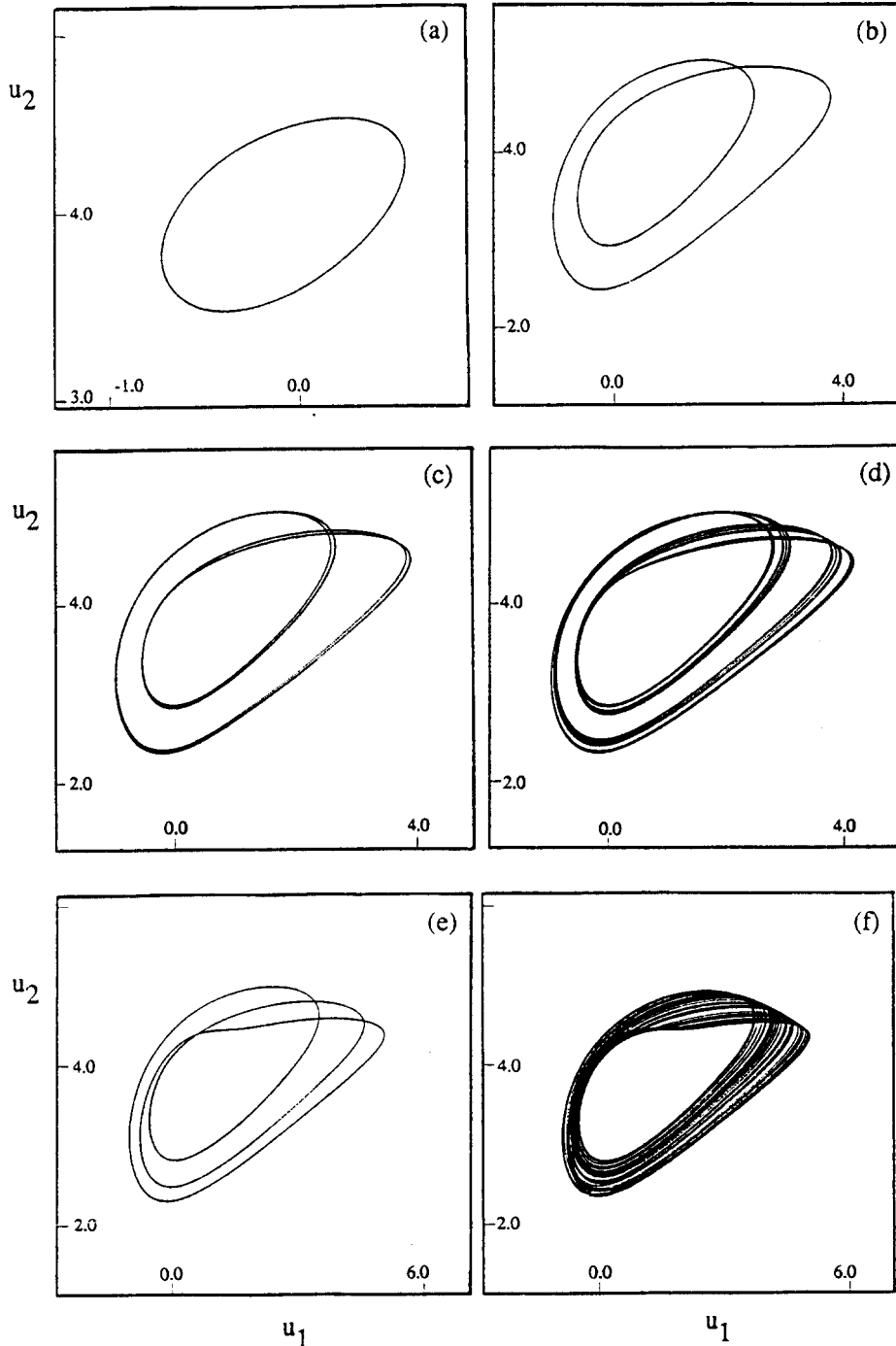


그림 10 주기적 정상해의 위상평면상의 궤적 ;  $Q_1=10.0$ ,  $Q_2=0.0$ ,  $c=0.19$  (a)  $\omega=4.2(P_1)$ , (b)  $\omega=4.23(P_2)$ , (c)  $\omega=4.235(P_3)$ , (d)  $\omega=4.237(Ch.)$ , (e)  $\omega=4.2425(P_3)$ , (f)  $\omega=4.248(Ch.)$ .



와는 확연히 구별되어 물리적으로 관찰되어지는 것은 진폭변조(amplitude-modulated)된 진동이다. 위에서 기술한 흡진기의 경우에도 피치포크, 새들노드, 호프 분기들이 존재하며 그림 4에서 흰사각형 기호는 피치포크, 검은 사각형 기호는 호프 분기점을 표시한다. 그림 7은 일련의 분기 다이어그램들을 보여주며 외력의 크기,  $Q_1$ 이 증가함에 따라 여러 가지 분기가 발생하는 것을 보여주고 있다. 그림 7(a)는 아무런 분기점을 보여주지 않으며 그림 7(b)는 2개의 새들노드 분기점을 보여 주고 있다.  $Q_1$ 이 더 증가된 경우를 그림 7(c)에서 보여주고 있으며 연성모드해가 피치포크 분기점으로부터 분기되는 것을 볼 수 있다. 그림 7(d)는 호프 분기점을 보여주고 있으며 그 분기점 근처를 확대한 것을 그림 7(e)에서 보여주고 있다. 그림 8의 분기다이어그램은 호프 분기점에서 분기되는 주기적 정상해를 검은 원으로 표시하고 있으며 'P<sub>1</sub> 해'라 명칭하겠다. 검은 원은 안정한 주기적 정상해를 의미하며 그 값은 변조된 진폭의 최대치를 나타낸다. 그림 7과 그림 8은 비선형 시스템을 연구하는데 널리 사용되는 수치해석 프로그램 AUTO<sup>(15)</sup>를 사용해서 구했다. 그림 9는 안정한 P<sub>1</sub>해가 안정한 P<sub>2</sub>해와 불안정한 P<sub>1</sub>해로 분기하는

것을 보여준다. P<sub>1</sub>해와 P<sub>2</sub>해의 의미는 그림 10의 위상평면(phase plane)상에서의 해의 궤적을 보면 쉽게 알 수 있다. 그림 10(a)와 그림 10(b)는 각각 P<sub>1</sub>해와 P<sub>2</sub>해를 보여주며 이러한 분기를 주기배가(period doubling) 분기라 한다.

이 주기배가는 해의 주기가 정확히 2배로 된다는 것을 의미하는 것은 아니며 그림 10(a), (b)에서 보는 것처럼 위상공간(phase space) 상에서 궤적이 변화하는 것을 의미한다. 그림 9의 분기 다이어그램은 주기배가 분기가 다시 한 번 일어나는 것을 보여주며 그림 10(c)는 P<sub>4</sub>해를 위상평면상에서 보여준다. 그림 10(d), (f)는 혼돈적인 해(chaotic solution)를 보여주고 있다. 혼돈적인 해에 대해서는 여기에서는 자세히 언급하지는 않겠으나 이러한 혼돈적인 해는 다른 정상해, 예를 들어 단일 모드해, 연성모드해와 공존하기도 하고, 또 다른 혼돈적인 해와 공존하기도 한다.

위에서 언급한대로 이러한 혼돈적인 해를 포함한 주기적 정상해는 물리적으로 측정하는 경우 진폭변조된 진동을 보여주며 그림 11은 (1,2)모드의 진폭  $X_1$ 을 시간의 함수로 보여주고 있다. 그림 11(a), (b), (c)는 각각 위에서 언급한 P<sub>1</sub>해, P<sub>2</sub>해, 혼돈적

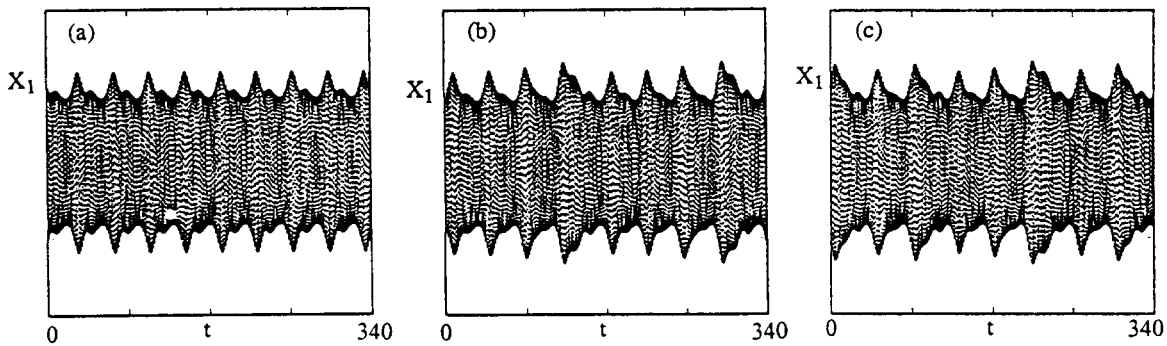


그림 11 (1,2) 모드의 시간의 함수로서의 진폭  $X_1$ 의 변화;  $Q_1=10.0$ ,  $Q_2=0.0$ ,  $c=0.18$   
 (a)  $T_1$  solution,  $\omega=4.232$ , (b)  $T_2$  solution,  $\omega=4.233$ , (c) Chaotic solution,  $\omega=4.234$ .

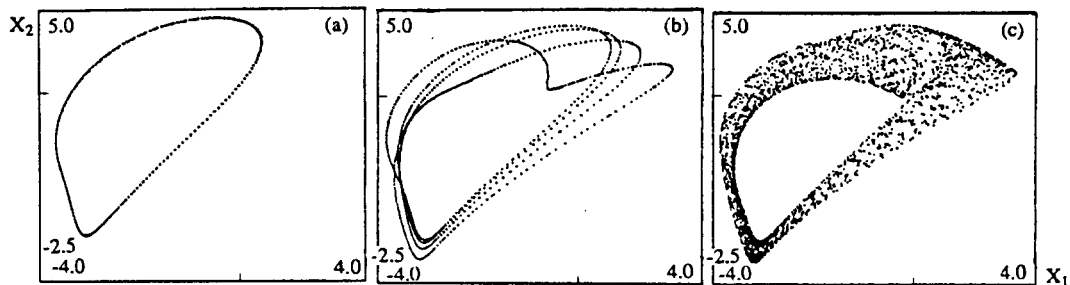


그림 12 그림 11의 (a), (b), (c)의 푸앙카레 섹션;  $Q_1=10.0$ ,  $Q_2=0.0$ ,  $c=0.18$ .  
 (a)  $T_1$  solution,  $\omega=4.232$ , (b)  $T_2$  solution,  $\omega=4.233$ , (c) Chaotic solution,  $\omega=4.234$ .

인 해에 대응하는 것으로  $T_1$ ,  $T_2$ , 혼돈적인 해라 칭한다. 그림 11의 푸앵카레 섹션(Poincare section)<sup>(3,4)</sup>을 구하면 그림 12와 같다. 식 (11)의  $P_1$ 해와  $P_2$ 해는 그림 12(a), (b)에 대응하며 그 분기는 주기배가 분기에 대응하여 토러스 배가(torus doubling) 분기라 한다. 그림 12(c)는 혼돈적인 진동을 보여주고 있다.

#### 4. 요약 및 결론

내부공진은 2자유도계 이상의 다양한 비선형 시스템에 존재할 수 있으며 모드 사이의 진동에너지의 교환의 원인이 된다. 위에서 설명한 흡진기의 경우처럼 그 시스템의 동작에 필수적인 요소가 되기도 하며 직사각형 평판의 경우처럼 선형이론으로는 예측불가능한 진폭변조된 진동을 유발하기도 한다. 이론적인 해석의 결과 다양한 분기와 여러 가지 형태의 해를 가지며, 특히 주기적 정상해와 혼돈적인 해를 갖는 것이 밝혀졌다. 이러한 주기적 정상해는 구조물에 따라 여러 가지 형태로 나타나며 평판의 경우는 진폭변조된 움직이는 파형으로, 본문에서는 언급하지 않았지만 현의 경우는 타원의 궤적의 크기와 주축의 방향의 변화로 나타난다. 이러한 다양한 해들은 구조물의 종류와 형상에 따라 다른 형태로 나타나며 향후 연구의 대상이라 생각되어진다.

#### 참고 문헌

- (1) Nayfeh, A. H. and Mook, D. K., 1979, Non-linear Oscillations, Wiley-Interscience, New York.
- (2) Abraham, R. H. and Shaw, C. D., 1992, Dynamics: The Geometry of Behavior, Redwood City.
- (3) Guckenheimer, J. and Holmes, P. J., 1983, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York.
- (4) Moon, F. C., 1987, Chaotic Vibrations : An Introduction for Applied Scientists and Engineers, Wiley-Interscience, New York.
- (5) Miles, J. W., 1984, 'Resonant, Nonplanar Motion of a Stretched String', Journal of Acoustical Society of America, 75 : 1505~1510.
- (6) Yang, X. L. and Sethna, P. R., 1992, 'Non-linear Phenomena in Forced Vibrations of a Nearly Square Plate-Antisymmetric Case', Journal of Sound and Vibration, 155 : 413~441.
- (7) Nayfeh, A. H. and Balachandran, B., 1989, 'Modal Interactions in Dynamical and Structural Systems', Applied Mechanics Review, 42 : S175~S201.
- (8) Chang, S. I., Bajaj, A. K. and Davies, P., 1995, 'Bifurcations and Chaotic Motions in Resonantly Excited Structures', in Bifurcation and Chaos : Theory and Applications, Awrejcewicz, J. (eds.), Springer-Verlag, Berlin, 217~252.
- (9) Iooss, G. and Joseph, D. D., 1990, Elementary Stability and Bifurcation Theory. Springer-Verlag, New York.
- (10) Hatwal, H., Mallik, A. K. and Ghosh, A., 1983, 'Forced Nonlinear Oscillations of an Autoparametric System-Part 1 : Periodic Responses', ASME Journal of Applied Mechanics 50, 657~662.
- (11) Nayfeh, A. H., 1973, Perturbation Methods, Wiley, New York.
- (12) Bajaj, A. K., Chang, S. I. and Johnson, J. M., 1994, 'Amplitude Modulated Dynamics of a Resonantly Excited Autoparametric Two Degree-of-Freedom System', Nonlinear Dynamics 5 : 433~457.
- (13) Chang, S. I., Bajaj, A. K. and Krousgrill, C. M., 1993, 'Non-Linear Vibrations and Chaos in Harmonically Excited Rectangular Plates with One-to-One Internal Resonance', Nonlinear Dynamics 4 : 433~460.
- (14) Bajaj, A. K., Davies, P. and Chang, S. I., 1995, 'On Internal Resonances in Mechanical Systems', in Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics, Kliemann, W. and Sri Namachchivaya, N. (eds.), CRC Press, Boca Raton, 69-94.
- (15) Doedel, E., 1986, AUTO:Software for Continuation and Bifurcation Problems in Ordinary Differential Equations, Report, Department of Applied Mathematics, California Institute of Technology.