

## 대공간 구조물의 비선형 해석기법



김 승 덕\*

### 1. 서 문

21세기로의 도약을 향해 우리 나라는 첨단산업을 중심으로 하는 기술집약 시대를 맞고 있다. 여러 첨단산업들 중에서도 초대형 구조물 분야, 특히 대공간 구조물 분야의 기술력 확보는 매우 중요한 과제이다. 이는 1988년의 하계 올림픽의 성공적인 개최, 또 1993년에 개최된 대전 EXPO에서 우리는 더더욱 피부로 느끼고 있다.

대공간 구조물은 구조 시스템의 특성상, 구조해석 그 자체가 설계 및 시공의 중요한 부분을 차지하며, 선진 몇개국에서만 그 know-how를 가지고 높은 잉여가치를 붙여 기술 수출을 하고 있다. 그러나 현재 우리나라에서는 대공간 구조물의 설계 및 시공에 관한 know-how가 전무한 실정이며, 건설 선진국의 기술에 의존하고 있다. 따라서 점차 수요가 증대하고 있고, 기술 선진국을 향하는 우리는 대공간 구조물의 설계 및 시공기술의 자립 및 경쟁력 확보는 필수적이다.

대공간 구조물의 구조해석 문제는 결국 비선형

문제를 어떻게 풀 것인가 라는 문제가 되고, 이러한 비선형문제는 손에 의한 계산이 아닌 기계 즉 컴퓨터에 의존할 수밖에 없다. 구조물의 기하학적 비선형해석을 수행하는 경우, 여러 가지 해석기법들이 제안되고 있으나, 어떤 해석법을 선택하느냐에 따라 기초방정식의 유도, 해석의 정확도, 계산 시간등의 면에서 각기 다른 장단점을 갖고 있다. 그러므로 문제의 목적에 부합되는 해법을 선택하여야 하며, 이는 사용자의 경험에 크게 의존한다.

본고에서는, 컴퓨터를 이용하여 비선형문제를 어떻게 다룰 것인가에 관해 기초 지식에서부터 응용까지를 간단히 설명한다. 먼저 기하학적 비선형 문제를 중심으로, 기존의 비선형 해석기법에 관해 기초적인 기법부터 고난도의 기법까지 일반적으로 많이 사용되는 것을 자세히 소개한다. 또 대공간 구조물의 비선형 해석기법에 관한 이해를 돕기 위해 비교적 간단한 부재인 케이블/트러스 요소를 이용한 몇몇 예제와 비선형해석으로 인한 구조물 거동의 특성도 다룬다.

\* 정희원, 세명대학교 건축공학과 교수, 공학박사

2. 대공간 구조물의 구조해석

곡률을 가진 곡면 구조 형태인 셸 구조는, 외부 하중에 대하여 효과 높게 저항할 수 있는 형태 저항형 구조물이며, 따라서 가볍고, 얇게 대공간을 만들 수 있는 장점을 갖고 있다. 기본적인 구조 저항 메커니즘은 구조물 자체의 곡률을 이용하여 면 외방향으로 작용하는 외력을 주로 면내력으로 저항할 수 있게 한 구조 시스템이다. 대공간 구조물은 이러한 셸 구조 원리를 이용하여 만들어지며, 구조 시스템에 따라 보다 세분하면, 연속체 셸 구조물(shell structure), 스페이스 프레임 구조물(space frame structure), 막 구조물(membrane structure), 케이블 구조물(space cable structure) 및 이들의 복합 구조체인 복합 구조물(hybrid structure)로 분류할 수 있다(그림 1).

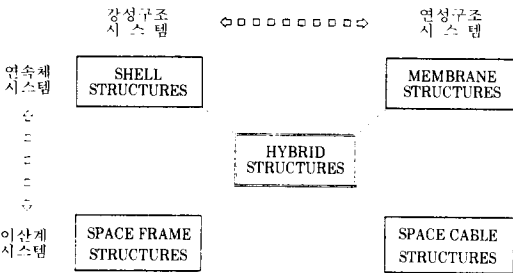


그림 1 대공간 구조물의 분류

형태저항형 구조물인 셸 구조는 주로 면내력으로 힘을 전달할 수 있게 한 구조 시스템이므로 매우 우수한 역학적 특성을 가지고 있으나, 어떤 하중 상태에서는 안정 상태에서 불안정 상태로, 또는 불안정 상태에서 안정 상태로 변화함으로써, 불안정 현상으로 인한 파괴 메커니즘을 파악하고, 설계에 반영하는 것은 매우 중요하다.

강성구조 시스템인 연속체 셸 구조물 및 스페이스 프레임 구조물은, 하중이 어떤 임계값을 넘기면 안정 상태에서 불안정 현상, 즉 좌굴 현상을 나타내며 파괴된다. 그러므로 이러한 파괴 메커니즘을 발생시키는 임계하중을 구조설계시 고려하여야 한다. 연성구조 시스템인 막 구조물 및 케이블

구조물은 초기강성을 갖기 전에는 불안정 상태를 나타내지만, 초기강성의 도입과 함께 안정 상태가 된다. 이와 같은 초기 불안정구조물에 초기강성을 도입함으로써 대변위 또는 대변형 현상이 일어나며, 설계시 초기 형상을 파악할 수 있는 형상해석이 필요하게 된다. 이상의 불안정문제는 모두 기하학적 비선형문제이다.

또 다른 파괴 메커니즘으로 소성 영역에서의 파괴 및 Creep 파괴 등을 들 수 있다. 대공간 구조물은 일반적으로 얇고 얇게(thin & shallow shape) 만들어지므로 탄성역에서의 파괴가 주로 다루어지고 있으나, 두께가 두꺼워지고 Rise-Span비가 깊은(thick & deep shape) 구조물이 되면 소성역에서의 거동 또한 고려하여야 한다. 또 연성구조 시스템에서 Creep 현상에 의한 초기 인장력의 변화로 구조물의 형상이 변하는 문제도 중요한 과제이다. 이상의 문제는 재료적 비선형문제이다.

표 1 구조해석의 분류

(◎ : 필요, △ : 경우에 따라 필요)

		연속체 shell 구조물	Space-Frame 구조물	Mem-brane 구조물	Space-Cable 구조물	Hybrid 구조물
정적 해석	좌굴해석	◎	◎			◎
	형상 해석			◎	◎	◎
동적 해석	탄소성해석	◎	◎	△	△	◎
	Creep해석			◎	◎	◎
동적 해석	내진 해석	◎	◎	△	△	◎
	내풍해석	△	△	◎	◎	◎

이와 같이 비선형문제가 중요한 설계기준이 되는 대공간 구조물의 구조 설계는, 구조물 자체가 대규모이므로 외력으로 자중 이외에도 지진·풍하중 등과 같은 동적인 고려도 필요하다. 자중만을 고려한 경우는 정적문제로 취급되지만, 작용하중이 동적인 경우에는 파괴 메커니즘이 정적일 때와는 크게 달라질 수 있으며, 대공간 구조물은 이러한 동적거동에 대한 충분한 고려가 필요하다. 즉, 지진 등에 의한 주공진 및 파라메트릭 공진 현상, 풍하중에 의한 파동 및 Flutter 현상 등은 중요한 파괴 메커니즘이 된다(표 1).

이상에서와 같이, 대공간 구조물의 구조 설계에서는 대변형 또는 유한변형이론에 의해 구조거동의 특성을 고려해야 할 경우가 많다. 이를 위해 많은 연구자들이 대공간 구조물에 관한 비선형문제를 다루고 있으며, 다양한 연구 결과들을 보고하고 있다. 또 여러 가지 비선형 해석기법도 제안되고 있으나, 어떤 해석법이 가장 적합하고 유리한 해법인가에 관해서는 정해가 따로 없으며, 다만 비선형문제의 유형과 이용자 자신의 경험에 의존할 수밖에 없다.

대공간 구조물의 비선형문제는 구조 불안정문제와 직결되고, 쉘형 구조물 자체가 외력 및 구조물 형상에 매우 민감하게 반응하기 때문에 해석상의 수렴 가능 및 수렴 속도 등 수렴성 향상도 중요한 과제이다. 특히 연성구조 시스템의 형상해석에서는 초기응력의 크기에 따라 수렴성이 매우 민감하게 반응한다. 그러므로 대공간 구조물의 구조해석 문제는 여러 가지 난제들이 존재하고 있으며, 이는 불안정문제에 관한 급세기 수학의 한계성에 기인하는 것으로, 근본적인 해결 방법은 수학적인 문제에 귀착된다 할 수 있다.

### 3. 비선형 해석기법

#### 3.1 섭동법

구조물의 비선형 다원 연립방정식의 일반적인 형태를 다음과 같이 tensor로 나타낸다.

$$f_m(D_i, \Lambda) \equiv K_{mi} D_i + K_{mij} D_i D_j + K_{mijk} D_i D_j D_k + \dots + \Lambda(F_m + F_{mi} D_i + F_{mij} D_i D_j + \dots) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

여기서  $D_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )은 변위,  $\Lambda$ 는 하중파라미터,  $K$ 는 강성계수,  $F$ 는 하중모드이고, 자유도는  $n$ 이다.

비선형 역학은 위와 같은 연립 비선형방정식을 풀어서 하중-변위 관계를 구하는 문제에 귀착된다. 그러나 자유도가 증가하면 식(29)를 풀어서 해를 얻는다는 것은 불가능하게 되고, 여러 가지

근사해법을 이용하여야 한다.

식(1)을 만족하는 해( $D_i^0, \Lambda^0$ )를 기준 상태로 선정하고, ( $D_i^0, \Lambda^0$ )로부터 ( $d_i, \lambda$ )만큼 충분한 상태( $D_i, \Lambda$ )에서 식(1)을 만족하는 새로운 평형 상태를 추적한다(그림 2). 즉,

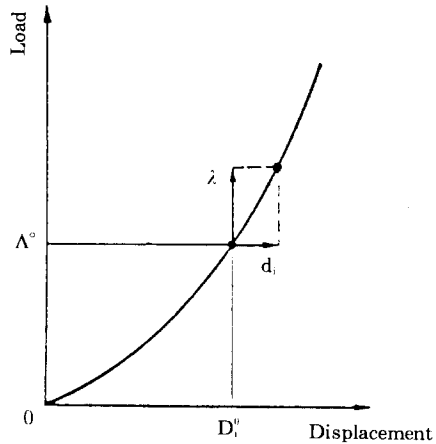


그림 2 평형곡선과 증분

$$f_m(D_i^0, \Lambda^0) = 0 \quad (2)$$

$$f_m(D_i, \Lambda) = f_m(D_i^0 + d_i, \Lambda^0 + \lambda) = 0 \quad (3)$$

증분값 ( $d_i, \lambda$ )를 구하기 위해, 식(1)에서  $f_m(D_i^0 + d_i, \Lambda^0 + \lambda) - f_m(D_i^0, \Lambda^0)$ 를 실행하면,

$$K_{mi}^0 d_i + K_{mij}^0 d_i d_j + K_{mijk}^0 d_i d_j d_k + \dots + \lambda(F_m^0 + F_{mi}^0 d_i + F_{mij}^0 d_i d_j + \dots) = 0 \quad (4)$$

여기서,

$$\begin{aligned} K_{mi}^0 &= K_{mi} + (K_{mij} + K_{mji}) D_j^0 + (K_{mijk} + K_{mkij} + K_{mjki}) \\ &D_j^0 D_k^0 + \dots + \Lambda^0 \{F_{mi} + (F_{mij} + F_{mji}) D_j^0 + \dots\} \\ K_{mij}^0 &= K_{mij} + (K_{mijk} + K_{mjki} + K_{mkij}) D_k^0 + \dots \\ F_m^0 &= F_m + F_{mi} D_i^0 + F_{mij} D_i^0 D_j^0 + \dots \\ F_{mi}^0 &= F_{mi} + (F_{mij} + F_{mji}) D_j^0 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

식(4)는 식(1)의 비선형방정식을 증분방정식으로 나타낸 것이고, 각 증분구간에서의 기초방정식(4)의 각 계수는 식(5)에서와 같이 기준 상태의 변위  $D_i^0$  및 하중파라미터  $\Lambda^0$ 를 포함하는 식으로 표현되어 있다. 또 식(4)는, 방정식은  $n$ 개, 미지수는  $n+1$ 개 ( $d_1, d_2, \dots, d_n, \lambda$ )이므로, 미지수 중 1개를 선택하여 임의 값을 주어야 할 필요가 있다. 따라서 선택된 미지수가 하중파라미터일 때가 하중 증분형, 변위  $di$  일 때가 변위증분형이 된다.

각 미지수가 새로운 파라미터  $t$ 의 함수일 경우를 생각하자. 즉,

$$d_i = d_i(t), d(0) = 0 \quad (6)$$

$$\lambda = \lambda(t), \lambda(0) = 0 \quad (7)$$

윗 식의 도입으로, 식(4)는  $t$ 의 함수가 된다.

$$K_{mi}^0 d_i(t) + K_{mij}^0 d_i(t)d_j(t) + K_{mijk}^0 d_i(t)d_j(t)d_k(t) + \dots + \lambda(t)(F_m^0 + F_{mi}^0 d_i(t) + F_{mij}^0 d_i(t)d_j(t) + \dots) = 0 \quad (8)$$

식(8)에 섭동법을 적용하여 ( $d_i, \lambda$ )를 구하기 위해, 식(6), (7)을 Maclaurin 전개를 하면,

$$d_i(t) = \dot{d}_i(0)t + \frac{1}{2}\ddot{d}_i(0)t^2 + \frac{1}{6}\dddot{d}_i(0)t^3 + \dots \quad (9)$$

$$\lambda(t) = \dot{\lambda}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{\lambda}(0)t^2 + \frac{1}{6}\dddot{\lambda}(0)t^3 + \dots \quad (10)$$

여기서  $\dot{\phantom{x}}$ 는  $d/dt$ 를 의미한다.

윗 식에서 적당한  $t$ 값을 선택하고  $\dot{d}_i, \ddot{d}_i, \dots, \dot{\lambda}, \ddot{\lambda}, \dots$ 를 구하면, 미지값  $d_i, \lambda$ 가 얻어진다. 이때  $t$ 값은 증분구간의 크기를 나타낸다.

식(9), (10)을 식(8)에 대입하고,  $t$ 의 각 차수에 관하여 각 계수를 정리하면,

$$K_{mi}^0 \dot{d}_i + F_m^0 \dot{\lambda} = 0 \quad (11)$$

$$K_{mi}^0 \ddot{d}_i + K_{mij}^0 (2\dot{d}_i \dot{d}_j) + F_{mi}^0 (2\dot{\lambda} \dot{d}_i) + F_m^0 \ddot{\lambda} = 0 \quad (12)$$

$$K_{mi}^0 \dddot{d}_i + 3K_{mij}^0 (\dot{d}_i \ddot{d}_j + \ddot{d}_i \dot{d}_j) + 6K_{mijk}^0 (\dot{d}_i \dot{d}_j \dot{d}_k) + \dot{\lambda} (3F_{mi}^0 \dot{d}_i \dot{d}_j + 6F_{mij}^0 \dot{d}_i \dot{d}_j) + 3\ddot{\lambda} F_{mi}^0 \dot{d}_i + \ddot{\lambda} F_m^0 = 0 \quad (13)$$

식(11)은  $\dot{d}_i, \dot{\lambda}$ 에 관한 선형방정식이고, 간단히 해를 얻을 수 있다. 얻어진  $\dot{d}_i, \dot{\lambda}$ 를 식(12)에 대입하면  $\ddot{d}_i, \ddot{\lambda}$ 에 관한 선형방정식이 되고, 역시 해가 얻어진다. 이러한 순서로 계속적으로 반복하면,  $(\ddot{d}_i, \ddot{\lambda}), (\ddot{d}_i, \ddot{\lambda}), (\ddot{d}_i, \ddot{\lambda}) \dots$  순으로 구할 수 있고, 이를 식(9), (10)에 대입하면 ( $d_i, \lambda$ )가 얻어지며,  $D_i = D_i^0 + d_i, \Lambda = \Lambda^0 + \lambda$ 로 부터 ( $D_i, \Lambda$ )가 구해진다. 그림 3은, 섭동법을 이용한 1차 근사(CD), 2차 근사(CE), 3차 근사(CF) 등을 나타낸 것이고, 1차 근사만을 채택하면 하중증분법과 같은 결과를 얻는다.

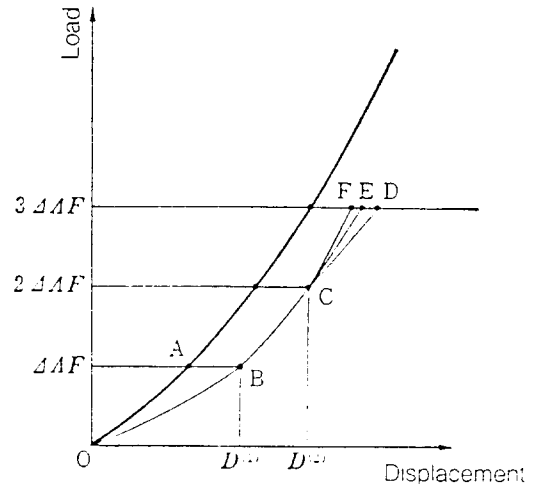


그림 3 섭동법

이상과 같이, 섭동법(static perturbation method)은 임의 하중레벨에서의 변형 상태를 이용하여, 다음 증분 단계에서는 1차 근사, 2차 근사, ... 등, 고차 근사를 구해 새로운 변형 상태를 추적해 나가며, 이를 반복 수행하여 변형의 전 과정을 구하는 해석법이다. 그러므로 각 증분구간에서 오차를 가능한 줄이고, 증분구간은 크게 하여 증분수를 줄일 수 있는 비선형 해석기법이다. 일반적인 증분형 해석법은 각 증분구간에서 1차 근사(선형 근사)를 하는데 비해, 섭동법은 2차 이상의 근사

를 수행하여 정해와 보다 가까운 해를 얻을 수 있고, 평형곡선 상의 특이점(singular point)이 있는 경우에도 적용이 가능하다. 그러나 섭동법은 정확도를 향상시키는 해석기법으로 주로 이용되어 지지만, 고차항까지도 채용함으로써 기초방정식의 작성, 해석프로그램의 개발 등의 과정에서 복잡하게 된다. 또 계산 과정에서 불평형력(residual force)의 소거 기능을 갖고 있지 않은 단점도 있다.

### 3.2 증분법

식(11)의 선형화된 비선형 증분방정식을 다음과 같이 변형시켜 일반적인 매트릭스 형태로 나타낸다.

$$\dot{\lambda}\{F\}=[K]\{\dot{d}\}, [K]=[K_1 K_2 \dots K_n] \quad (14)$$

윗 식은 증분구간에서 부분적으로 선형화한 것을 나타내고, 기하학적 비선형해석에서 많이 이용되고 있는 증분방정식이 된다. 증분법에서는 증분 파라미터의 선정에 따라 하중증분법, 변위증분법, 호장증분법, 일반증분법 등이 있으나, 여기서는 하중증분법과 변위증분법에 관해 정식화 해본다.

파라미터  $t$ 를 하중파라미터의 증분  $\lambda$ 를 선택하면 하중증분법에 관한 기초방정식이 된다. 즉  $t = \lambda$  이므로,

$$\lambda = t \quad (15)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\lambda}{d\lambda} = 1 \quad (16)$$

증분구간을 선형 근사함으로, 식(9), (10)으로부터,

$$d_i(t) = \dot{d}_i t \quad (17)$$

$$\lambda(t) = \dot{\lambda} t \quad (18)$$

식(15), (16)을 식(17), (18)에 대입하면,

$$d_i(\lambda) = \dot{d}_i \lambda \quad (19)$$

$$\lambda(\lambda) = \lambda \quad (20)$$

위의 관계식을 식(14)에 대입하면,

$$\lambda \{F\} = [K] \{d\} \quad (21)$$

식(21)이 하중증분법의 기초방정식이고,  $[K]$ 는 접선강성매트릭스를,  $\{F\}$ 는 하중모드를 나타낸다.

다음은 파라미터  $t$ 를 변위벡터  $\{d\}$ 중의 1개, 가령  $d_1$ 을 선택하면 변위증분법에 관한 기초방정식이 된다. 즉  $t = d_1$  이므로,

$$d_1 = t \quad (22)$$

$$\dot{d}_1 = \frac{dd_1}{dt} = \frac{dd_1}{dd_1} = 1 \quad (23)$$

식(22), (23)을 식(17), (18)에 대입하면,

$$d_i(d_1) = \dot{d}_i d_1 \quad (i \neq 1) \quad (24)$$

$$\lambda(d_1) = \dot{\lambda} d_1 \quad (25)$$

식(14)에서 강성매트릭스  $[K]$ 를 열벡터로 분해하여 나타내면,

$$\dot{\lambda} \{F\} = [K_1 K_2 \dots K_n] \begin{bmatrix} 1 \\ \dot{d}_i \\ \vdots \\ \dot{d}_n \end{bmatrix} \quad (26)$$

윗 식을 변형시키면,

$$\{-K_1\} = [ -F K_2 \dots K_n ] \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{d}_i \\ \vdots \\ \dot{d}_n \end{bmatrix} \quad (27)$$

식(27)에 식(24), (25)의 관계식을 대입하면,

$$d_1 \{-K_1\} = [ -F K_2 \dots K_n ] \begin{bmatrix} \lambda \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \quad (28)$$

식(28)이 변위증분법의 기초방정식이고, 변위 증분  $d_1$ 에 대응하는 하중파라미터의 증분  $\lambda$ 와  $d_1$  이외의 변위증분  $d_2, d_3 \dots d_n$ 을 구할 수 있다.

3.3 Newton-Raphson법

구조물의 기하학적 비선형문제를 고려한 하중-변위관계식을 선형화된 증분방정식으로 나타내기 위해, 식(1)의 관계를 보다 간단한 형태로 변형하여 나타내면 다음과 같이 된다.

$$AF_m = K_{mi}D_i + K_{mij}D_iD_j + O(D), (m=1,2,\dots,n) \quad (29)$$

여기서,  $A$  : 하중파라미터,  $F_m$  : 하중모드의  $m$  성분,  $K_{mi}$  : 1차 강성계수,  $K_{mij}$  : 2차 강성계수,  $D_i$  : 변위 ( $i=1,2,\dots,n$ ),  $O(D)$  : 고차항,  $n$  : 자유도 이다.

식(29)를 증분형 비선형방정식으로 나타내기 위해, 평형궤도상의 임의점 ( $A, D$ )에서 미소증분 ( $\Delta A, \Delta D$ )만큼 진행된 점 ( $A+\Delta A, D+\Delta D$ )에서의 평형방정식을 구하면,

$$(A+\Delta A)F_m = K_{mi}(D_i+\Delta D_i) + K_{mij}(D_i+\Delta D_i)(D_j+\Delta D_j) + O(D+\Delta D) \quad (30)$$

식(30)에서 식(29)의 관계를 고려하면 다음과 같이 증분구간에서의 증분형 비선형방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \Delta AF_m &= K_{mi}\Delta D_i + K_{mij}(D_i\Delta D_j + \Delta D_iD_j) + \text{고차항} \\ &= K_{mi}\Delta D_i + [(K_{mij} + K_{mji})D_j]\Delta D_i + \text{고차항} \end{aligned} \quad (31)$$

식(31)을 매트릭스로 나타내기 위해,  $K_{mi}$  및  $(K_{mij} + K_{mji})D_j$ 를 각각  $(m,i)$  성분으로 하는 매트릭스를  $[K_E], [K_G]$ 로 하고, 고차항을 생략하면,

$$\Delta A\{F\} - \{R(D)\} = ([K_E] + [K_G])\{\Delta D\} \quad (32)$$

여기서  $\{R(D)\}$ 는 2차항 이상을 등가인 하중벡터로 치환한 것이다. 식(32)에서  $[K_E]$ 는 선형해석에 이용되는 탄성강성 매트릭스(elastic stiffness matrix)이고,  $[K_G]$ 는 증분기준점에서의 변위  $\{D\}$ 의 함수로 표현되며, 이를 초기변위 매트릭스(initial displacement matrix), 초기응력 매트릭스

(initial stress matrix), 기하강성 매트릭스(geometric stiffness matrix) 등으로 불리워진다. 이하, 식(32)의 선형화된 증분방정식을 다음과 같이 간단히 표현한다.

$$\Delta F - R = [K_E + K_G]D \equiv KD \quad (33)$$

다음은 고차항을 생략하여 각 증분구간에서 선형화 함으로 발생하는 오차를 하중벡터로 나타낸 불평형력  $R$ 에 관하여 설명한다.

어떤 하중레벨  $\bar{F}$ 에서 그 때까지 얻어진 변위를  $\bar{D}$ 라 하자. 이때의 정해를  $\bar{D}$ 라 하면 오차는  $e = \bar{D} - \bar{D}$ 가 된다. 그러나 정해  $\bar{D}$ 를 구하는 것은 불가능함으로 오차  $e$ 는 구할 수 없다. 그러므로 2차적  $\bar{D}$ 인 오차로 불평형력을 생각해 본다. 얻어진 근사값인 변위  $\bar{D}$ 와 이에 대응하는 내력  $\bar{F}$ 를 이용하여, 역으로  $\bar{D}, \bar{F}$ 와 평형을 이루는 절점벡터  $\tilde{F}$ 를 구한다. 이 근사값  $\tilde{F}$ 를 이용하면 불평형력  $R$ 은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$R = \tilde{F} - \bar{F} \approx e \quad (34)$$

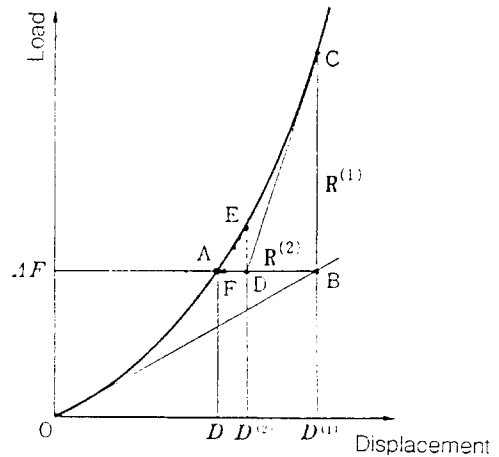


그림 4 Newton-Raphson법

선형화된 비선형방정식인 식(33)을 수렴 계산하여 근사해를 구하는 방법중 가장 일반적으로 이용되고 있는 것이 Newton-Raphson법이다. Newton-Raphson법에 의한 계산 과정을 간단히 설명

하면 다음과 같다(그림 4).

- 1)  $\Delta F^{(1)} = K_E D^{(1)}$ 으로부터  $D^{(1)}$ 을 구한다 : B점
- 2)  $D^{(1)}$ 을 식(34)에 대입하여  $R^{(1)}$ 을 계산한다 :  $\overline{BC}$
- 3)  $D^{(1)}$ 을 이용하여  $K_G$ 를 계산하고,  $-R^{(1)} = [K_E + K_G^{(1)}] \Delta D^{(2)}$ 로부터 수정량  $\Delta D^{(2)}$ 를 구한다 :  $\overline{BD}$
- 4)  $D^{(2)} = D^{(1)} + \Delta D^{(2)}$ 를 계산한다 : D점
- 5) 이상의 과정 B → C → D → E → F → ... 순으로 반복 계산하여 수렴시킨다.

따라서 Newton-Raphson법을 일반화하면 다음과 같다.

$$\delta_{ij} A^{(s)} F - R^{(s-1)} = [K_E + K_G^{(s-1)}] D^{(s)} \quad (35)$$

여기서  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker delta이고, s는 반복 회수이다.

Newton-Raphson법은 매우 안정된 해석법이며, 수렴 계산의 기본적인 해석법이다. 그러나 선형화 강성매트릭스  $K$ 를 각 계산 단계마다 다시 계산하여  $K^{-1}$ 를 얻어야 함으로 계산 시간이 증가한다. 그러므로 임의의 시점에서 강성매트릭스를 고정하여 동일한  $K$ 를 이용하는 수정 Newton-Raphson법도 이용되고 있다.

### 3.4 수정 하중증분법

수정 하중증분법은 Newton-Raphson법과 하중증분법의 장점을 합성하여 계산을 진행하는 해석법으로, 매우 우수한 비선형 해석법이다. 하중증분법과 같은 증분형 해석기법에, 각 증분구간에서의 불평형력을 제거하는 방법을 도입하여, 다음 단계의 증분계산에서 오차의 누적을 최소화시킬 수 있는 방법이고, 수렴 계산도 필요치 않다(그림 5).

계산 과정은 식(33)을 이용하여,

- 1)  $\Delta A^{(1)} F - R^{(0)} = [K_E + K_G^{(0)}] \Delta D^{(1)}$ 으로부터  $D^{(1)}$ 을 구한다 : A점
- 2)  $D^{(1)}$ 을 식(34)에 대입하여  $R^{(1)}$ 을 계산한다 :  $\overline{AB}$
- 3)  $D^{(1)}$ 을 이용하여,  $\Delta A^{(2)} F - R^{(1)} = [K_E + K_G^{(1)}]$

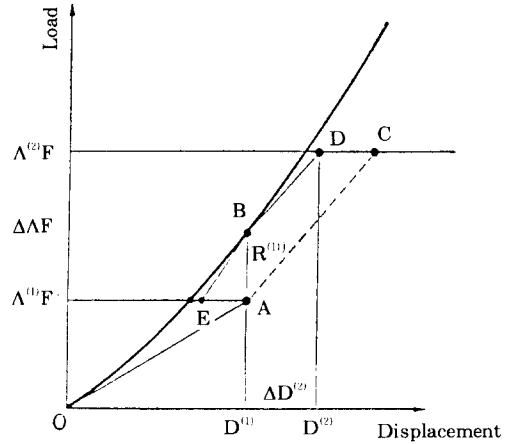


그림 5 수정 하중증분법

$\Delta D^{(2)}$ 로 부터  $\Delta D^{(2)}$ 를 구한다.

- 4)  $D^{(2)} = D^{(1)} + \Delta D^{(2)}$ 를 계산한다 : D점
- 5) 이상의 과정 A → B → D → ... 순으로 하중을 증분시킨다.

그림 5에서 A → C는 하중증분법의 증분 경로를, B → E는 Newton-Raphson법의 수렴 경로를 나타낸다. 따라서 수정 하중증분법을 정리하면 다음과 같다.

$$A^{(s+1)} F - R^{(s)} = [K_E + K_G^{(s)}] D^{(s+1)} \quad (36)$$

### 3.5 호장증분법

기하학적 비선형문제의 하중-변위 곡선을 얻기 위해 일반적으로 증분형 방정식을 구하고, 이를 증분법에 의해 평형궤도를 추적한다. 대표적인 증분법을 앞에서 설명하였으나, softening 현상을 나타내는 구조물의 snap-through 현상을 파악하기 위한 비선형 해석기법으로는 변위증분법이 이용된다. 그러나 snap-back 현상을 나타내는 구조물은 변위증분법으로는 불가능하게 되고, 이러한 경우에는 호장증분법(arc length method)을 이용하여야 한다.

호장증분법은 하중-변위곡선에 접하는 접선의 호 길이를 일정하게 유지하는 범위 내에서 평형궤도를 추적하는 방법으로, 반복 수렴 계산을 하는

증분법의 일종이다. 기준점을  $s$  로 하고,  $s+1$  단계에 대한 증분방정식을 다음과 같이 나타낸다(그림 6).

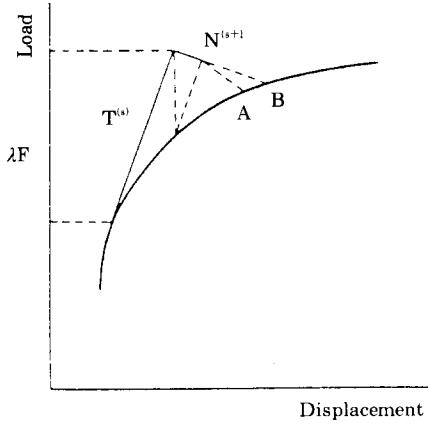


그림 6 호장증분법

$$\lambda^{(s+1)}F + R^{(s)} = K^{(s)}d^{(s+1)} \quad (37)$$

여기서  $\lambda$ 는 호의 길이를 일정하게 유지하였을 때의 하중파라미터의 증분이고,  $d$ 는 이에 대응하는 변위의 증분이며 다음과 같이 구해진다.

$$d^{(s+1)} = \lambda^{(s+1)}d_{\parallel}^{(s+1)} + d_{\perp}^{(s+1)} \quad (38)$$

여기서

$$K^{(s)}d_{\parallel}^{(s+1)} = F, K^{(s)}d_{\perp}^{(s+1)} = R^{(s)} \quad (39)$$

그림 6에서와 같이, 호의 길이를 일정하게 유지하는 기준벡터  $\{T^{(s)}\}$ 를 회전시켜, 하중-변위 곡선과의 교차점(A점)을 얻기 위해 반복 계산하게 되며, 이러한 반복 계산법은 몇 가지 제안된 방법들이 있다.

여기서는 설명을 간단히 하기 위해, 벡터  $\{T^{(s)}\}$ 와 직교하는 방향과의 교차점(B점)을 얻는 방법으로 한정한다. 기준벡터  $\{T^{(s)}\}$ 와 수정벡터  $\{N^{(s+1)}\}$ 을 다음과 같이 선택한다.

$$\{T^{(s)}\} = [d^{(s)} \lambda^{(s)}]^T \quad (40)$$

$$\{N^{(s+1)}\} = [d^{(s+1)} \lambda^{(s+1)}]^T \quad (41)$$

$\{T^{(s)}\}$ 와  $\{N^{(s+1)}\}$ 이 직교하기 위한 조건으로부터,

$$\{T^{(s)}\}^T \{N^{(s+1)}\} = 0 \quad (42)$$

식(42)에 식(40), (41)을 대입하면,

$$d^{(s)}d^{(s+1)} + \lambda^{(s)}\lambda^{(s+1)} = 0 \quad (43)$$

윗 식에 식(38)을 대입하고,  $\lambda^{(s+1)}$ 에 관해 풀면,

$$\lambda^{(s+1)} = -\frac{d^{(s)}d_{\parallel}^{(s+1)}}{d^{(s)}d_{\perp}^{(s+1)} + \lambda^{(s)}} \quad (44)$$

이상의 과정을 정리하면 다음과 같다.

- 1) 식(39)로부터  $d_{\parallel}^{(s+1)}, d_{\perp}^{(s+1)}$ 를 구한다.
- 2) 식(44)로부터  $\lambda^{(s+1)}$ 을 구한다.
- 3) 식(38)로부터  $d^{(s+1)}$ 을 구한다.

일반적인 다원 연립 비선형방정식인 경우에는, 증분방정식을 구하여 앞에서 언급한 것과 같은 방법으로 평형궤도를 추적할 수 있다. 즉, 식(39), (44), (38)에 대응하는 식을 매트릭스 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$K^{(s)}d_{\perp}^{(s+1)} = F, K^{(s)}d_{\parallel}^{(s+1)} = R^{(s)} \quad (45)$$

$$\lambda^{(s+1)} = -\frac{d^{(s)} \cdot d_{\parallel}^{(s+1)}}{d^{(s)} \cdot d_{\perp}^{(s+1)} + \lambda^{(s)}} \quad (46)$$

$$d^{(s+1)} = \lambda^{(s+1)}d_{\perp}^{(s+1)} + d_{\parallel}^{(s+1)} \quad (47)$$

이상의 알고리즘을 Riks-Wempner법이라고도 한다.

탄성좌굴후의 거동을 포함하는 고도의 비선형 문제에서 평형곡선을 연속적으로 추적해 나갈 때 증분파라미터로 호 길이를 선택하는 것이 합리적이라 할 수 있고, 따라서 호장증분법은 하중 및 변위의 극한점 근방에서도 수렴 가능하며, 극한점을 자동적으로 넘길 수 있고, 다른 증분법에 비해 분기점 근방에서 강성매트릭스의 rank가 빠르게 회복된다는 장점이 있다. 또 일반적인 대수 비선형 방정식에 대해서도 안정된 해법으로 알려져 있다.

그러나 각 증분구간에서 수렴 계산을 반복하여야 함으로 계산 시간이 길어지는 단점이 있다. 최근에는 Crisfield의 이론이 주목받고 있으며, 특히 증분구간의 중간점에서 강성매트릭스를 계산하여, 보다 수렴 속도를 향상시키는 연구도 보고되고 있다.



4. 해석 예

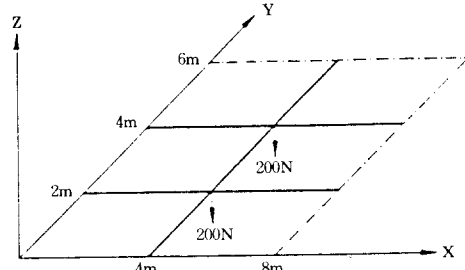
4.1 Cable Net의 응력-변형해석

기하학적 비선형을 고려한 유한요소법을 이용하여 작성된 비선형해석 프로그램인 NASS를 이용하여 몇 가지 해석 예를 소개한다. 본 고에서 이용된 컴퓨터 해석프로그램 NASS(Nonlinear Analysis for Space Structures)는, Hybrid형 대공간 구조물 구조해석용으로, Shell structures, Space frame structures, Membrane structures, Space cable structures 및 이들의 복합 구조체인 Hybrid structures의 비선형 구조해석까지를 할 수 있는 범용 해석프로그램을 목표로 하여 개발되고 있는 것이다[참고문헌 10참조].

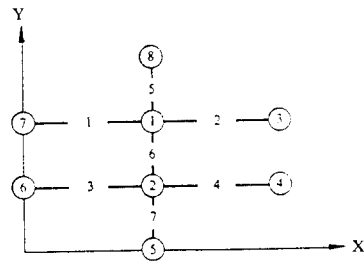
먼저 이해를 돕기 위해 연성구조 시스템의 해석 과정상의 특성에 관해 간단히 설명한다. 막 구조, 케이블 구조, 또는 복합 구조체로서의 막-케이블 구조물은 연성구조 시스템의 대표적인 구조 시스템으로, 기존의 일반 건축구조재보다 가볍고, 축강성은 강하나 휨 강성이 매우 작은 막 및 케이블을 사용하며, 대공간 구조물을 보다 효과적으로 구축할 수 있는 구조 시스템이다. 막-케이블 구조물은 초기강성이 매우 약하며, 따라서 초기강성을 확보하기 위해서는 초기응력의 도입이 필수적이다. 즉, 연성구조 시스템인 막 구조물 및 케이블 구조물은 초기강성을 갖기 전에는 불안정 현상을 나타내지만, 초기강성의 도입과 함께 안정 상태가 된다. 이와 같은 초기 불안정구조물에 초기강성을 도입함으로써 야기되는 대변형 현상을 파악하기 위하여 초기 형상에 관한 해석이 필수적으로 요구된다. 이러한 이유로, 연성구조 시스템의 구조 설계는 다른 일반적인 구조 설계와는 달리,

- 초기응력 도입에 의한 형상해석
- 외부 하중에 의한 응력-변형해석

의 2 단계 해석이 필요하게 되고, 강성이 매우 작으므로 기하학적 비선형성을 고려한 비선형해석이 요구된다. 따라서 일반적으로 이용되고 있는 범용 구조해석 프로그램은 막 구조물 및 케이블 구조물의 해석에는 부적당하며, 이러한 특수 구조물의 설계 및 시공을 위해 별도의 구조해석 프로그램이 필요하게 된다.



(a) Cable Net 구조물



(b) 절점 및 부재번호

그림 7 Model- I (Cable Net)

비선형해석의 수렴 과정을 시험하기 위해, 그림 7의 Model- I 과 같은 Cable Net 구조물을 채택하여 비선형 응력-변형해석을 수행한다. 해석 결과는 Buchholdt의 결과와 비교한다. 최소 포텐셜 에너지 이론(minimization of the total potential energy)을 적용한 Buchholdt의 해법에서는, 수렴을 위한 반복 계산을 공역 경사법(the method of conjugate gradients)을 이용하여 Euclidean Norm이 초기값의 0.001% 이하가 될 때까지 반복 계산한 것이다.

Model- I의 재원은 각 부재의 탄성계수  $E=1.1 \times 10^5 \text{N/mm}^2$ , 단면적  $2\text{mm}^2$ , 초기응력 500N을 채택하고, 본 해석에서는 Newton-Raphson법을 이용하여 불평형력을 0.001N 이하로 수렴시킨다.

해석 결과를 그래프로 나타내면, 절점 1, 2의 변위 및 불평형력의 변화는 그림 8, 각 부재응력의 변화는 그림 9에서와 같다.

Buchholdt의 해석 결과는 10회 반복 계산후, 절

점1, 2의 z-방향 변위가 199.43mm에 수렴한 것으로 보고하고 있다. NASS에 의한 응력-변형해석 결과인 195.29mm는 Buchholdt 해의 97.92%에 해당하는 값이다.

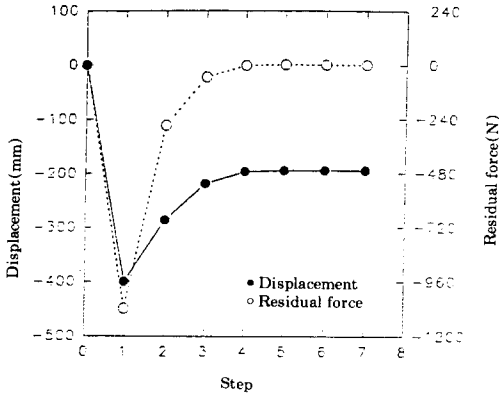


그림 8 변위 및 불평형력

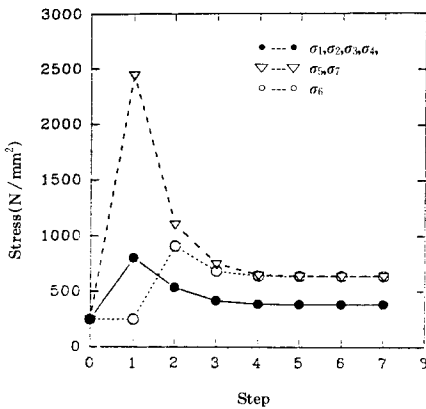


그림 9 응력도

4.2 Cable Truss의 형상해석

그림 10의 Model-II와 같은 Cable Truss 구조물을 하중제어법을 이용하여 형상해석을 수행한다. 해석 결과는 Namita & Nakanishi의 결과와 비교한다. Namita 등의 보고에서는 설계자가 제시한 목표 형상에 가장 근접하게 구조물을 설계하는 최적 설계 방법을 제안하고 있다.

해석 범위는 케이블 트러스 모델의 대칭성을 고려하여 왼쪽 부분 1/2만을 해석하며, 재료의 자중

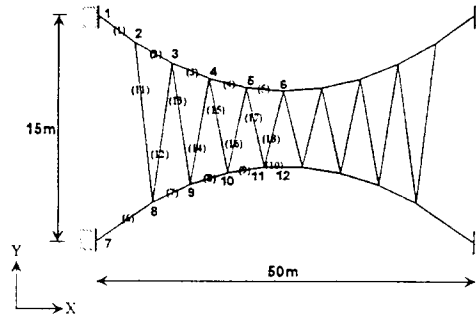


그림 10 Model-II (Cable Truss)

은 무시한다. 각 부재의 탄성계수는  $E=2.0 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ , 단면적은 상현재  $9.84 \text{ cm}^2$ , 하현재  $104 \text{ cm}^2$ , 웨브재  $0.494 \text{ cm}^2$ 로 한다. Cable Truss의 초기강성을 확보하기 위해 각 부재의 초기응력을 표 2에서와 같이 도입하며, 목표 형상의 각 절점좌표는 표 3과 같다.

본 해석 모델은 수정 하중증분법을 이용하여 초기 불평형력을 분할하여 역으로 가력하고, 계속해서 최종 불평형력을 제거시키기 위하여 Newton-Raphson법으로 수렴 계산한다. 목표 형상에서 요구하는 절점좌표와 NASS에 의한 결과 및 Namita 등에 의한 결과를 표 3에서 비교한다. 괄호 안

표 2 초기응력

부재번호	초기응력 (kg/cm <sup>2</sup> )
1	1878.46
2	1839.53
3	1807.22
4	1782.11
5	1764.43
6	2464.42
7	2362.50
8	2319.23
9	2331.73
10	2378.85
11	261.13
12	344.13
13	297.57
14	218.37
15	356.28
16	123.48
17	354.25
18	115.87

표 3 목표 형상과 형상해석 결과의 비교

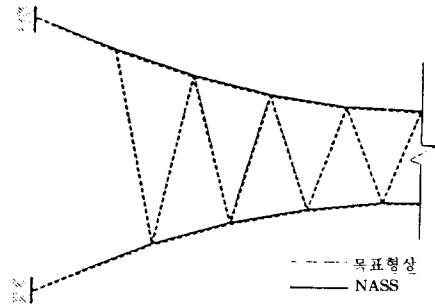
(unit : cm)

구분 절점번호	목표 형상 (기준값=1)		Namita의 결과 (상대비율)		NASS의 결과 (상대비율)	
	X	Y	X	Y	X	Y
1	0.00 (1)	0.00 (1)	0.00 (1)	0.00 (1)	0.00 (1)	0.00 (1)
2	500.00 (1)	-180.00 (1)	501.20 (1.10)	-175.80 (0.98)	502.37 (1.01)	-172.08 (0.96)
3	1000.00 (1)	-320.00 (1)	999.50 (0.99)	-317.60 (0.99)	1001.40 (1.01)	-314.03 (0.98)
4	1500.00 (1)	-420.00 (1)	1498.40 (0.99)	-421.00 (1.01)	1500.80 (1.001)	-415.35 (0.99)
5	2000.00 (1)	-480.00 (1)	1998.10 (0.99)	-487.40 (1.02)	2000.40 (1.0002)	-476.14 (0.99)
6	2500.00 (1)	-500.00 (1)	2500.00 (1)	-518.20 (1.04)	2500.00 (1)	-496.36 (0.99)
7	0.00 (1)	-1500.00 (1)	0.00 (1)	-1500.00 (1)	0.00 (1)	-1500.00 (1)
8	750.00 (1)	-1245.00 (1)	730.80 (0.97)	-1220.20 (0.98)	748.23 (0.99)	-1238.20 (0.99)
9	1250.00 (1)	-1125.00 (1)	1235.00 (0.99)	-1085.00 (0.96)	1249.00 (0.99)	-1119.80 (0.99)
10	1750.00 (1)	-1045.00 (1)	1737.90 (0.99)	-999.70 (0.96)	1749.50 (0.99)	-1040.08 (0.99)
11	2250.00 (1)	-1005.00 (1)	2243.60 (0.99)	-959.50 (0.96)	2249.80 (0.99)	-1001.40 (0.99)
12	2500.00 (1)	-1005.00 (1)	2500.00 (1)	-959.50 (0.96)	2500.00 (1)	-1001.40 (0.99)

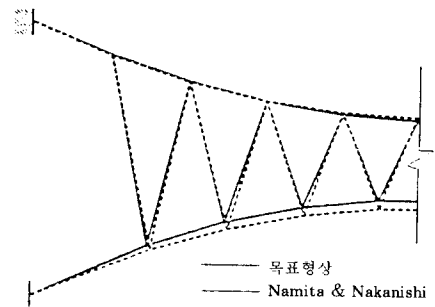
의 수치는 목표 형상의 좌표값으로 규준화한 상대 비율을 나타낸다. 그림 11은 목표 형상, NASS에 의한 형상해석 결과, Namita 등에 의한 결과를 서로 비교한 것이다. NASS에서는 수정 하중증분법과 Newton-Raphson법을 함께 이용함으로써 수렴성을 보다 향상시킬 수 있는 방법을 채택하였고, 따라서 NASS에 의한 형상해석 결과가 Namita 등에 의한 결과 보다 목표 형상에 더욱 근접함을 알 수 있다.

참 고 문 헌

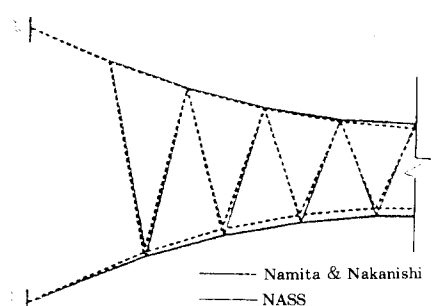
1. V. V. Novozhilov, Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity, Graylock Press, 1953.
2. 日本鋼構造協會, 吊構造, ユロナ社, 1975.



(a) 목표형상과 NASS결과 비교



(b) 목표형상과 Namita 결과 비교



(c) NASS결과와 Namita결과 비교

그림 11 최종 형상의 비교

3. 山田嘉昭, 塑性・粘彈性, 培風館, 1980.
4. 鷺津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦, 有限要素法ハンドブック, II 用編, 培風館, 1983.
5. H. A. Buchholdt, Introduction to Cable Roof Structures, Cambridge University Press, 1985.
6. 金勝德, 偏平構造物の動的安定に関する研究, 東

- 京大學博士學位論文, 1990.
7. O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, The Finite Element Method, 4/E Vol 2, Mcgraw-Hill Book Company, 1991.
  8. 권택진, 김승덕, 최현식, 정명채, Shell構造의 理論 및 應用, 전산구조공학회 기술강습회 교재9-1, 한국전산구조공학회, 1994.
  9. 권택진, 이병해, 한상을, 김승덕, 정환목, Space Frame 구조물의 구조해석, 설계 및 시공, 전산구조공학회 기술강습회 교재12-1, 한국전산구조공학회, 1995.
  10. 김승덕, 서삼열, 서일교, 한상을, 대공간 구조물의 해석 및 설계, 전산구조공학회 기술강습회 교재15-2, 한국전산구조공학회, 1997.
  11. M. A. Crisfield, "An Arc-Length Method including Line Searches and Accelerations," Int. J. Num. Meth. in Engrg. , 19, 1983. , pp. 1269-1289.
  12. Y. Namita and H. Nakanishi, "A Numerical Method of Optimum Design Analysis for Cable Assembles," Space Structures 4, Thomas Telford, London, 1993., pp.953-962.
  13. 권택진, 김승덕, 항가이 야스히코, 서삼열, 최현식, "기하학적 비선형을 고려한 막형 케이블네트 구조물의 최적형상 및 응력·변형해석에 관한 연구," 대한건축학회논문집 11권 1호 통권75호, 1995. 1., pp.153-160.
  14. 최현식, 김승덕, 이형훈, "케이블 구조물의 기하학적 비선형을 고려한 최적 형상해석," 한국강구조학회논문집 제8권 1호, 1996. 3., pp.127-135.
  15. 김승덕, "대공간 구조물의 연구 동향," 한국강구조학회지 제7권 3호, 1995. 9., pp.78-81.
  16. 김승덕, "돛형 셸의 구조불안정 문제를 통하여 본 제3의 과학에의 교훈," 전산구조공학 제9권 2호, 1996. 6., pp.23-27. 