

〈논 문〉 SAE NO. 97370017

구속된 다물체 시스템에 대한 운동 방정식의 미분 방정식화 및 동역학 해석

A Formulation of the Differential Equation on the Equations of Motion and Dynamic Analysis for the Constrained Multibody Systems

이 동 찬*, 이 상 호**, 한 창 수***
D. C. Lee, S. H. Lee, C. S. Han

ABSTRACT

This paper presents the method to eliminate the constraint reaction in the Lagrange multiplier form equation of motion by using a generalized coordinate driver from the velocity constraint equation. This method introduces a matrix method by considering the m dimensional space spanned by the rows of the constraint jacobian matrix. The orthogonal vectors defining the constraint manifold are projected to null vectors by the tangential vectors defined on the constraint manifold. Therefore the orthogonal projection matrix is defined by the tangential vectors. For correcting the generalized position coordinate, the optimization problem is formulated. And this correction process is analyzed by the quasi Newton method. Finally this method is verified through 3 dimensional vehicle model.

주요기술용어 : Orthogonal projection matrix(직교투영행렬), Constraint reaction(구속반력), Generalized coordinate(일반좌표), Constraint manifold(구속조건 집합체), Kinematic constraint(기구학적 구속 조건), Driving constraint(구동구속조건)

기 호 설 명

- | | | | |
|---|---------------------------|-------------|---|
| q | : Generalized coordinates | n | : Number of generalized coordinates |
| v | : Independent coordinates | m | : Number of constraint equations |
| u | : Dependent coordinates | M | : Inertial matrix in terms of Cartesian coordinates |
| | | \tilde{M} | : Inertial matrix in terms of relative coordinates |
| | | Q | : Generalized force in terms of Cartesian coordinates |
| | | \tilde{Q} | : Generalized force in terms of relative co |

* 고등기술연구원 자동차기술연구소

** 정회원, 한양대학교 정밀기계공학과 대학원

*** 정회원, 한양대학교 기계공학과

ordinates

B : Velocity transformation matrix

Φ_c : Jacobian matrix in terms of Cartesian coordinates

Φ_i : Jacobian matrix in terms of independent coordinates

Φ_d : Jacobian matrix in terms of dependent coordinates

Φ_o : Orthogonal projection matrix

1. 서 론

기구학적 조인트로 연결된 다물체 시스템의 거동 해석을 위해서는 구속 반력과 외력이 포함된 미분 방정식과 기구학적 구속 조건을 나타내는 비선형 대수 구속 방정식이 필요하다. 이로 부터 시스템의 동적 거동을 해석하기 위한 미분-대수 방정식을 구성한다. 그러나 다물체 시스템에 대한 라그랑지 승수 형태(Lagrange Multiplier Form)의 운동 방정식에서 미지수가 방정식의 수보다 구속 조건식 수 만큼 많기 때문에 해석을 위하여 구속 조건이 고려된 미분-대수 방정식으로 시스템의 운동 방정식을 표현한다. 만약, 라그랑지 승수 형태의 운동 방정식에서 구속 반력항을 제거하여 준다면 비선형 대수 구속 방정식을 고려하지 않고 동적 거동 해석을 수행 할 수 있다.

구속 반력이 없는 시스템의 운동방정식 유도 방법이 많이 제시되어 왔으나, 이들 방법들은 변수를 구속 조건 집합체(Constraint Manifold)의 접평면에 투영하는 단계에서 변환행렬을 사용한 지역 매개 변수화(Local Parameterization)가 필요하며, 해의 보정을 위하여 뉴우튼 방법(Newton Method) 또는 BDF(Backward Differentiation Formula) 방법이 사용된다^{4)~9)}.

본 연구는 속도 구속조건식으로부터 독립속도에 대한 시스템의 일반속도를 구성시켜줌으로써 라그랑지 승수 형태(Lagrange Multiplier Form)의 운동방정식에서 나타나는 구속 반력항을 제거 할 수 있는 직교 투영 행렬(Orthogonal Projection Matrix)을 부분 LU 분리법(Partial LU

Decomposition) 즉, 행과 열이 서로 독립적인 자코비언을 열에 대한 부분 LU 분리법을 사용하여 독립 좌표와 종속 좌표를 분리하고 동시에 직교 투영 행렬을 형성하기 위한 부분 행렬을 형성하는 방법 및 구속 구속 조건의 영향이 고려된 일반 속도 좌표를 제시한다. 그리고 위치 좌표의 보정을 위하여 위치 좌표와 구속 조건을 고려한 최적화 문제로 공식화하여 비선형 대수 방정식을 유도한다. 이 방정식을 풀기위하여 뉴우튼-랩슨(Newton-Raphson)법으로 공식화 한다. 이것을 풀기위하여 준 뉴우튼(Quasi-Newton)법을 사용한다.

2. 시스템의 운동방정식 구성^{2),3)}

라그랑지 형태의 운동방정식을 사용하여 시스템에 대한 운동방정식을 미분방정식의 형태로 나타내기 위하여 다음과 같은 라그랑지 형태의 운동방식을 설명하려 한다. 직교좌표 방법에서의 일반 좌표를 q로 나타낼 때, 기구학적으로 구속된 다물체 시스템의 힘에 대한 변분 운동방정식(Variational Equations of Motion)은 다음과 같다.

$$\delta q^T [M\dot{q} - Q] = 0 \tag{1}$$

그러나 기구학적인 구속조건은 식 (1)에서의 가상변위 δq 에 대하여 만족되어야 한다. 즉,

$$\Phi_o \delta q = 0 \tag{2}$$

식 (2)를 고려하여 라그랑지 승수 이론(Lagrange Multiplier Theorem)²⁾을 사용하여 식 (1)을 표현하면 다음과 같으며, 이것을 구속된 변분 운동방정식(Constrained Variational Equations of Motion)이라 한다.

$$\begin{aligned} & [M\dot{q} - Q]^T \delta q + \lambda^T \Phi_o \delta q \\ & = [M\dot{q} + \Phi_o^T \lambda - Q]^T \delta q = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

그러므로 식 (3)에서 미소변위 δq 에 대하여

계수가 0이 되어야하며, 이것을 라그란지 승수형태(Lagrange Multiplier Form)의 운동방정식이라 한다.

$$M\ddot{q} + \Phi_q^T \lambda = Q \quad (4)$$

여기서 M은 시스템의 질량행렬, Q는 외력항, 그리고 λ 는 라그란지 미정계수이다. 그리고 식(4)에서의 Φ_q^T 는 구속조건으로부터 생겨나서 구속 반력이다.

식(4)는 미지수의 수가 방정식의 수보다 많기 때문에 가속도 구속방정식이 고려되어 구속된 다물체 시스템의 운동방정식은 미분-대수 방정식(Differential-Algebraic Equations)의 형태로 표현된다.

또한, 상대 이음 좌표 방법에서도 폐쇄 회로(Closed Loop)를 이루는 시스템에서 운동 방정식은 대수-미분 방정식의 형태로 나타나며 이에 대한 라그란지 형태의 운동방정식의 형태는 다음과 같다.

$$\widehat{M}\ddot{q} + \widehat{\Phi}_q^T \lambda = \widehat{Q}$$

윗 식에서의 \widehat{q} 는 시스템의 조인트에서 정의되는 상대 이음 좌표(Relative Joint Coordinate)에 대한 가속도이며, 질량행렬 \widehat{M} 과 외력항인 \widehat{Q} 은 다음과 같이 표현된다.

$$\widehat{M} = B^T M B$$

$$\widehat{Q} = B^T Q - B^T M B \dot{q} = B^T (Q - M B \dot{q})$$

여기서 B는 직교 절대 속도와 상대 이음 속도 사이의 관계를 나타내는 속도 변환 행렬(Velocity Transformation Matrix)이고, \dot{B} 은 속도 변환 행렬을 시간에 대해 미분한 것이다.

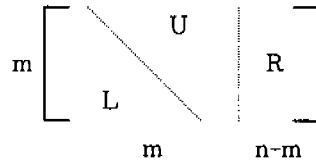
3. 시스템 일반 좌표 구성 및 직교 투영 행렬의 유도

구속된 다물체 시스템의 강체들의 동적 거동을

나타내는 일반속도 \dot{q} 은 독립속도항 \dot{v} 과 종속속도항 \dot{u} 으로 나눌 수 있으며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{u} \end{bmatrix} \quad (5)$$

기계적 시스템을 이루는 각 강체들사이의 연결 거동을 나타내는 구속 조건의 자코비언 Φ_q 의 열과 행이 서로 독립적일 때 자코비언에 대하여 LU분리를 하면 자코비언은 다음과 같은 행렬형태로 만들어진다.



행렬 L과 U의 열은 종속좌표 u를 나타내며, 행렬 R의 열은 독립좌표 v를 나타낸다. 일반좌표 q를 u와 v로 분리하는 것은 Φ_q 를 독립좌표와 종속좌표에 대한 자코비언을 구하여 다음과 같이 분할시키는 것과 같다.

$$\Phi_q = [\Phi_u \quad \Phi_v] \quad (6)$$

여기서 $\Phi_u = LU$ 이며, $\Phi_v = LR$ 로 나타낼 수 있다. 기구학적 구속조건(Kinematic Constraints)과 구동 구속조건(Driving Constraints)을 포함하는 경우의 일반속도 구속방정식 Φ 을 독립속도항과 종속속도항을 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_u \dot{q} + \Phi_v = 0 \\ &= \Phi_u \dot{u} + \Phi_v \dot{v} + \Phi_v = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 m은 구속 방정식 수, n은 일반좌표 수일 때, Φ_u 의 차원은 $m \times m$ 이고, Φ_v 의 차원은 $m \times (n-m)$ 이다. Φ_v 는 구동 구속조건이 존재할 때 나타나는 구속 방정식의 항이다.

일반속도 좌표를 구하기 위하여 식 (7)으로부터 종속속도항 \dot{u} 을 구하면 다음과 같다.

$$\dot{u} = -\Phi_1^{-1} \Phi_1 \dot{v} - \Phi_1^{-1} \Phi_1 \quad (8)$$

식 (8)를 식 (5)의 종속속도항에 대입하여 \dot{q} 를 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ -\Phi_1^{-1} \Phi_1 \dot{v} - \Phi_1^{-1} \Phi_1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

식 (9)를 독립속도항으로 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} I \\ -\Phi_1^{-1} \Phi_1 \end{bmatrix} \dot{v} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\Phi_1^{-1} \Phi_1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

이와 같이 속도 구속조건식을 만족하는 좌표를 구성할 수 있다. 식 (10)의 오른쪽항의 첫번째는 기구학적 구속조건만 존재할 때 나타나고, 구동 구속조건이 존재할 때는 두번째항이 고려되어진다. 또한 이 일반속도는 독립속도로부터 얻어진다. 일반속도는 Φ_1 와 Φ_1 의 함수이기 때문에 구속조건을 만족시키는 일반위치 좌표를 필요로 한다.

식 (10)을 속도 구속방정식에 대입하여 Φ_1 에 의해 형성되는 공간에 접벡터(Tangential Vectors)들의 존재함을 알 수 있다. 식 (10)과 식 (6)을 사용하여 식 (7)을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Phi_1 \cdot \left\{ \begin{bmatrix} I \\ -\Phi_1^{-1} \Phi_1 \end{bmatrix} \dot{v} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\Phi_1^{-1} \Phi_1 \end{bmatrix} \right\} + \Phi_1 &= 0 \\ [\Phi_1 \ \Phi_1] \cdot \left\{ \begin{bmatrix} I \\ -\Phi_1^{-1} \Phi_1 \end{bmatrix} \dot{v} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\Phi_1^{-1} \Phi_1 \end{bmatrix} \right\} + \Phi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)의 왼쪽 항의 두번째 항의 독립좌표항과 종속좌표항과의 행렬 곱을 사용하여 세번째항과의 합은 0이 된다. 따라서 첫번째항에서 임의

의 독립속도항 \dot{v} 에 대해서도 계수행렬이 0이 됨을 알 수 있다. 따라서 식 (11)로부터 기구학적 구속조건만 있는 경우, 또는 기구학적 및 구동구속조건이 함께 존재하는 시스템에 대하여 구속조건과 자코비언 Φ_1 에 대한 직교 투영행렬이 존재함을 알 수 있고, 이를 Φ_1^+ 로 표현하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi_1^+ = \begin{bmatrix} I \\ -\Phi_1^{-1} \Phi_1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

따라서, Φ_1 와 Φ_1^+ 의 관계는 다음과 같다.

$$\Phi_1 \Phi_1^+ = 0 \quad (13)$$

일반 가속도 \ddot{q} 의 독립 가속도항을 \ddot{v} 로 그리고 종속 가속도항을 \ddot{u} 로 나타낼 때, 일반 가속도 구속방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi} &= \Phi_1 \ddot{q} - \gamma = 0 \\ &= \Phi_1 \ddot{v} + \Phi_1 \ddot{u} - \gamma = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, γ 는 다음과 같다.

$$\gamma = -(\Phi_1 \dot{q}) \cdot \dot{q} - 2\Phi_1 \dot{q} - \Phi_1$$

식 (14)로부터 종속 가속도 \ddot{u} 를 독립 가속도 구속 조건의 항으로 나타내면 다음과 같다.

$$\ddot{u} = -\Phi_1^{-1} \Phi_1 \ddot{v} + \Phi_1^{-1} \gamma \quad (15)$$

이로부터 식 (15)를 사용하여 일반 가속도 \ddot{q} 를 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= \begin{bmatrix} \ddot{v} \\ \ddot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{v} \\ -\Phi_1^{-1} \Phi_1 \ddot{v} - \Phi_1^{-1} \gamma \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I \\ -\Phi_1^{-1} \Phi_1 \end{bmatrix} \ddot{v} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\Phi_1^{-1} \gamma \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)의 두 항은 기구학적 구속조건 뿐만 아니라 구동 구속 조건이 동시에 존재할 때, 일반 가속도가 표현되는 형태이며, 구동 구속 조건이 없을 때에는 단지 γ 를 이루는 항에서 구동 구속에 대한 항만이 소거된다.

4. 시스템 운동방정식의 미분방정식화

구속 조건 자코비언의 직교 투영행렬 Q_0^+ 를 사용하여 시스템의 운동 방정식을 구속 반력이 없는 운동 방정식의 형태로 표현될 수 있다. 식 (13)으로부터 Φ_0^T 의 직교 투영 행렬은 $(\Phi_0^+)^T$ 가 됨을 알 수 있으며, 식 (4)의 양쪽 항에 $(\Phi_0^+)^T$ 를 곱한 후 식 (13)의 조건을 적용하여 정리하면 라그랑지 승수 형태의 운동 방정식은 구속 반력이 없는 운동 방정식의 형태로 다음과 같이 변환된다.

$$(\Phi_0^+)^T M \ddot{q} = (\Phi_0^+)^T Q \tag{17}$$

식 (17)의 구속 반력이 없는 운동 방정식을 독립 가속도항에 대해서 표현하기 위하여 식 (17)에 일반 가속도식 식 (16)을 대입하여 정리하면 다음과 같은 간결한 형태로 나타낼 수 있다.

$$C^T M C \dot{v} = C^T Q - C^T M D = C^T (Q - MD) \tag{18}$$

여기서 $C = \Phi_0^+ = \begin{bmatrix} I \\ -\Phi_0^{+T} \Phi_0^+ \end{bmatrix}$ 로 Φ_0^+ 의 직교 투영행렬이며, $D = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Phi_0^{+T} \gamma \end{bmatrix}$ 이다.

5. 수치해석

5.1 위치해석

일반위치 좌표는 일반속도로 부터 구한다. 적분된 위치좌표는 일반적으로 기구학적 구속조건을 만족하지 않는다. 구속조건을 만족하는 q^* 에 가장 가까운 거리에 있는 q 를 찾는 방법은 다음

과 같은 최적화 문제로 공식화 할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Min. } \frac{1}{2}(q-q^*)^T(q-q^*) \\ & \text{Subject } \Phi(q) = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

식 (19)을 구속을 받는 최적 문제로써 라그란지 승수(Lagrange Multiplier) λ 를 도입하여 라그랑지언(Lagrangian)을 만들면 다음과 같다.

$$L = \frac{1}{2}(q-q^*)^T(q-q^*) + \Phi^T \lambda \tag{20}$$

라그랑지언(Lagrangian)에 대해서 Kuhn-Tucker 필요 조건은 다음과 같다.

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial q} & \frac{\partial L}{\partial \lambda} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} (q-q^*) + \Phi_0^T \lambda \\ \Phi \end{bmatrix} = 0 \tag{21}$$

위치해석에서 풀어야 하는 방정식은 식 (21)의 비선형 대수 방정식이며, 이 방정식을 풀기 위하여 뉴우튼-랩슨법으로 공식화하면 다음과 같다. 여기서 Φ_0 는 Full Rank를 가진다고 가정한다.

$$\begin{bmatrix} I & \Phi_0^T \\ \Phi_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

식 (22)로 부터 구한 위치 좌표는 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} q^{i+1} &= q^i + \Delta q \\ \tau^{i+1} &= \tau + \Delta \lambda \end{aligned}$$

구속조건 위반량이 주어진 허용범위내에 들어올 때까지 식 (22)의 과정을 반복 수행하며, 이때 반복과정에서 위치좌표가 교정되면 계수행렬의 자코비언 행렬도 달라져야 한다. 하지만 일반적으로 위치좌표의 교정치는 미소하기 때문에 자코비언 행렬이 크게 달라지지 않는다. 따라서 본

연구에서는 한 번 계산한 계수행렬을 반복과정동안 교정하지 않고 사용하는 준 뉴턴 반복법(Quasi-Newton Iteration)이 사용된다.

5.2 속도해석

전 단계에서 계산된 독립 가속도를 적분하여 구한 독립속도와 위치해석에서 보정된 위치좌표를 이용하여 독립 및 종속좌표에 대한 자코비언 Φ_v 와 Φ_x 그리고 구동 구속조건에 대한 보정 항을 사용하여 3절에서 정의된 식 (10)에 의하여 일반속도 \dot{q} 를 구한다. 이 일반속도는 다음 단계에서는 위치좌표를 구하는 데 사용된다.

5.3 가속도해석

4절에서 정의된 식 (18)에서 독립 가속도 \ddot{v} 를 구하고 속도해석과 마찬가지로 Φ_v 와 Φ_x 그리고 γ 를 사용하여 식 (16)에 의하여 일반 가속도를 \ddot{q} 를 구한다.

6. 시뮬레이션

본 절에서는 앞에서 제안한 해석 알고리즘을 가지고 3차원 차량 모델에 적용하고자 한다. 본 연구에서 수행한 주행 시뮬레이션의 전체 차량 모델은 차체에 대하여 6 자유도, 차륜의 스트로크(stroke)에 대하여 4 자유도, 스피ن(spin)에 대하여 4 자유도, 그리고 조향(steering)에 대하여 1 자유도로써 총 15 자유도를 가지며, 전륜 현가장치는 맥퍼슨 타입으로써 너클, 아래 컨트롤 암, 스트럿과 조향을 위한 타이로드로 구성되어 있다. 후륜 현가장치는 일체 차축형의 3 링크형의 현가장치로써 일체 차축과 2개의 트레일 링크(trailing link), 횡방향의 움직임을 억제하기 위한 횡방향 로드(lateral rod)로 구성되어 있다. 전, 후륜 현가장치를 차체에 장착한 전체 모델을 Fig.1에 도시하였다.

선회 성능을 평가하기 위한 주행 시뮬레이션으로 Step Steering 해석을 수행하였다. 이것은 과도한 선회시에 차량의 조종 안정성을 검토하기 위한 것이며, 차량 속도를 80km/hr로 정속시키면서 조향입력을 2초 후에 0.2초 동안 조향 핸

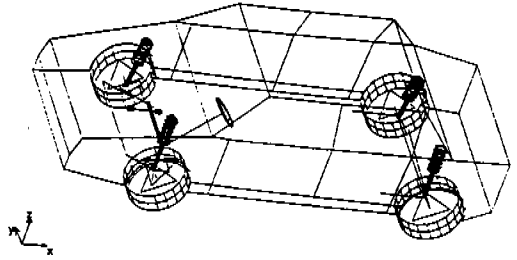


Fig.1 Full Vehicle Model

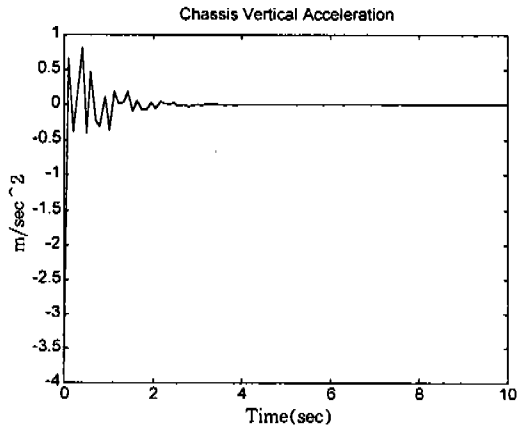


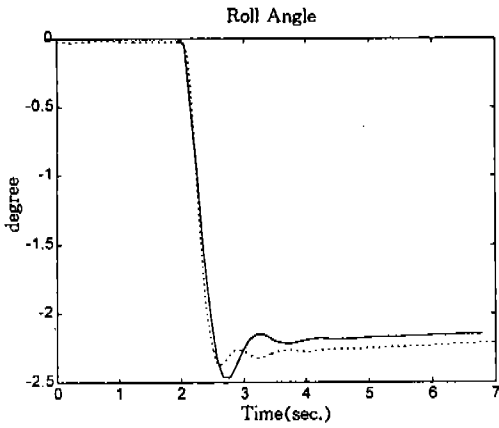
Fig.2 Vertical Acceleration of Chassis

들 45° 회전시키는 것으로 하였다.

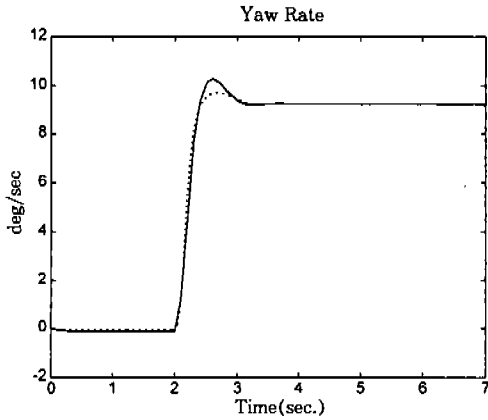
스텝 조향 시뮬레이션을 수행하기 앞서 압력 위치에 대한 초기 위치를 구하기 위해 정적 평형 해석을 수행하였다. Fig.2은 차체의 수직 가속도를 보여주고 있으며, 이 결과를 초기 위치로 입력하여 주행 시뮬레이션을 수행하였다.

Fig.3(a), (b), (c)는 각각 차체의 롤 각, 요우 속도, 횡방향 가속도를 나타내고 있다. 이 결과를 동역학 상용 프로그램인 ADAMS의 결과와 비교하여 보았다. 그림에서 보듯이 거의 일치하고 있으며 약간의 오차는 본 프로그램에서의 타이어 모델과 ADAMS상에서의 모델의 차이에서 생기는 것으로 여겨진다. 그러나 전체적인 경향은 일치하며 해석 알고리즘의 타당성을 증명할 수 있었다.

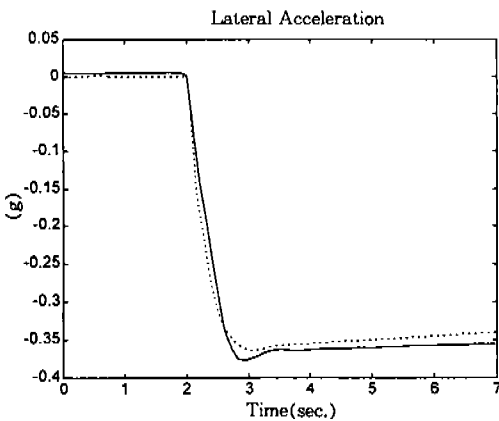
또한, Table 1에서는 해석 시뮬레이션 시의 CPU Time을 비교하였다. ADAMS에서와는 달



(a)



(b)



(c)

Fig.3 Step Steering Maneuver Results(실선 : Program, 점선 : ADAMS)

Table 1 Comparison of CPU Time between Program and ADAMS

	CPU Time (Sec.)
Suggested Algorithm	15.45
ADAMS	42.291

리 위치해석시 LU를 직접 풀지않고 준 뉴우튼(Quasi-Newton)으로 반복하여 해를 구하므로 해석시간을 단축시킬 수 있음을 알 수 있다.

7. 결 론

구속 조건식으로 부터 시스템의 거동 좌표를 유도하였으며, 이 좌표를 이용하여 시스템 운동 방정식에서 구속 반력을 제거시킬 수 있는 직교 투영 행렬을 쉽게 유도해 낼 수 있었다. 그리고 이 행렬을 이용하여 시스템의 거동 해석을 위한 운동방정식을 미분방정식의 형태로 나타낼 수 있으며, 위치좌표의 보정을 위하여 위치와 구속조건이 고려된 최적화 문제를 공식화하고 준 뉴우튼반복법(Quasi-Newton iteration)을 사용하였다. 미분방정식의 사용과 위치 보정에서의 뉴우튼-랩슨반복법(Newton-Raphson iteration)이 아닌 준 뉴우튼 반복법(Quasi-Newton iteration)을 사용하더라도 해석결과에 있어서 신뢰성을 보장할 수 있었으며 해석시간에서 예제를 통하여 그 효율성을 검증할 수 있었다.

참 고 문 헌

1. Strang, G. 1980. Linear Algebraic and Its Application, 2nd Edition, Academic Press, New York.
2. Haug, E.J. 1989, Computer Aided Kinematics and Dynamics, Vol 1 : Basic Methods, Allyn and Bacon, Boston.
3. Parviz E. Nikravesh, 1988, Computer-Aided Analysis of mechanical systems, Prentice-Hall
4. S.S.Kim, 1986, "QR decomposition for

- state representation of constrained mechanical design systems”, *Journal of Mechanism, Transmissions and Automation in design*, Vol. 108, pp. 183~188.
5. W.C. Rheinbolt, 1994, “Differential-algebraic systems as ordinary differential equations manifolds”, *Math. Comp.* Vol. 43, pp. 473~482.
 6. W. Blajier, D. Bestle, and W. Schiehlen, 1994, “An Orthogonal Complement Matrix Formulation for Constrained Multibody Systems”, *Transaction of the ASME*, Vol. 116, pp. 423~428.
 7. W. Blajier, 1994, “A projection method approach to constrained dynamic analysis”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 59, pp. 643~649.
 8. Jeng Yen, 1993, “Constrained equations of motion in multibody dynamics as ODEs on manifolds”, *SIAM J. UNMER. ANAL.*, Vol. 30, No. 2, pp. 553~568.
 9. Edda Eich, 1993, “Convergence results for a coordinate projection method applied to mechanical systems with algebraic constraints”, *SIAM J. NUMER. ANAL.*, Vol. 30, No. 5, pp. 1467~1482.