

본 연구는 1996년 전주대학교 학술연구지원에 의해 수행되었으며, 연구에 도움을 주신 김영일 박사님께 감사드립니다.

강체 원통을 중앙에 갖는 2-보정면 탄성회전체 밸런싱 모델에서의 영향계수

전 오 성*

Influence Coefficient of Two-Plane Flexible Rotor Balancing Model Having a Rigid Cylinder

Oh Sung Jun*

ABSTRACT

Influence coefficients on two-plane flexible rotor balancing model are derived by using the transfer matrix method. The model has a rigid uniform cylinder at mid-span of flexible shafts. Both faces of the rigid cylinder are used as the balancing planes. Calculated influence coefficients show that there exist the rotating speed ranges which are useless or insensitive for the balancing. Gyroscopic effect and damping are considered in the study and their effects are discussed.

Key Words: Flexible Rotor Balancing(탄성 회전체 밸런싱), Influence Coefficient(영향계수), Two-plane(2-보정면), Transfer Matrix(전달행렬)

1. 서 론

회전체에 존재하는 중심축 선에 대한 불평형 질량은, 축 회전 시 원심력으로 작용하면서 베어링에 주기적 힘을 전달하여 원하지 않는 진동을 발생시킨다. 이러한 힘은 베어링의 수명을 단축시키며 회전을 이용하는 가공기계의 정밀도 저하와 회전부분을 갖고 있는 여러 가지 생활 편리품의 질적 저하를 초래한다.

회전체 불평형 질량을 제거시키기 위한 일련의 작업을 밸런싱이라 하는데, 대상이 되는 회전체의 탄성거동이 고려되는 회전수에서 작업하느냐 아니냐에 따라 강성 회전

체 밸런싱(rigid rotor balancing)과 탄성 회전체 밸런싱(flexible rotor balancing)으로 분류한다.⁽¹⁾ 통상적으로 강성 회전체 밸런싱은 1차 고유 모드가 무시될 정도의 낮은 회전수에서 이루어지며, 그 이상의 회전수에서 이루어지는 밸런싱을 탄성 회전체 밸런싱이라 한다.

탄성 회전체 밸런싱과 강성 회전체 밸런싱의 종류는 다양하지만,⁽²⁻³⁾ 밸런싱 기술이 지향하는 방향은 공통적으로 회전체에 부여된 질량과 그로 인한 축 응답 사이의 관계를 찾아서 주기적인 힘이나 진동의 발생이 없도록 불평형 질량을 없애는 것이다. 회전체에 부여된 질량과 응답의 관계를 통칭 전달함수라고 할 수 있는데, 영향계수

* 전주대학교 기계공학과(정회원)

(influence coefficient)⁽⁴⁾라는 용어를 일반적으로 사용한다. 영향계수는 질량의 부여위치와 응답의 위치가 일치하든 아니든 표현이 가능하며, 이들 사이의 조합 수만큼 영향계수의 수가 존재한다. 벨런싱에서는 실험에 의해 이들 요소를 구하는데, 주어진 회전수에서 주어진 위치(일반적으로 보정면)들에 시행질량(trial mass)을 부착하고 그로 인한 응답을 측정하여 영향계수를 구하고 있다. 시행질량을 부착하지 않는 방법도 소개되고 있으나 실험을 위해서는 구동기술과 계측기술의 정밀도라는 측면이 걸림돌로 작용한다.

본 연구에서는 일반적으로 가장 많이 사용되는 2-보정면 탄성 회전체 벨런싱 모델을 설정하여 회전수에 따른 영향계수를 계산하고 이의 특징을 검토해 보고자 한다. 모델은 회전축의 중앙에 속이 찬 강체 원통을 갖고 그의 양면을 두 개의 보정면으로 하는 가장 기본적인 형태를 하고 있다. 이와 같은 모양을 갖는 회전체의 예는 모터의 회전자 등으로, 일반적으로 가장 흔한 모양이라고 말할 수 있다. 영향계수의 유도는 전달행렬⁽⁵⁾의 개념에 의존하였으며, 원통의 질량과 양쪽 가는 축(slender shaft)의 탄성을 고려하였다.

2. 축 요소 전달행렬

2.1 x-z 평면

Fig. 1은 x-z평면상에서 i번째 요소 양단의 상태량(state variable)을 나타낸다. i번째 요소의 좌측에는 (i-1)번째의 절점이, 우측에는 i번째의 절점이 있다. i번째 절점 좌측(상첨자 L로 표시)의 변위 w , 기울기 θ , 모멘트 M 및 전단력 V 는 (i-1)번째 절점의 우측(상첨자 R로 표시) 양으로 다음과 같이 표현된다.

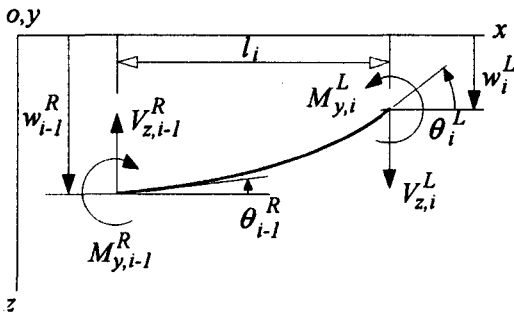


Fig. 1 State variables of i-th element in x-z plane.

$$M_{y,i}^L = M_{y,i-1}^R + V_{z,i-1}^R l_i \quad (1)$$

$$V_{z,i}^L = V_{z,i-1}^R \quad (2)$$

$$w_i^L = w_{i-1}^R - \theta_{i-1}^R l_i - M_{y,i-1}^R \frac{l_i^2}{2EI_i} - V_{z,i-1}^R \frac{l_i^3}{6EI_i} \quad (3)$$

$$\theta_i^L = \theta_{i-1}^R + M_{y,i-1}^R \frac{l_i}{EI_i} + V_{z,i-1}^R \frac{l_i^2}{2EI_i} \quad (4)$$

이들 양을 다음의 벡터로 표시하면

$$\{s_z\} = \begin{Bmatrix} w \\ -\theta \\ -M_y \\ V_z \end{Bmatrix} \quad (5)$$

식(1)부터 식(4)는 다음의 한 식으로 요약된다.

$$\{s_z\}_i^L = [F]_i \{s_z\}_{i-1}^R \quad (6)$$

이 식에서

$$[F]_i = \begin{bmatrix} 1 & l_i & \frac{l_i^2}{2EI_i} - \frac{l_i^3}{6EI_i} \\ 0 & 1 & \frac{l_i}{EI_i} - \frac{l_i^2}{2EI_i} \\ 0 & 0 & 1 & -l_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

식(7)은 절점 i와 절점(i-1) 사이에서 x-z 평면의 상태량들을 연결시켜 주는 전달행렬이다.

2.2 x-y 평면

동일 방법을 Fig. 2의 x-y 평면에 적용하면 절점 i와 절점(i-1) 사이에 다음의 관계식이 성립한다.

$$M_{z,i}^L = M_{z,i-1}^R - V_{y,i-1}^R l_i \quad (8)$$

$$V_{y,i}^L = V_{y,i-1}^R \quad (9)$$

$$v_i^L = v_{i-1}^R + \phi_{i-1}^R l_i + M_{z,i-1}^R \frac{l_i^2}{2EI_i} - V_{y,i-1}^R \frac{l_i^3}{6EI_i} \quad (10)$$

$$\phi_i^L = \phi_{i-1}^R + M_{z,i-1}^R \frac{l_i}{EI_i} - V_{y,i-1}^R \frac{l_i^2}{2EI_i} \quad (11)$$

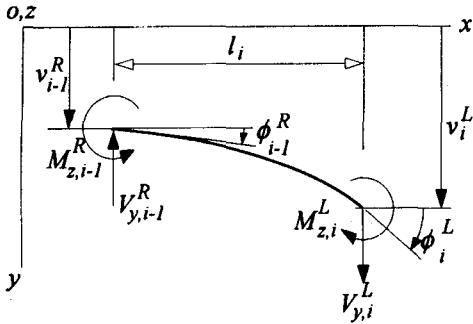


Fig. 2 State variables of i-th element in x-y plane.

x-y 평면상에서 상태량의 벡터를 다음과 같이 설정하여

$$\{s_y\} = \begin{Bmatrix} v \\ \phi \\ M_z \\ V_y \end{Bmatrix} \quad (12)$$

식(8)부터 식(11)에 대입하면 다음의 식이 구해진다.

$$\{s_y\}_i^L = [F]_i \{s_y\}_{i-1}^R \quad (13)$$

여기서 $[F]_i$ 는 전달함수의 식(7)과 동일하다.

2.3 복소수 상태량 벡터

식(6)과 식(13)은 동일한 전달함수를 사용하므로, 다음과 같이 상태량의 복소수벡터를 사용하면

$$\begin{aligned} d_i &= v_i + jw_i \\ \alpha_i &= \phi_i - j\theta_i \\ M_i &= M_{z,i} - jM_{y,i} \\ V_i &= V_{y,i} + jV_{z,i} \end{aligned} \quad (14)$$

식(6)과 식(13)은 다음의 한 식으로 통일할 수 있다.

$$\{s\}_i^L = [F]_i \{s\}_{i-1}^R \quad (15)$$

여기서 $\{s\}_i^L$ 와 $\{s\}_{i-1}^R$ 는 각각 절점 i의 좌측과 절점 (i-1)의 우측 상태량 복소수벡터로서 다음과 같이 정의된다.

$$\{s\}_i^L = \begin{Bmatrix} d_i \\ \alpha_i \\ M_i \\ V_i \end{Bmatrix}^L, \quad \{s\}_{i-1}^R = \begin{Bmatrix} d_{i-1} \\ \alpha_{i-1} \\ M_{i-1} \\ V_{i-1} \end{Bmatrix}^R$$

식(14)의 j는 복소수 $\sqrt{-1}$ 이다. $[F]_i$ 는 식(7)로 표시되는 i번째 요소에 대한 전달행렬이다.

3. 절점에서의 전달행렬

3.1 불평형 질량 효과

Fig. 3은 절점 i에서의 y-z 평면을 가리킨다. 불평형량은 $m_i e_i$ 이고, β_i 는 회전축에 고정된 y'-z' 좌표계와의 각이다.

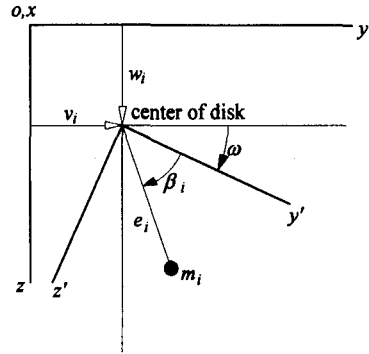


Fig. 3 Unbalance at station i.

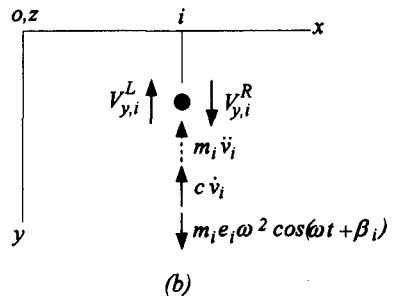
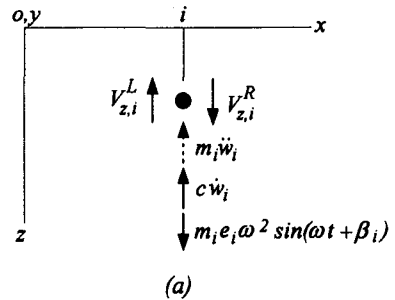


Fig. 4 Equilibrium relations of unbalance in x-z and x-y planes.

디스크 중앙에서의 속도를 기준으로 이에 비례하는 감쇠력을 가정하면, Fig. 4의 x-z와 x-y평면에서 불평형 질량에 대한 평형식을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$V_{z,i}^L + m_i \dot{w}_i + c \dot{w}_i - V_{z,i}^R = m_i e_i \omega^2 \sin(\omega t + \beta_i) \quad (16)$$

$$V_{y,i}^L + m_i \ddot{v}_i + c \dot{v}_i - V_{y,i}^R = m_i e_i \omega^2 \cos(\omega t + \beta_i) \quad (17)$$

식(16)에 복소수 j 을 곱하여 식(17)을 더하면 다음이 된다.

$$V_i^R = V_i^L + m_i \ddot{d}_i^{(L)} + c \dot{d}_i^{(L)} - m_i e_i \omega^2 e^{j(\alpha t + \beta_i)} \quad (18)$$

동기응답을 고려하면 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V_i^R = V_i^L - m_i \omega^2 d_i^{(L)} + j c \omega d_i^{(L)} - m_i e_i \omega^2 e^{j[\alpha t + \beta_i]} \quad (19)$$

3.2 자이로스코프 효과

Fig. 5는 세차(precession)운동 중인 디스크이다. 그림에서 θ 와 ϕ 는 각각 양(+)의 y- 및 z-축에 대한 회전각이다. 회전속도 ω 는 동기 선회인 경우 선회속도와 동일하다. 디스크의 자이로스코프 효과를 고려하면, 평면에서의 모멘트 평형식은 다음과 같다.(Fig. 6)

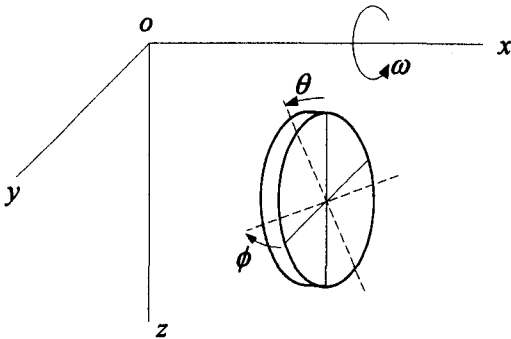


Fig. 5 Disk under precession.

$$M_y^R = M_y^L - J_p \omega \dot{\phi} + J_i \ddot{\theta} \quad (20)$$

$$M_z^R = M_z^L + J_p \omega \dot{\theta} + J_i \ddot{\phi} \quad (21)$$

여기서 J_p 와 J_i 는 각각 디스크의 질량 극관성 모멘트와 질량 관성 모멘트를 나타낸다. 위 두 식을 묶어서 복소수로 표시하면 다음과 같다.

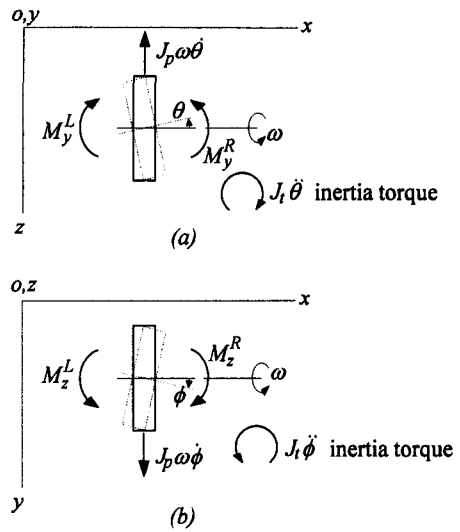


Fig. 6 Equilibrium relations of moment in x-z and x-y planes.

$$M_i^R = M_i^L + j J_p \omega \dot{\alpha}_i^L + J_i \ddot{\alpha}_i^L \quad (22)$$

동기 선회인 경우 ϕ_i 와 θ_i 의 크기가 서로 같고, $\pi/2$ 의 위상차를 갖기 때문에, 복소수 기호기로 표시할 수 있다.

$$\alpha_i = |\alpha_i| e^{-j\alpha t} \quad (23)$$

이 식에서 - 부호는 물리적 의미보다는 다음과 같은 정의에 의한 것이다.

$$\alpha_i = \phi_i - j\theta_i$$

식(23)을 시간으로 미분하면

$$\dot{\alpha}_i = -j\omega |\alpha_i| e^{-j\alpha t} = -j\omega \alpha_i \quad (24)$$

$$\ddot{\alpha}_i = -\omega^2 |\alpha_i| e^{-j\alpha t} = -\omega^2 \alpha_i$$

이 되므로 식(22)는 다음과 같다.

$$M_i^R = M_i^L + \omega^2 (J_p - J_i) \alpha_i^L \quad (25)$$

디스크에서의 불평형 질량과 모멘트를 고려하면, 절점 일단에서 다음의 관계식을 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} d_i \\ \alpha_i \\ M_i \\ V_i \end{Bmatrix}^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 [J_p - J_i] & 1 & 0 \\ -m_i \omega^2 + j c \omega & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ \alpha_i \\ M_i \\ V_i \end{Bmatrix}^L + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -m_i e_i \omega^2 e^{j(\alpha t + \beta_i)} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

4. 강제 원통의 양끝을 두 개의 보정면으로 갖는 탄성 회전체의 영향계수

Fig. 7은 일정 크기의 속이 찬 강제 실린더를 갖는 탄성 회전체 모형을 보여 준다. 이 모형을 사용하여 두 개의 보정면을 갖는 탄성 회전체 모형을 나타내었다. 그림에서 AO, A, B, BO 는 절점들을 나타내며, 절점 A 와 B 가 보정면이 된다. l_A 와 l_B 는 축의 길이, I_A 와 I_B 는 축의 관성모멘트, l_0 와 I_0 는 실린더의 길이와 관성 모멘트이다. 이 연구에서는 원통을 수정하여, 질량관성모멘트와 질량을 절점 A 와 B 에 집중시켰다. 따라서 J_{pA}, J_{IA}, J_{pB} 및 J_{IB} 는 절점 A 와 B 에서의 질량 극관성 모멘트 및 질량 관성 모멘트이며, m_A 와 m_B 는 각각의 위치에서의 질량이다. 또한 e_A, e_B, β_A 와 β_B 는 불평형량과 방위각을 나타낸다.

이 모형에 대하여 앞에서 소개한 전달행렬들을 사용하면, 절점에서의 상태량에 대한 5개의 식이 만들어진다. 즉, 회전축의 좌측 끝단(AO)과 절점 A 의 좌측단, 절점 A 의 좌측단과 절점 A 의 우측단, 절점 A 의 우측단과 절점 B 의 좌측단, 절점 B 의 좌측단과 절점 B 의 우측단, 절점 B 의 우측단과 회전축의 우측 끝단(BO) 사이의 식들이다. 베어링에 의해 양 끝의 절점 AO, BO 에서 변위가 억제되고 모멘트는 없다는 조건을 적용하고, 이들을 제외한 모든 상태량들을 연속대입을 써서 제거하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_{B0} \\ 0 \\ V_{B0} \end{Bmatrix}^L = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_{A0} \\ 0 \\ V_{A0} \end{Bmatrix}^R \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} m_A e_A \omega^2 \frac{I_B^2 (3l_0 + l_B)}{6EI_B} e^{j(\alpha_A + \beta_A)} + m_B e_B \omega^2 \frac{I_B^3}{6EI_B} e^{j(\alpha_A + \beta_B)} \\ m_A e_A \omega^2 \frac{I_B^2 (2l_0 + l_B)}{2EI_B} e^{j(\alpha_A + \beta_A)} + m_B e_B \omega^2 \frac{I_B^2}{2EI_B} e^{j(\alpha_A + \beta_B)} \\ m_A e_A \omega^2 (l_0 + l_B) e^{j(\alpha_A + \beta_A)} + m_B e_B \omega^2 l_B e^{j(\alpha_A + \beta_B)} \\ -m_A e_A \omega^2 e^{j(\alpha_A + \beta_A)} - m_B e_B \omega^2 e^{j(\alpha_A + \beta_B)} \end{bmatrix}$$

여기서

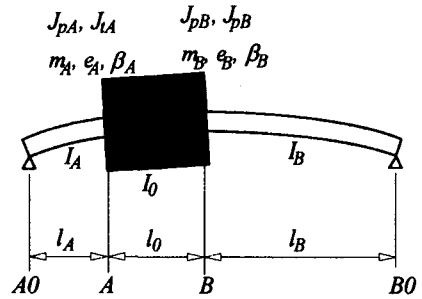


Fig. 7 Single cylinder rotor model.

$$c_{11} = c_{13} = c_{21} = c_{23} = c_{31} = c_{33} = c_{41} = c_{43} = 0$$

$$c_{12} = l_A + l_0 + l_B + \omega^2 (J_{pA} - J_{IA} + J_{pB} - J_{IB}) \frac{I_B^2}{2EI_B} + m_A \omega^2 \frac{I_A I_B^2}{6EI_B} (3l_0 + l_B) + m_B \omega^2 (l_A + l_0) \frac{I_B^2}{6EI_B} - j c \omega \frac{I_B^2}{6EI_B} (3l_A l_0 + 2l_A l_B + l_0 l_B)$$

$$c_{14} = -\frac{I_A^2}{6EI_A} (l_A + 3l_0 + 3l_B) - \frac{I_B^2}{6EI_B} (3l_A + 3l_0 + l_B) - \omega^2 (J_{pA} - J_{IA} + J_{pB} - J_{IB}) \frac{I_A^2}{2EI_A} \frac{I_B^2}{2EI_B} - m_A \omega^2 \frac{I_A^2}{6EI_A} \frac{I_B^2}{6EI_B} (3l_0 + l_B) - m_B \omega^2 \frac{I_A^2}{6EI_A} \frac{I_B^2}{6EI_B} (l_A + 3l_0) + j c \omega \frac{I_A^2}{6EI_A} \frac{I_B^2}{6EI_B} (3l_A l_0 + 2l_A l_B + 3l_0 l_B)$$

$$c_{22} = 1 + \omega^2 (J_{pA} - J_{IA} + J_{pB} - J_{IB}) \frac{l_B}{EI_B} + m_A \omega^2 \frac{I_A I_B}{2EI_B} (2l_0 + l_B) + m_B \omega^2 (l_A + l_0) \frac{I_B}{2EI_B} - j c \omega \frac{I_B^2}{2EI_B} (2l_A l_0 + 2l_A l_B + l_0 l_B)$$

$$c_{24} = -\frac{I_A^2}{2EI_A} (2l_A + 2l_0 + l_B) \frac{l_B}{2EI_B} - \omega^2 (J_{pA} - J_{IA} + J_{pB} - J_{IB}) \frac{I_A^2}{2EI_A} \frac{l_B}{EI_B} - m_A \omega^2 \frac{I_A^2}{6EI_A} \frac{l_B}{2EI_B} (2l_0 + l_B) - m_B \omega^2 \frac{I_A^2}{6EI_A} \frac{l_B}{2EI_B} (l_A + 3l_0) + j c \omega \frac{I_A^2}{6EI_A} \frac{l_B}{2EI_B} (2l_A l_0 + 2l_A l_B + 3l_0 l_B)$$

$$c_{32} = \omega^2 (J_{pA} - J_{IA} + J_{pB} - J_{IB}) + m_A \omega^2 l_A (l_0 + l_B) + m_B \omega^2 (l_A + l_0) l_B - j c \omega (l_A l_0 + 2l_A l_B + l_0 l_B)$$

$$c_{34} = -(l_A + l_0 + l_B) - \omega^2 (J_{pA} - J_{IA} + J_{pB} - J_{IB}) \frac{l_A}{2EI_A} - m_A \omega^2 \frac{l_A}{6EI_A} (l_0 + l_B) - m_B \omega^2 \frac{l_A I_B}{6EI_A} (l_A + 3l_0) + j c \omega \frac{l_A}{6EI_A} (l_A l_0 + 2l_A l_B + 3l_0 l_B)$$

$$c_{42} = -m_A \omega^2 l_A - m_B \omega^2 (l_A + l_0) + j c \omega (2l_A + l_0)$$

$$c_{44} = 1 + m_A \omega^2 \frac{l_A^2}{6EI_A} + m_B \omega^2 \frac{l_A^2}{6EI_A} (l_A + 3l_0) - j c \omega \frac{l_A^2}{6EI_A} (2l_A + 3l_0)$$

식(27)의 α_{A0}^R 와 V_{A0}^R 에 대하여 풀면,

$$\alpha_{A0}^R = \begin{bmatrix} d_1 & c_{14} \\ d_2 & c_{34} \\ c_{12} & c_{14} \\ d_{32} & c_{34} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$V_{A0}^R = \begin{bmatrix} c_{12} & d_1 \\ c_{32} & d_2 \\ c_{12} & c_{14} \\ c_{32} & c_{34} \end{bmatrix} \quad (29)$$

여기서

$$d_1 = -m_A e_A \omega^2 \frac{l_B^2(3l_0 + l_B)}{6EI_B} e^{j(\alpha + \beta_A)} - m_B e_B \omega^2 \frac{l_B^3}{6EI_B} e^{j(\alpha + \beta_B)}$$

$$d_2 = -m_A e_A \omega^2 (l_0 + l_B) e^{j(\alpha + \beta_A)} - m_B e_B \omega^2 l_B e^{j(\alpha + \beta_B)}$$

이제 구해진 α_{A0}^R 와 V_{A0}^R 의 결과 및 베어링에서의 경계 조건 $d_{A0}^R = M_{A0}^R = 0$ 을, 각 절점들 사이의 관계식들에 대입하면, 다음과 같이 실린더 양면에서의 응답을 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} d_A \\ d_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_A \\ d_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_A & -\frac{l_A^3}{6EI_A} \\ l_A + l_0 & -\frac{l_A^2}{6EI_A}(l_A + 3l_0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{A0} \\ V_{A0} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_A e_A \omega^2 e^{j(\alpha + \beta_A)} \\ m_B e_B \omega^2 e^{j(\alpha + \beta_B)} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

여기서 행렬

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \quad (31)$$

는 불평형 질량과 응답 사이의 관계를 나타내는 영향계수가 된다. 이 행렬의 각 요소는 다음과 같이 표현된다.

$$\alpha_{11} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} c_{12} \frac{l_A^3}{6EI_A} (l_0 + l_B) + c_{14} l_A (l_0 + l_B) - c_{32} \frac{l_A^3}{6EI_A} \frac{l_B^2}{6EI_B} (3l_0 + l_B) \\ -c_{34} \frac{l_A^2 l_B^2}{6EI_A} (3l_0 + l_B) \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{D} \left[-c_{12} \frac{l_A^3 l_B}{6EI_A} + c_{14} l_A l_B + c_{32} \frac{l_A^3}{6EI_A} \frac{l_B^2}{6EI_B} - c_{34} \frac{l_A l_B^3}{6EI_B} \right] \quad (33)$$

$$\alpha_{21} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} c_{12} \frac{l_A^2}{6EI_A} (l_A + 3l_0)(l_A + l_0) + c_{14} (l_A + l_0)(l_0 + l_B) \\ -c_{32} \frac{l_A^2}{6EI_A} \frac{l_B^2}{6EI_B} (l_A + 3l_0)(3l_0 - l_B) - c_{34} \frac{l_B^2}{6EI_B} (l_A + l_0)(3l_0 + l_B) \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} c_{12} \frac{l_A^2 l_B}{6EI_A} (l_A + 3l_0) + c_{14} (l_A + l_0) l_B - c_{32} \frac{l_A^2}{6EI_A} \frac{l_B^3}{6EI_B} (l_A + 3l_0) \\ -c_{34} \frac{l_B^3}{6EI_B} (l_A + l_0) \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$D = \begin{vmatrix} c_{12} & c_{14} \\ c_{32} & c_{34} \end{vmatrix}$$

5. 영향계수 계산 및 분석

5.1 모형

강체원통을 중간에 갖고 이의 양단을 보정면으로 갖는 2-보정면(two-plane) 탄성 밸런싱 회전체의 영향계수를 계산하기 위해 Fig.8의 모형을 생각한다. 질량없이 탄성만을 갖는 모형을 가정하기 위해 양쪽의 축을 직경이 각각 2cm, 1cm이고 길이는 20cm씩인 가는 축으로 가정하였다. 질량만 있는 원통은 직경과 길이를 각각 5cm, 10cm로 가정하였다. 회전축의 양 끝은 강성 베어링으로 지지된 것으로 가정하였다. 사용된 회전체의 재료는 탄성계수 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, 밀도 $\rho = 0.0078 \text{ kg/cm}^3$ 이다.

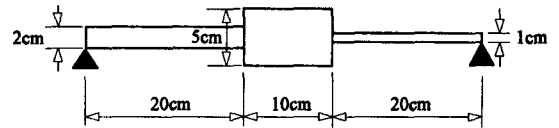


Fig. 8 A simplified rotor model.

5.2 원통 질량의 이산화

원통이 축방향을 따라 일정한 굵기를 가지므로 동일한 크기로 두 보정면 A와 B에 질량을 집중시켜 m_A 와 m_B 를 다음과 같이 정하였다.

$$m_A = m_B = \frac{1}{2} (0.0078) \pi (2.5)^2 (10) = 0.766 \text{ kg}$$

원통의 질량 극관성 모멘트 (J_p)와 질량 관성 모멘트 (J_l)도 다음과 같이 A, B 두 보정면에 집중시켰다.

$$J_{pA} = J_{pB} = (0.0078) \frac{\pi (2.5)^4}{4} (10) = 4.786 \text{ kgcm}^2$$

$$J_{lA} = J_{lB} = (0.0078) \frac{\pi (2.5)^4}{4} (10) = 2.393 \text{ kgcm}^2$$

5.3 감쇠 값

단순진동자 모형에 있어서 감쇠계수 c 는

$$c = \zeta \cdot 2\sqrt{mk}$$

와 같이 감쇠비 ζ , 질량 m , 스프링상수 k 를 써서 표현할 수 있다. 감쇠를 감쇠비 ζ 로 표현하기 위해 이 식을 사용하였으며, m 과 k 는 이 연구에서 사용한 모형의 실린더 질량과 축의 등가 스프링상수를 사용하고자 한다. 양쪽 축의 스프링상수는 양 축의 직영이 동일하지 않아 비대칭성을 갖지만, 편의상 등가 스프링상수를

$$k = \frac{3EI_1}{l_1^3} + \frac{3EI_2}{l_2^3}$$

로 가정하였다.

5.4 영향계수 특성

Fig.9부터 Fig.12는 $\zeta = 0.015$ 일 때, 영향계수 $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ 의 계산결과를 보여준다. 그림에서 실선은 영향계수의 크기를, 점선은 위상을 나타낸다. 영향계수의 크기는 $[\text{sec}^2/\text{kg}]$ 의 단위를 갖는다. 그림에서 영향계수의 크기가 299.4 rad/sec와 3397.0 rad/sec에서 최대치를 갖는데, 1차 및 2차 감쇠 고유진동수를 나타낸다. 고유진동수에서는 위상 변화도 동반함을 보여주며, α_{11} 와 α_{22} 에서는 반고유진동수(anti-resonant frequency)가 발생하는데, 보상면의 위치에서 1차와 2차 모드가 상쇄간섭을 일으켜서 발생할 수 있다. 이때 보상면에 부착된 질량은 그 보상면의 진동응답에는 전혀 기여하지 못함을 알 수 있다. α_{11} 에 나타나는 반고유진동수와 α_{22} 에 나타나는 반고유진동수가 서로 다른 값을 갖는 것은, 보정면 A와 B 위치에서 각각 1차와 2차 모드가 상

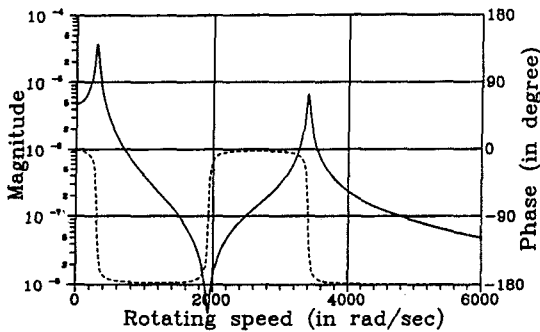


Fig. 9 Influence coefficient, α_{11} ($\zeta = 0.015$).

쇄간섭을 일으키는 공간상의 위치가 다르기 때문이다. 반면, α_{12} 와 α_{21} 에서는 반고유진동수가 발생하지 않는데, 이는 보정면에 부착되는 질량이 상대 위치의 응답에는 주파수에 관계없이 영향을 준다는 의미이다

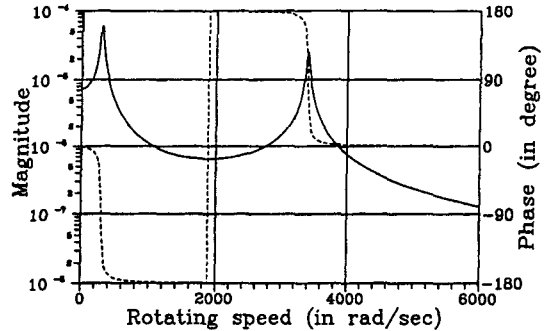


Fig. 10 Influence coefficient, α_{12} ($\zeta = 0.015$).

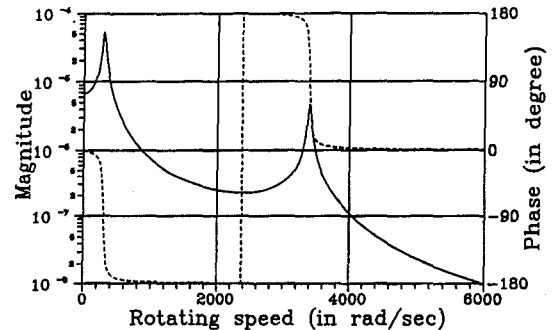


Fig. 11 Influence coefficient, α_{21} ($\zeta = 0.015$).

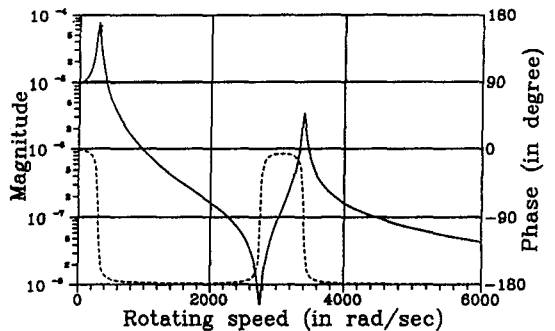


Fig. 12 Influence coefficient, α_{22} ($\zeta = 0.015$).

감쇠가 주는 영향계수의 변화를 보이기 위해 Fig.13과 Fig.14에 $\zeta = 0.03$ 과 $\zeta = 0.005$ 일 때 α_{11} 를 계산한

값을 나타내었다. 감쇠의 증가는 영향계수 크기 곡선의 날카로움을 둔화시키며, 위상의 변화도 완만하게 하고 있다.

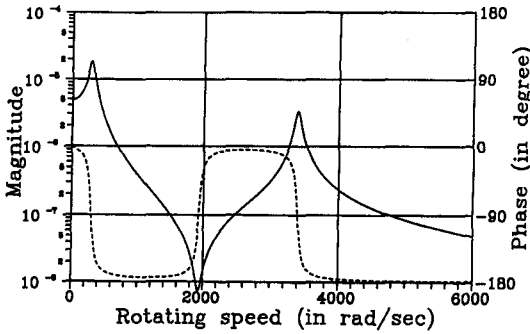


Fig. 13 Influence coefficient, α_{11} ($\zeta = 0.03$).

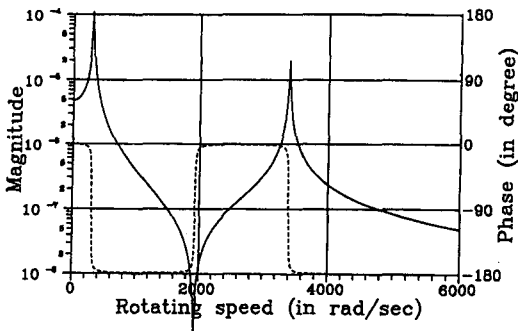


Fig. 14 Influence coefficient, α_{11} ($\zeta = 0.005$).

절점에 부여한 자이로스코프 효과를 고려하느냐 않느냐는 영향계수에 차이를 가져오며, 고유진동수에도 차이가 있다. Table 1은 $\zeta = 0.005$ 일 때 고유진동수에 미치는 자이로스코프 효과의 영향을 비교한 것이다.

Table 1. 고유진동수에 미치는 자이로스코프 효과 ($\zeta = 0.005$)

natural frequency	with gyroscopic effect	without gyroscopic effect
1st	299.4 rad/sec	299.1 rad/sec
2nd	3397.0 rad/sec	3292.3 rad/sec
anti-	1930.5 rad/sec	1900.1 rad/sec

2차 고유진동수는 1차 고유진동수보다 훨씬 큰 값이 감소하는데, 2차 모드에서 미치는 자이로스코프 효과가 1차 모드에서보다 크기 때문이다. 영향계수의 계산

값 자체도 고유진동수나 반고유진동수에서는 많은 차이가 나타날 수 있다.

6. 결 론

강체 실린더가 증앙에 있는 유연 회전체에서의 영향계수를, 2개 보정면을 갖는 탄성밸런싱의 관점에서 유도하여 보았다. 유도는 전달행렬의 개념으로 행하였다. 여기서 사용된 모형은 실제 산업에서 가장 많이 대상이 되는 2개 보정면 밸런싱 모형과 유사하다. 영향계수의 특성을 검토한 결과, 시행 질량(trial mass)을 붙여도 응답에는 영향이 없는 회전속도가 존재함을 알 수 있었다. 이는 전반적으로 밸런싱할 때 감도가 떨어지는 회전수와 보정면의 위치가 존재함을 나타낸다. 자이로스코프의 효과는 회전체에서 고유진동수를 변화시키며, 감쇠와 함께 영향계수의 값을 변화시키는 요소임을 확인하였다. 본 연구에서는 밸런싱에의 응용을 고려하지 않았으나, 밸런싱에 활용하는 연구가 가능하다고 판단된다.

참 고 문 헌

- Den Hartog, J.P., Mechanical Vibrations, McGraw-Hill, New York, 1956.
- Everett, L.J., "Two-Plane Balancing of a Rotor System without Phase Response Measurements," ASME J. Vibration, Acoustics, Stress, Reliability in Design, Vol.109, pp.162-167, 1987.
- Darlow, M.S., "Balancing of High-Speed Machinery: Theory, Methods and Experimental Results," Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 1(1), pp.105-134, 1987.
- Jun, O.S. and Kim, P.Y., "Theoretical Prediction of the Influence Coefficients on Damped Simple Flexible Rotors Using the TMM," National Research Council Canada, IMR-T&M-TR-002, 1994.
- Rao, J.S., Rotor Dynamics, A Halsted Press, 1983.