

# 견실한 비선형 마찰보상 이산제어 - 응용

강민식\*, 송원길\*, 김창재\*, 이상국\*

## Robust Digital Nonlinear Friction Compensation - Application

M.S. Kang\*, W.G. Song\*, C.J. Kim\*, S.K. Lee\*

### ABSTRACT

To prove the stability and the effectiveness of the robust non-linear friction control suggested and proved analytically in the previous paper <sup>(2)</sup>, the describing function analysis is introduced. The instability of the Southward's nonlinear friction compensation for a digital position control and the improvement of phase margin of the robust nonlinear friction compensation are verified qualitatively through the describing function analysis. Those controls are applied to a single-axis digital servo driving experimental setup which has inherent stick-slip friction and experimental results confirm the results obtained in <sup>(2)</sup> and the effectiveness of the robust nonlinear friction compensation for a digital position control.

**Key Words:** stick-slip friction (정지-미끄럼 마찰), hysteresis control(히스테리시스 제어), phase lead/ lag (위상앞섬/지연), describing function(기술함수)

### 1. 서론

마찰은 정밀위치 제어계의 제어성능을 좌우하는 중요한 자로 그 영향의 최소화를 위한 많은 연구가 진행되어 왔다. Southward<sup>(1)</sup>는 1-자유도 마찰계의 위치제어를 위한 비선형 제어를 제시한 바 있는데, 이 제어는 정지-미끄럼(stick-slip)현상을 피하고, 위상평면 원점의 Asymptotic 안정성을 보장한다. 특히, 마찰의 정량적인 값 대신 마찰의 범위를 설정하고 설정된 범위의 상.하한 값을 이용하므로 모형기준제어나, 적응제어에 비해 견실성(robustness)을 갖고 있으며, 구조 또한 간단하여 실제

응용이 기대되는 방법이다.

Southward의 제어는 연속시간제어(continuous time control) 방법으로 이산제어계에 적용시 불안정해진다<sup>(2)</sup>. 이러한 불안정성을 해결하기 위해 참고문헌<sup>(2)</sup>에서는 히스테리시스형 마찰보상기의 안정성 향상효과를 이용한 견실한 비선형 마찰보상 이산제어기 설계 방법을 제시하고 Lyapunov Direct Method를 이용하여 그 안정성을 증명한 바 있다. 단, 이 제어기는 제어기 설계 파라미터로 정의되는 범위 내에 존재하는 정상상태 오차를 갖고있다.

비선형계의 안정성해석에 널리 적용되는 기술함수(describing fuction) 해석법은 주파수 응답(frequen-

\* 국방과학연구소. 1-1-4

cy response)을 이용하며, 계의 비선형요소를 선형화하여 Nyquist 안정성 판정에 따라 폐회로의 안정성과 Limit Cycle의 존재 여부를 판별한다. 이 방법은 근사화에서 기인되는 오차를 갖고있어 경우에 따라 부정확한 결과를 주지만 현재까지 비선형계의 안정성판별에 사용되는 주요한 방법이다<sup>3, 4)</sup>. 본 논문에서는 기술함수해석을 통해 이산제어계에서 Southward제어의 불안정성과 비선형 마찰보상 이산제어의 안정성을 정성적으로 해석한다. 참고문헌<sup>2)</sup>에서 논의된 제어기들의 특성을 실제 마찰계에서 확인하기 위해 정지-미끄럼 마찰을 갖는 1-축 회전구동장치를 이용 실험하였으며, 실험 결과는 예측된 제어기 특성을 만족하였다. 특히, 비선형 마찰보상 이산제어의 안정성 및 제어 특성의 우수함은 실험결과를 통해 증명되었다.

## 2. 마찰 모델

본 논문에서 고려하는 운동계는 관성량  $J$ 와 정지-미끄럼 마찰을 갖는 1-자유도 회전체로서 운동방정식은

$$J\ddot{\theta} = -T_d + T_c \quad (1)$$

식(1)에서  $\theta$  는 회전각,  $\dot{\theta}$  는 회전속도,  $T_d$  는 마찰력,  $T_c$  는 제어입력을 나타낸다. 마찰력  $T_d$  는 정지마찰력  $T_{stick}(T)$ 과 운동마찰력  $T_{slip}(T_c)$ 의 합이며

$$T_d = T_{stick}(\dot{\theta})[\lambda(\dot{\theta})] + T_{stick}(T_c)[1 - \lambda(\dot{\theta})] \quad (2.1)$$

$$\lambda(\dot{\theta}) = \begin{cases} 1 & \dot{\theta} \neq 0 \\ 0 & \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

정지/미끄럼 마찰력은 다음과 같이 정의된다.

$$T_{stick}(T_c) = \begin{cases} T_s^+ & 0 < T_s^+ < T_c \\ T_c & T_s^- \leq T_c \leq T_s^+ \\ T_s^- & T_c < T_s^- < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$T_{slip}(\dot{\theta}) = T_d^+(\dot{\theta})\mu(\dot{\theta}) + T_d^-(\dot{\theta})\mu(-\dot{\theta}) \quad (3.2)$$

$$\mu(\dot{\theta}) = \begin{cases} 1 & \dot{\theta} > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (3.3)$$

여기서,  $T_s^+$ ,  $T_s^-$ 는 양과 음의 방향 최대 정지마찰력

이며,  $\mu(\cdot)$  는 우연속(right-continuous) Heavyside 계단함수이다.  $T_d^+$ 와  $T_d^-$ 는 각각 양과 음의 속도에서의 미끄럼 마찰력으로 다음과 같이 속도의 부호에 따라 두개의 직선으로 이루어진 영역내에 존재한다고 가정한다.

$$\begin{aligned} b_0\dot{\theta} \leq T_d^+(\dot{\theta}) \leq T_0^+ + b_1\dot{\theta}, & \quad \forall \dot{\theta} > 0 \\ T_0^- + b_1\dot{\theta} \leq T_d^-(\dot{\theta}) \leq b_0\dot{\theta}, & \quad \forall \dot{\theta} < 0 \end{aligned} \quad (4)$$

식(4)에서  $b_1 \geq b_0 > 0$ ,  $T_s^+ > T_0^+ > 0$ ,  $T_s^- < T_0^- < 0$ 라고 가정하자.

## 3. 비선형 마찰보상 제어

앞에서 정의된 정지-미끄럼 마찰계의 안정된 위치제어를 위해 제안된 Southward 제어<sup>1)</sup>와 견실한 비선형 마찰보상제어<sup>2)</sup>는 모두 미분 제어부와 비선형 제어부로 구성되며 단, 비선형 제어부의 제어입력 함수의 정의가 다르다.

### 3.1. Southward 비선형 마찰보상 제어<sup>1)</sup>

Southward에 의해 제안된 제어기는 다음 식으로 정의되며

$$T_c = -K_d\dot{\theta} - T_n \quad (5)$$

우변 마지막 항의 비선형 마찰보상은

$$T_n = \begin{cases} -\tilde{T}_s^- & 0 < \theta \leq \tilde{\theta}_H \\ 0 & \theta = 0 \\ -\tilde{T}_s^+ & \tilde{\theta}_L \leq \theta < 0 \\ K_p\theta & otherwise \end{cases} \quad (6)$$

식(6)에서  $\tilde{\theta}_L$ ,  $\tilde{\theta}_H$ ,  $\tilde{T}_s^+$ ,  $\tilde{T}_s^-$ 의 정의는 참고문헌<sup>1)</sup>에서와 같다. 이 제어기는 식(1)-(4)로 정의되는 정지-미끄럼 마찰계의 위치제어에서 위상평면 원점 ( $\theta = 0$ ,  $\dot{\theta} = 0$ )의 Asymptotic 안정성을 보장하는 견실한 제어방법이다.

### 3.2 히스테리시스 비선형 마찰보상제어<sup>2)</sup>

히스테리시스 비선형 마찰보상제어기의 구조는 식(5)와 동일하며, 단, 우변 마지막 항의 비선형 마찰보상은 식(7)과 같이 정의된다. 즉,

$$i) \dot{\theta} > 0 \text{ 일때 } T_n = \begin{cases} -\tilde{T}_s^- & 0 < \theta \leq \tilde{\theta}_H \\ 0 & \delta_L \leq \theta \leq 0 \\ -\tilde{T}_s^+ & \tilde{\theta}_L \leq \theta < \delta_L \\ K_p \theta & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7.1)$$

$$ii) \dot{\theta} < 0 \text{ 일때 } T_n = \begin{cases} -\tilde{T}_s^- & \delta_H < \theta \leq \tilde{\theta}_H \\ 0 & 0 \leq \theta \leq \delta_H \\ -\tilde{T}_s^+ & \tilde{\theta}_L \leq \theta < 0 \\ K_p \theta & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7.2)$$

$$iii) \dot{\theta} = 0 \text{ 일때 } T_n = \begin{cases} -\tilde{T}_s^- & \delta_H < \theta \leq \tilde{\theta}_H \\ 0 & \delta_L \leq \theta \leq \delta_H \\ -\tilde{T}_s^+ & \tilde{\theta}_L \leq \theta < \delta_L \\ K_p \theta & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7.3)$$

여기서,  $\delta_H < \tilde{\theta}_H, \tilde{\theta}_L < \delta_L$  로 가정한다.

이 제어기는 식(1)-(4)로 정의되는 마찰계에서 영역  $S_\delta = \{(\theta, \dot{\theta}) | \delta_L \leq \theta \leq \delta_H, \dot{\theta} = 0\}$  의 Asymptotic 안정성을 보장한다. 단,  $S_\delta$ 가 평형구간이므로 정상상태 위치 오차가 존재한다.

### 3.3. 견실한 비선형 마찰보상 이산제어 <sup>(2)</sup>

히스테리시스 비선형 마찰보상기는 위상얕섬 효과를 부여하므로 이 특성을 이용하면 이산제어계에서 안정된 응답을 얻을 수 있다<sup>(2)</sup>. 견실한 비선형 마찰보상기는 Fig.1 과 같이 연속시간 속도제어루프와 이산위치제어 블록에 히스테리시스 마찰보상기를 적용한 구조를 갖는다. 제어계의 안정성은 식(7)의 히스테리시스 마찰보상기 파라미

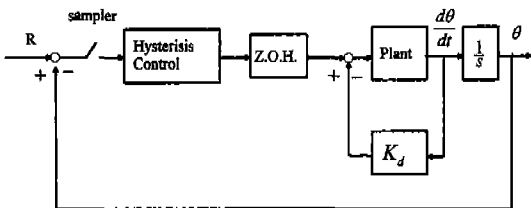


Fig. 1 Block diagram of robust digital friction compensation

터인  $\delta_H, \delta_L$  와 시간지연 크기에 따라 결정되며, 이산제어에서 주어진 샘플링 시간간격에 대해 계의 안정성을 보장하는  $\delta_H, \delta_L$  가 존재한다.  $\delta_H, \delta_L$  의 설계는 해석적 방법을 통해 결정하기는 어려우며, 기술함수 해석이나 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 결정할 수 있다.

## 4. 기술함수 해석

기술함수해석은 비선형 시스템의 주파수응답을 이용하여 계의 안정성 및 Limit Cycle 예측에 많이 사용되는 방법으로 비선형계를 선형요소와 비선형요소로 나누고, 비선형요소의 응답 중 입력주파수와 동일한 주파수 성분을 취하여 선형계로 근사화하여 제어계를 해석한다. 이 근사화에는 비선형요소의 응답 중 입력주파수와 다른 주파수성분은 선형계에 의해 많이 감소된다는 가정을 포함하고 있으나, 대부분의 선형계가 저주파대역 필터 (low pass filter) 특성을 갖고 있으므로 위의 근사화는 타당성이 있다<sup>(3,4)</sup>. 본 장에서는 기술함수를 이용하여 앞에서 논의한 각 제어기의 안정성을 해석한다.

### 4.1. Southward 비선형 마찰보상제어

Southward의 제어기는 Fig.2와 같이 관성항과 미분제어기를 포함하는 선형요소와 마찰과 비선형 마찰보상제어를 포함하는 비선형요소로 나눌 수 있다. Southward의 마찰보상은 정지-미끄럼 현상이 존재하지 않으므로 정지마찰력을 무시하고 미끄럼 마찰만을 고려한다. 해석의 간략화를 위해 식(3.2)의 미끄럼 마찰력을 다음과 같이 가정하면

$$T_d^+(\dot{\theta}) = T_0^+ + c^+ \dot{\theta}, \quad \forall \dot{\theta} > 0 \quad (8.1)$$

$$T_d^-(\dot{\theta}) = T_0^- + c^- \dot{\theta}, \quad \forall \dot{\theta} < 0 \quad (8.2)$$

여기서  $T_0^+, T_0^-, c^+, c^-$  는 각각 양과 음의 방향 쿨럼마찰과 점성마찰계수이며 시불변상수로 가정한다.

비선형요소의 기술함수를 구하기 위해 Fig.2에서 속도  $\dot{\theta}$  가 크기가 A이고 주파수가  $\omega$  인 조화함수라고 가정하면, 즉,

$$\dot{\theta}(t) = A \sin \omega t, \quad A > 0, \quad \omega > 0, \quad t \geq 0 \quad (9)$$

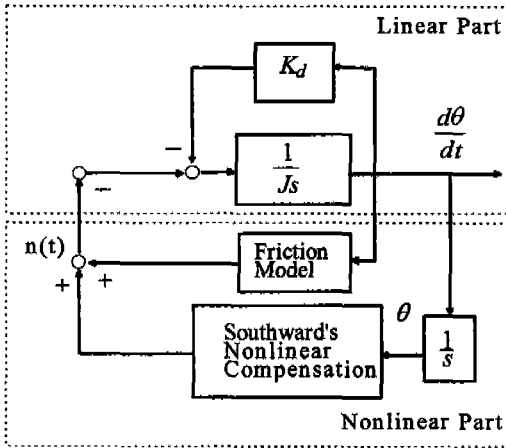


Fig. 2 Block diagram of Southward's control for describing function analysis

비선형 요소의 출력  $n(t)$  는 마찰력과 비선형제어입력을 합한 주기함수이며, 만일 물체의 위치가 비선형 제어 구간인  $\bar{\theta}_L \leq \theta(t) \leq \bar{\theta}_H$  범위에 존재한다면 다음과 같이 주어진다.

$$n(t) = T_d(t) + T(t) = \begin{cases} -\bar{T}_s^+ + T_0^+ + c^+ A \sin \omega t & 0 \leq t < \pi/2\omega \\ -\bar{T}_s^- + T_0^+ + c^+ A \sin \omega t & \pi/2\omega \leq t < \pi/\omega \\ -\bar{T}_s^- + T_0^- + c^- A \sin \omega t & \pi/\omega \leq t < 3\pi/2\omega \\ -\bar{T}_s^+ + T_0^- + c^- A \sin \omega t & 3\pi/2\omega \leq t < 2\pi/\omega \end{cases} \quad (10)$$

식(10)의  $n(t)$  에서 입력주파수  $\omega$  와 같은 주파수 성분만을 선택하여  $n_1(t)$  라 하면

$$n_1(t) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t \quad (11)$$

식(11)의 계수는 다음 식에서 구한다.

$$a_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} n(t) \cos \omega t \, dt \quad (12.1)$$

$$b_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} n(t) \sin \omega t \, dt \quad (12.2)$$

식(10)을 식(12)에 대입하고 정리하면

$$a_1 = \frac{2}{\pi} (-\bar{T}_s^+ + \bar{T}_s^-) \quad (13.1)$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi} (T_0^+ - T_0^-) + \frac{A}{2} (c^+ + c^-) \quad (13.2)$$

여기서 계수  $a_1, b_1$  은 주파수  $\omega$  에 관계없는 함수이므로 기술함수  $N(A, \omega)$  는 입력크기  $A$  만에 관한 함수가 된다. 즉,

$$N(A) = \frac{1}{A} (b_1 + ja_1) \quad (14)$$

식(13)에서  $\bar{T}_s^+ > T_0^+ > 0, \bar{T}_s^- < T_0^- < 0, c^+ > 0, c^- > 0$  이므로  $a_1$  는 음수,  $b_1$  는 양수가 되며, 따라서 위상은 다음의 범위내에 존재한다.

$$-90^\circ < \angle N(A) < 0^\circ \quad (15)$$

Fig.2에서 선형부의 전달함수를  $G(s)$  라면

$$G(s) = \frac{1/J}{s + K_d/J} \quad (16)$$

폐회로 특성방정식으로 부터 다음 식을 만족하는  $A$  와  $\omega$  가 존재하면

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)} \quad (17)$$

크기가  $A$  이고 주파수가  $\omega$  인 Limit Cycle 을 예측할 수 있다. 식(16)과 (15)로부터  $G(j\omega)$  와  $-1/N(A)$  의 위상범위는 각각  $-90^\circ \leq \angle G(j\omega) \leq 0^\circ, -180^\circ < \angle (-1/N(A)) < -90^\circ$  이므로 두 선은 원점 이외의 곳에서는 서로 만나지 않는다. 원점은  $A \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty$  에 해당하는 점이므로 Limit Cycle 이 존재하지 않으며 계는 안정하다.

식(9)의 조화함수가  $\bar{\theta}_L \leq \theta(t) \leq \bar{\theta}_H$  범위를 벗어난 경우의 기술함수는 위의 경우와 비교  $a_1$  은 더 작아지고,  $b_1$  은 변화가 없으므로 이 경우 역시 안정하다. 이상의 기술함수 해석 결과는 Southward 제어의 폐회로 안정성 보장 결과와 일치한다.

#### 4.2. 이산제어계에서 Southward 비선형 마찰보상제어

Southward 제어 방법을 이산시간계에 적용할 경우, 정성적 특성을 반영하여 제어계를 표현하면 Fig.2의 Southward 마찰보상 제어블럭의 출력단에 지연시간  $\tau$  를 갖는 시간지연계가 추가된 형태가 된다<sup>10)</sup>. 단, 지연시간  $\tau$  는 샘플링구간  $T$  보다 작다. 이 경우의 기술함수는 식(13)의 계수 중 비선형 마찰보상에 관련된 항에 시간지연을 고려해 주면 된다. 즉, 식(12)의 계수는 다음 식으로 부터 구할 수 있다.

$$b_1 + j a_1 = (\cos \omega \tau - j \sin \omega \tau) \left\{ j \frac{2}{\pi} (-\tilde{T}_s^+ + \tilde{T}_s^-) \right\} + \frac{2}{\pi} (T_0^+ - T_0^-) + \frac{A}{2} (c^+ + c^-) \quad (18)$$

식(18)을 정리하면

$$a_1 = \frac{2}{\pi} (-\tilde{T}_s^+ + \tilde{T}_s^-) \cos \omega \tau \quad (19.1)$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi} (T_0^+ - T_0^-) + \frac{A}{2} (c^+ + c^-) + \frac{2}{\pi} (-\tilde{T}_s^+ + \tilde{T}_s^-) \sin \omega \tau \quad (19.2)$$

여기서  $a_1, b_1$ 은  $A$ 와  $\omega$ 에 관한 함수이므로 기술함수를  $N(A, \omega)$ 로 나타내면, 앞에서와 같이 다음 식 (20)을 만족하는  $A$ 와  $\omega$ 가 존재하면 크기가  $A$ 이고 주파수가  $\omega$ 인 Limit Cycle이 존재함을 예측할 수 있다.

$$G(j\omega)N(A, \omega) = -1 \quad (20)$$

식(19)를 이용하여 구한  $N(A, \omega)$ 의 크기는 조화함수 크기인  $A$ 가 작을 수록 무한대로 증가하며,  $N(A, \omega)$ 의 위상은 주어진 지연시간  $\tau$ 에 대해 주파수  $\omega$ 의 변화에 따라  $-360^\circ \leq \angle N(A, \omega) \leq 0^\circ$  범위에 존재하므로 Limit Cycle이 존재한다.

Fig.3은 이 경우의 정성적 특성을 보기위해 식(7), (8), (16)에서 정의된 계수들과 지연시간  $\tau$ 를 임의 선정하여  $A$ 가  $A_1, A_2, A_3 (A_1 < A_2 < A_3)$ 일 때  $G(j\omega)N(A, \omega)$ 의 Nyquist 선도로  $A = A_2$ 인 경우  $(-1, 0)$ 점과 교차한다.  $A = A_1$ 일 경우는 불안정하므로  $A$ 는 증가하게 되고,  $A = A_3$ 일 경우는 안정하므로  $A$ 는 감소하게 되어 결국  $A = A_2$ 인 점으로 수렴하게 되므로  $A = A_2$ 는 안정한

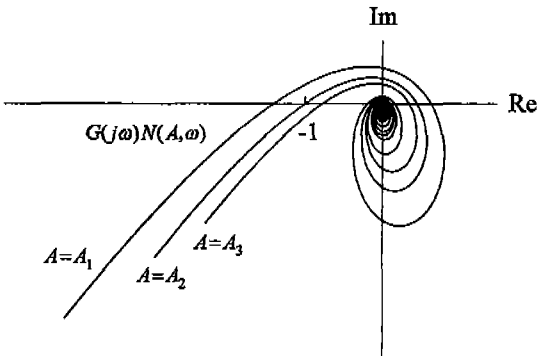


Fig. 3 Nyquist plot of Southward's compensation in digital control

Limit Cycle이 된다. 이 결과는 참고문헌<sup>[2]</sup>의 결과와 일치한다.

### 4.3. 히스테리시스 마찰보상제어

3.2의 히스테리시스 비선형 마찰보상 제어는 Fig.2의 Southward 비선형 마찰보상 블럭을 식(7)에서 정의된 제어입력으로 대체한 것으로 앞에서와 같이 물체의 위치가 비선형 제어구간에 있을 경우 출력  $n(t)$ 는

$$n(t) = \begin{cases} -\tilde{T}_s^+ + T_0^+ + c^+ A \sin \omega t & 0 \leq t < \pi/2\omega - \Delta t^+ \\ T_0^+ + c^+ A \sin \omega t & \pi/2\omega - \Delta t^+ \leq t < \pi/2\omega \\ -\tilde{T}_s^- + T_0^- + c^- A \sin \omega t & \pi/2\omega \leq t < \pi/\omega \\ -\tilde{T}_s^- + T_0^- + c^- A \sin \omega t & \pi/\omega \leq t < 3\pi/2\omega - \Delta t^- \\ T_0^- + c^- A \sin \omega t & 3\pi/2\omega - \Delta t^- \leq t < 3\pi/2\omega \\ -\tilde{T}_s^+ + T_0^+ + c^+ A \sin \omega t & 3\pi/2\omega \leq t < 2\pi/\omega \end{cases} \quad (21)$$

여기서  $\Delta t^+, \Delta t^-$ 는  $\theta(t)$ 와  $\delta_H, \delta_L$ 의 크기의 대소 관계에 의해 다음과 같이 결정된다.

$$\Delta t^+ = \begin{cases} \frac{\pi}{2\omega} & \frac{A}{\omega} \leq -\delta_L \\ \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left( -\frac{\delta_L \omega}{A} \right) & \frac{A}{\omega} > -\delta_L \end{cases} \quad \Delta t^- = \begin{cases} \frac{\pi}{2\omega} & \frac{A}{\omega} \leq \delta_H \\ \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left( \frac{\delta_H \omega}{A} \right) & \frac{A}{\omega} > \delta_H \end{cases} \quad (22)$$

식(21)을 식(12)에 대입하여 기술함수의 계수를 구하면

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \left\{ \tilde{T}_s^- (1 + \cos \omega \Delta t^-) - \tilde{T}_s^+ (1 + \cos \omega \Delta t^+) \right\} \quad (23.1)$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi} (T_0^+ - T_0^-) + \frac{A}{2} (c^+ + c^-) + \frac{1}{\pi} (\tilde{T}_s^+ \sin \omega \Delta t^+ - \tilde{T}_s^- \sin \omega \Delta t^-) \quad (23.2)$$

식(13)과 (23)에서 히스테리시스 제어 기술함수의 허수부와 실수부는 각각 Southward 제어 기술함수의 실수부, 허수부 보다 항상 더 크므로, 히스테리시스 제어는 Southward 제어에 비해 위상앞섬(phase lead)효과를 갖고있다. 위상앞섬은 폐회로의 안정여유도(stability

margin) 증가를 의미하므로 히스테리시스 제어는 Southward 제어보다 더욱 안정하다. 따라서 이 경우는 Limit Cycle이 존재하지 않는다. 위상앞섬의 크기는  $\delta_H, \delta_L$ 의 절대 크기가 커질수록 증가한다. Fig.4는 Southward제어와 히스테리시스제어의 정성적 특성을 보기 위해 임의의 계수를 선정하여 그린  $G(j\omega)$ 와  $-1/N(A, \omega)$ 의 Nyquist 선도이다.  $-1/N(A, \omega)$  선도는 동일한 A에 대해  $\omega=0$ 에서부터  $\omega=\infty$ 까지 변화시키며 그런 것으로  $\omega=0$ 인 점은 Southward 제어에서의  $-1/N(A)$ 와 일치한다. 그럼으로부터 히스테리시스제어는 항상 Southward제어에 비해 위상앞섬 효과가 있음을 확인할 수 있다.

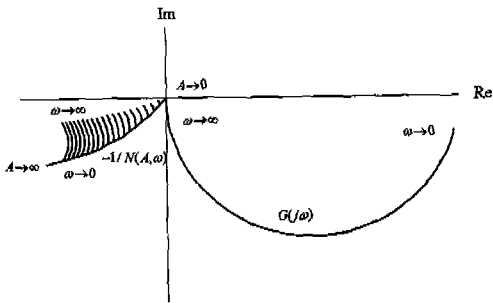


Fig. 4 Nyquist plot of hysteresis compensation

4.4. 견실한 비선형 마찰보상 이산제어

견실한 비선형 마찰보상 이산제어의 정성적 특성은 Fig.2의 Southward 비선형 제어블럭 대신 히스테리시스 제어와 지연시간  $\tau$ 를 갖는 시간지연계가 직렬로 연결되어있는 블럭으로 대체한 제어계로 표현할 수 있다. 이 경우의 기술함수 계수는 식(23)의 히스테리시스제어 기술함수 계수를 이용하면 다음의 결과를 얻는다.

$$a_1 = \frac{1}{\pi} [\tilde{T}_i^- \{ \cos \omega \tau + \cos(\omega \tau - \omega \Delta t^-) \} - \tilde{T}_i^+ \{ \cos \omega \tau + \cos(\omega \tau - \omega \Delta t^+) \}] \tag{24.1}$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi} (T_0^+ - T_0^-) + \frac{A}{2} (c^+ + c^-) + \frac{1}{\pi} [\tilde{T}_i^+ \{ \sin(\omega \Delta t^+ - \omega \tau) - \sin \omega \tau \} - \tilde{T}_i^- \{ \sin(\omega \Delta t^- - \omega \tau) - \sin \omega \tau \}] \tag{24.2}$$

식(24)의 정량적해석은 주어진 계의 특성을 이용하여 Nyquist 선도를 그려보아 알 수 있으며, 앞의 논의 및 임의의 계수를 이용한 해석결과 지연시간  $\tau$ 에서 야기되는

위상지연을 보상할 수 있는 히스테리시스 제어기 파라미터  $\delta_H, \delta_L$ 이 항상 존재함을 확인하였다. 따라서 히스테리시스 제어는 정지-미끄럼 마찰계에 시간지연이 있거나 이산제어를 할 경우 위치제어의 안정성을 보장할 수 있다. 시간지연이 커질수록 이를 보상할 수 있는  $\delta_H, \delta_L$ 의 크기는 증가하며, 단,  $\delta_H, \delta_L$ 의 크기가 증가 할수록 정상상태 오차의 범위는 확대된다.

실제 이산제어시 지연시간의  $\tau$ 의 정량적인 값은 예측이 불가능하며, 따라서 가장 큰 시간지연을 초래하는 경우인  $\tau = T$ 일때 기술함수 해석을 통해  $\delta_H, \delta_L$ 를 선정한다. 이 값을 기본으로 시뮬레이션을 통해 적절한 값을 설계하면 된다.

5. 실험 및 결과

5.1 마찰모델 파라미터 식별

제안된 제어방법의 성능을 검증하기 위해 1-축 회전 구동장치를 이용하여 실험을 수행하였다. 실험장치는 Fig.5와 같이 회전축의 구동을 위한  $1/100$ 기어비를 갖는 하모닉(Harmonic) 드라이브 형태의 DC모터와 모터앰프(Harmonic Drive사의 RFS-32-3030, HS-250-9), 구동축 회전각 검출위한 엔코더(409600 pulse/rev), 이산제어를 위한 PC486DX의 내부에 장착된 DSP보드(Texas Instrument TMS320C31, 엔코더 인터페이스, 12Bit D/A Converter)로 구성되어 있다. 회전축은 볼베어링으로 지지되어 있다. 모터앰프에는 내부 전류궤환루프가 있으며, 기계시스템에 비해 전기시스템의 시정수가 무시할 수 있을 정도로 작기때문에 모터앰프의 입력전압과 모터의 출력 토크는 비례관계를 갖는 것으로 가정했다. 컴퓨터에서 계산된 제어입력과 모터의 출력 토크 간의 계인은 31.32 Nm 이고 엔코더 계인은 1/deg 이다.

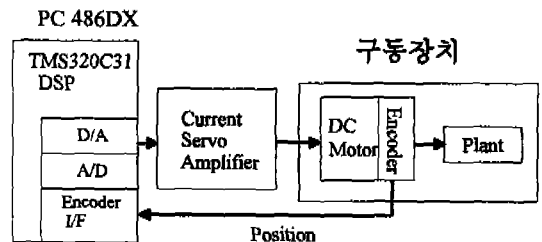


Fig. 5 Schematic diagram of experimental setup

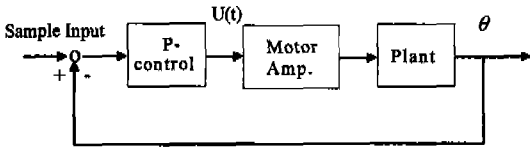


Fig. 6 Control system for promoting stick-slip motion

실험장치의 마찰특성 규명을 위해 Fig.6과 같은 비례제어기에 램프입력을 샘플입력으로 하여 응답을 구했다. 샘플링 간격은 5msec이다. 시계방향 회전시 Fig.7과 같이 제어입력이 최대 정지마찰력보다 커질 때까지 물체는 정지해 있고 제어입력이 최대정지마찰력보다 크게되는 순간 물체의 미끄럼현상이 발생되며, 이때 제어입력은 급격히 감소한다. 회전하던 물체는 마찰력에 의해 정지하게 되며 다시 제어입력이 최대 정지마찰력보다 커질때 까지 정지상태는 유지된다. 이러한 물체의 운동은 전형적인 정지-미끄럼 현상으로 앞에서 제어입력과 모터출력 토오크는 같다고 가정하였으므로 최대정지마찰력은 미끄럼현상 발생 직전의 제어입력으로 볼 수 있다. 그림과 같이 최대 정지마찰력은 위치에 따라 다르다. 반시계방향 회전시에도 정지-미끄럼 현상을 확인할 수 있었다. 이와 같은 실험을 ±30도 범위에서 양방향으로 반복 실시하여 미끄럼 현상 발생 직전의 제어입력들 중에 가장 큰 값을 각 방향의 최대 정지마찰력으로 취하였다. 결정된 최대 정지마찰력은

$$T_s^+ = 1.785Nm, T_s^- = -1.441Nm \quad (25)$$

로서 시계방향의 최대 정지마찰력이 더 크다.

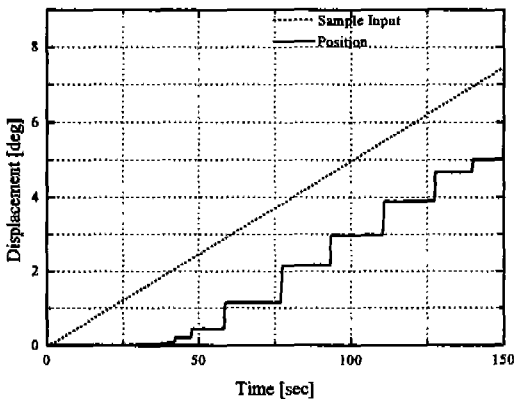


Fig. 7.1 Sample input and stick-slip response

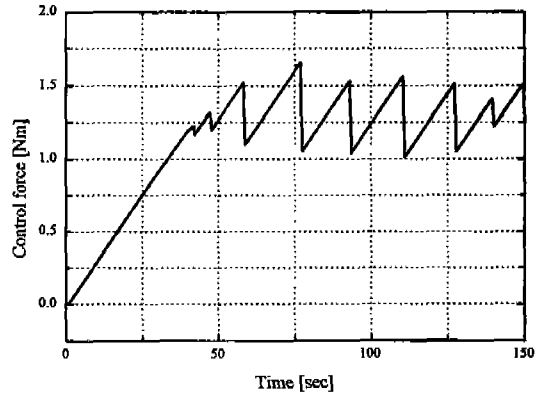


Fig. 7.2 Control input when stick-slip motion

제어계의 관성모멘트, 물류마찰력, 점성마찰력을 구하기 위해 PID 제어기를 사용하는 위치제어계를 구성하고 구형파(square wave)를 샘플입력으로 가하여 실제응답을 얻고, 동일한 입력에 대한 수학적 모델의 응답을 구한 다음 두 응답간의 차이를 최소화하는 모델 파라미터를 제어계 파라미터로 추정하였다. 즉, 추정할 파라미터 벡터  $z$ 를 다음과 같이 정의하고

$$z = [J, T_0^+, T_0^-, c^+, c^-] \quad (26)$$

대상제어계의 응답과 시뮬레이션 모델의 응답오차를 다음과 같이 정의하면

$$e(\hat{z}, k) = y_p(z, k) - y_m(\hat{z}, k) \quad (27)$$

여기서  $\hat{z}$ 은  $z$ 의 추정치,  $y_p$ 와  $y_m$ 은 각각 실제응답과 모델출력을 나타내며,  $k$ 는 샘플 인덱스이다. 총  $N$ 개의 데이터를 얻었을 경우 다음의 비용함수

$$J_e(\hat{z}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^2(\hat{z}, k) \quad (28)$$

를 최소화 하는 파라미터 를 구했다.

Fig.8.1의 굵은실선은 크기 10도인 1Hz 구형파를 샘플입력으로 했을 경우 제어계의 응답이며, Fig.8.2의 굵은실선은 이때의 제어입력이다. 파라미터 추정을 위해 비용함수  $J_e(\hat{z})$ 를 최소화 하도록 유전자 알고리즘<sup>(5)</sup>을 이용하여 파라미터  $\hat{z}$ 를 구했다. 추정된 파라미터는 Table 1과 같으며, 이 추정파라미터를 이용하여 시뮬레이션한 모델 응답과 제어입력은 Fig.8.1, 8.2의 가는실선과 같

다. 두 응답은 비교적 잘 일치함을 알 수 있으며, 두 제어 입력은 초기의 한 주기 이후에 거의 일치함을 알 수 있다. 제어입력은 모터앰프의 허용최대입력을 고려하여  $\pm 0.3$  volt의 제한을 두었다. 동일한 방법으로 2Hz, 5Hz 구형파를 샘플입력으로 하여 얻은 파라미터 추정치는 Table 1과 같다. Table 1에서 샘플입력의 주파수가 증가할 수록 비용함수의 크기가 상대적으로 감소하는데 이는 클럼-점성마찰로 정의한 마찰모델이 고속구간에서 제어계의

Table 1. Estimated model parameters

	Parameters		
Frequency	1 Hz	2 Hz	5 Hz
Cost function	0.1449	0.0026	0.000349
$J$ (Nm·sec <sup>2</sup> /deg)	0.0207	0.0212	0.0212
$T_{O^+}$ (Nm)	1.275	1.319	1.262
$T_{O^-}$ (Nm)	-0.974	-0.968	-0.946
$c^+$ (Nm·sec/deg)	0.0147	0.0201	0.0108
$c^-$ (Nm·sec/deg)	0.0143	0.0167	0.0100

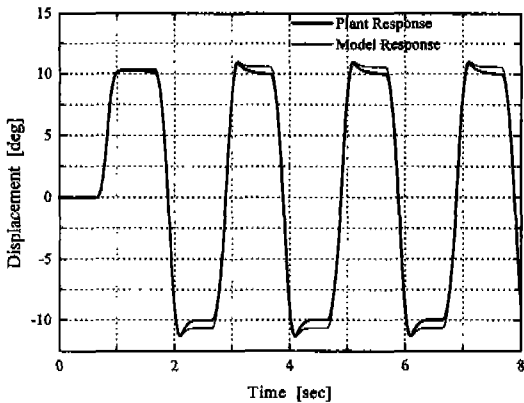


Fig. 8.1 Plant and model time responses

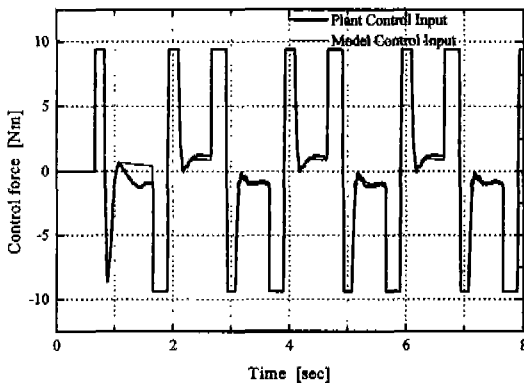


Fig. 8.2 Plant and model control inputs

마찰특성을 잘 표현함을 의미한다. 특히, 점성마찰계수는 주파수에 따라 변화가 심하며, 나머지 파라미터는 큰 변화를 보이지 않는다.

5.2 위치제어 실험

참고문헌(2)에서 논의된 각 제어기를 실험장치에 적용하였다. Fig.9는 다음의 초기조건

$$\theta(0) = 20 \text{ deg}, \dot{\theta}(0) = 0 \tag{29}$$

에 대한 PD제어응답과 제어입력이며, 이때 게인은 각각  $K_p = 0.0066$ ,  $K_d = 0.0033$ 으로 마찰을 무시한 폐회로의 댐핑계수와 고유진동수가 각각  $\zeta = 0.79 \sim 0.87$ ,  $\omega_n \cong 0.5 \text{ Hz}$ 가 되도록 선정하였다. 제어기 게인  $K_p$ 와 식(25)의 정지마찰력을 이용하여 결정된 비선형제어범위는  $\theta_H = 6.97 \text{ deg}$ ,  $\theta_L = -8.64 \text{ deg}$ 이다. 응답은 안정하게 정상상태에 도달되며, 정상상태 위치오차는  $e_{ss} = 0.841 \text{ deg}$ 로  $\theta_H$ 와  $\theta_L$ 의 범위내에 존재한다. 임의의 초기조건에 대한 시험결과 항상 안정하고  $\theta_H$ 와  $\theta_L$ 의 범위내의 정상상태오차 발생을 확인하였다.

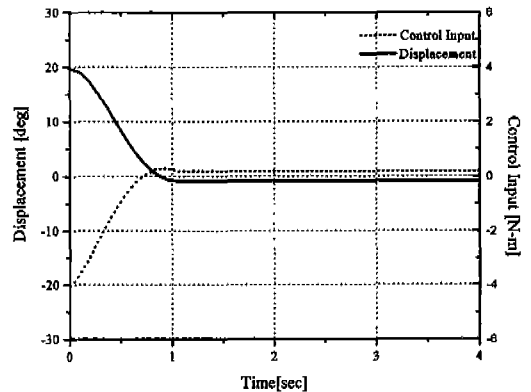


Fig.9 Time response for PD-control

Southward제어를 0.02초 샘플링 간격을 갖는 이산제어에 적용할 경우 식(29)의 초기조건에 대한 응답은 Fig.10과 같다. 비선형제어 입력은 Table 1의 정지마찰력보다 20% 큰 값을 이용하였다. 즉,  $\hat{T}_s^+ = 2.142 \text{ Nm}$ ,  $\hat{T}_s^- = -1.729 \text{ Nm}$ 이며 따라서,  $\theta_H = 8.36 \text{ deg}$ ,  $\theta_L = -10.37 \text{ deg}$ 이다. Fig.10에서 응답은 선형제어구간과 초기의 비선형 제어구간에서는 안정하게 감소하나, 회전각이 '영'인 부근에서 제어입력은 Bang Bang형태로 지속되어 Limit Cycle을 발생시킨다. 이는 앞에서의 예측과 일치하



며, 임의의 초기조건에서도 항상 Limit Cycle이 발생함을 확인하였다.

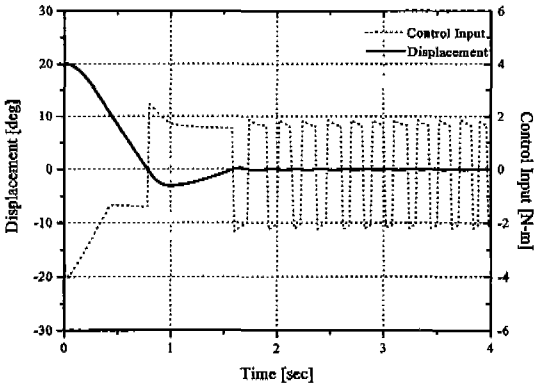


Fig. 10 Time response for Southward's control in digital control

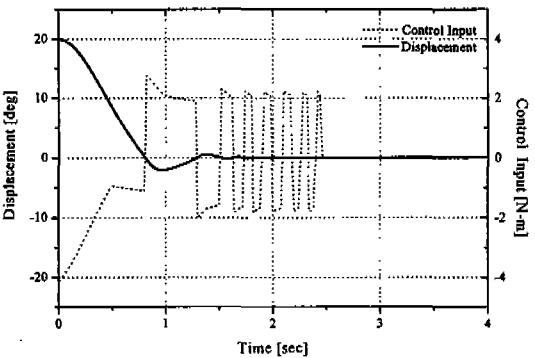


Fig. 11 Time response for robust friction compensation ( $\delta_H = -\delta_L = 0.02 \text{ deg}$ )

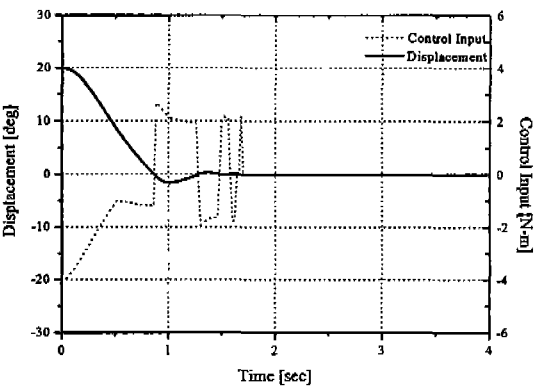


Fig. 12 Time response for robust friction compensation ( $\delta_H = -\delta_L = 0.04 \text{ deg}$ )

식(29)의 초기조건에 대한 견실제어의 응답은 Fig.11에 주어진 바와 같이 안정하다. 여기서 히스테리시스 제어기 설계인자인  $\delta_H, \delta_L$ 는  $\delta_H = -\delta_L = 0.02 \text{ deg}$  로 선정하였다. 초기응답은 Fig.10과 같으나 응답이 '영' 부근에 도달후 히스테리시스 제어기 특성에 따라 Bang Bang형태의 제어 입력이 발생하며 약 2.5초 이후 정상상태에 도달된다. 정상상태위치오차는  $e_{ss} = 0.007 \text{ deg}$ 로,  $\delta_H, \delta_L$ 의 범위내에 존재한다.  $\delta_H, \delta_L$  값을 증가시킬 경우 정착시간이 감소하나, 정상상태오차 범위가 증가하므로 제어 정확도가 감소한다. Fig.12는  $\delta_H = -\delta_L = 0.04 \text{ deg}$ 로 증가시킨 경우 앞에서와 동일한 조건에서의 응답으로 Fig.11과 비교하여 응답의 정착이 빨라진다. 이때의 정상상태 위치오차는  $e_{ss} = 0.023 \text{ deg}$ 로서 앞과 비교 증가하였다. 이 정상상태 오차값은 초기조건에 따라 달라지며, 동일한 초기조건 이더라도 매 시험마다 서로 다른 값을 보였다. 이는 마찰의 비확정성에서 기인되는 것으로 판단된다. 단, 위치오차는 범위는  $\delta_H, \delta_L$  범위내에 항상 존재한다. 반대로  $\delta_H, \delta_L$ 를 감소시킬 경우 정착시간은 증가하지만, 정상상태오차 범위가 감소하므로 제어정확도가 증가한다.  $\delta_H, \delta_L$ 이 매우 작아질 경우 폐회로의 위상여유가 감소하여 마침내 Limit Cycle이 발생하게 되며,  $\delta_H = \delta_L = 0$ 인 경우는 Southward 제어와 동일하다. 실험결과 Limit Cycle 발생 한계치는  $\delta_H = -\delta_L = 0.01 \text{ deg}$  근방임을 확인하였다.

## 6. 결론

참고문헌<sup>[2]</sup>에서 논의된 정지-미끄럼 마찰계의 위치제어기 설계방법에 대한 안정성 판별을 위해 기술함수 해석을 하였고, 실제 1-축 회전구동장치에 적용하여 그 안정성, 적용성 및 제어성능을 검증하였다. 기술함수 해석결과 Southward 제어는 이산제어계에서 불안정하였고, 히스테리시스 제어기는 Southward 제어에 비해 위상앞섬 효과를 갖고있어 이산제어계에서 발생되는 위상지연 특성을 보상할 수 있어 이산제어계에서 견실한 비선형 마찰보상제어를 달성할 수 있음을 확인 하였다. 이 기술함수해석의 정성적 결과는 참고문헌(2)의 결과와 일치한다. 정지-마찰계인 1-축 회전구동장치에 적용하여 실험한 결과 역시 동일한 결과를 얻었으며, 특히 견실마찰보상제어기의 견실성과 제어성능을 확인하였다. 견실마찰보상제어기는 구조가 간단하고 물체의 위치정보만을 필요로 하며 식별이 어려운 마찰계의 파라미터를 사용하지 않고 단지

추정된 최대정지마찰력 만을 이용하여 설계하므로 실현이 매우 용이하다.

### 참 고 문 헌

1. Southward, S.C., Radcliff, C.J., and MacCluer, "Robust Nonlinear Stick-Slip Friction Compensation," ASME J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 113, pp. 639-645, 1991.
2. 강민식, 김창재, "견실한 비선형 마찰보상 이산제어 이론," 제14권4호, pp88~96, 1997.
3. Slotine, J.E. and Li, W., Applied Nonlinear Control, Prentice Hall, pp.157-188, 1991.
4. Townsend, W.T. and J.K. Salisbury, "The effect of Coulomb Friction and Sticktion on Force Control," Proc. 1987 Inter. Conf. on Robotics and Automation, IEEE, Raleigh, pp. 883-889, 1987.
5. 이선우, "위치결정기구의 마찰력 보상을 위한 강인한 제어기법," 한국과학기술원 박사학위 논문, pp. 29-33, 1996.