

GAP요소를 이용한 접촉 알고리즘



정 기 택*

1. 서 론

접촉현상은 여러 개의 부재로 구성되는 구조물에서 흔히 발생하는 현상으로서, 구조물의 변형이 크지 않고 재료가 탄성 거동을 하는 경우에도 비선형성을 가지는 문제이기 때문에 수치적 해결이 용이하지 않다. 초기에는 이론해를 통한 접근 방법이 주류를 이루었으나, 수치 기법의 발달에 따라 유한요소법이 접촉문제의 해를 구하기 위한 주요 도구로 사용되고 있다. 일반적인 유한요소법의 정식화는 변위 자유도에 기초를 두고 이루어지는 바, 접촉문제에서는 접촉영역의 변위가 불가입성(impenetrability)조건에 의해 제한된다. 불가입성 조건이란 한 부재의 표면에 위치한 절점이 다른 부재의 내부로 침범할 수 없다는 조건을 의미한다. 불가입성 조건을 구현하는 방법은 크게 두 가지로 구분할 수 있는데, 하나는 정식화과정 자체에서 변위제한조건을 고려하는 것이고, 다른 하

나는 gap 요소를 사용해서 접촉하는 영역들을 연결시키는 방법이다.

제한조건을 부여하려면 먼저 접촉 가능한 점들이 정의되어야 하는데, 가장 간단한 방법은 접촉이 예상되는 영역에서 쌍을 이루는 절점들을 설정하고 해석 과정에서 각 쌍들의 접촉 여부를 검토하는 것이다. 접촉 가능한 점들이 설정되면, 제한조건은 다양한 방법으로 구현될 수 있다. Wilson과 Parsons(1970) 및 Arya와 Hegemier(1982)는 제한조건을 사용해서 강성식을 수정하였다. 한편 접촉력을 미지수로 도입해서 제한조건을 부여하는 방법이 있는데, 대표적인 것으로는 Lagrange multiplier 기법(Hughes 등 1976, Chaudhary와 Bathe 1986)과 penalty 함수(Oden과 Kikuchi 1982, Papadopoulos와 Taylor 1992)를 사용하는 방법 등이 있다. 또한 mathematical programming 기법(Torstenfeld 1983, Baniotopoulos 1994)을 이용해서 접촉문제의 해를 구하는 방법

* 정회원, 현대건설(주)종합건축설계실 과장

• 본 내용은 필자의 학위논문(정기택 1995)에서 발췌한 것으로서, 내용 중 일부가 국제학술지 Computers and Structures(Choi, Chang-Koon and Chung, Gi-Taek, "A Gap Element for Three-Dimensional Elasto-Plastic Contact Problems", Vol.61, No.6, pp.1155-1167, 1996)에 게재되어 있습니다.

이 있다.

불가입성 조건을 구현하는 또다른 방법은 gap 요소를 사용해서 접촉이 예상되는 절점들을 연결하는 방법으로서, gap 요소를 구성하는 절점들의 상대적인 위치에 따라 요소의 강성을 비선형적으로 보정하면서 다양한 접촉 거동을 모델링할 수 있다(Goodman 등 1968, Heuze 등 1971, Schafer 1975, Stadter와 Weiss(1979), Heuze와 Barbour 1982, Beer 1985, Simons와 Bergan 1986, Bai와 Zhao 1988). gap 요소의 강성을 보정하는 기본적인 개념은 두 영역의 간격이 떨어져 있으면 강성을 영으로 설정하고, 접촉하게 되면 강성을 큰 값으로 증가시키는 것이다.

gap 요소를 이용한 접촉 알고리즘의 장점은 새로운 형태의 미지수나 특별한 해석 기법이 필요없기 때문에 기존의 유한요소해석 프로그램에 쉽게 포함시켜 사용할 수 있다는 것이다. 이에 본 고에서는 마찰이 포함되지 않은 삼차원 탄소성 접촉 문제를 간단하면서도 효율적으로 해결할 수 있도록 기존의 gap 요소의 단점을 보완하여 개발된, 새로운 형태의 gap 요소를 소개하기로 한다. 제안된 접촉 알고리즘의 정확도 및 효율성은 다양한 수치예제를 통하여 검증된다.

2. Gap 요소를 이용한 접촉 알고리즘

그림 1은 접촉면이 포함된 구조시스템을 해석하기 위해 gap 요소를 도입한 유한요소 모델을 개략적으로 도시하고 있다. gap 요소는 외부 하중에 의해서 두 영역 A와 B가 겹쳐지는 것을 방지하는 역할을 제외하고는 영역들의 거동에 아무런 저항을 하지 않는다는 점에서 일종의 가상적인 요소로 정의될 수 있다.

gap 요소를 사용해서 접촉 문제를 해석하는 과정을 설명하기 위하여, 일차적으로 그림 1에 나타난 하나의 gap 요소 i 에 대한 거동을 살펴보면 다음과 같다. gap 요소는 두 영역 A 및 B의 상대적인 거동에 따라 길이가 증가하거나 감소하는 상태가 될 것이다. 결국 gap 요소의 길이는 두 영역 사이의 간격 d 로 정의되며, 이 값은 상수가 아니라

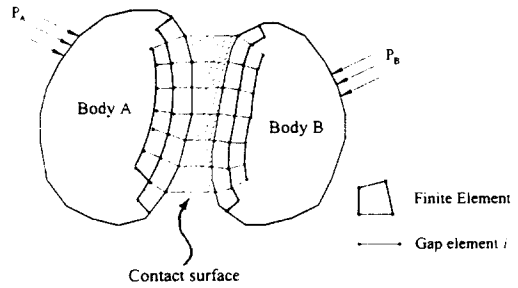


그림 1 접촉면이 포함된 구조시스템

접촉문제의 수렴해를 구하는 반복과정에서 계속 변하는 변수가 된다(그림 2). gap 요소의 축방향 변형을 ε 이 인장축(+)이면 요소의 길이가 증가된 상태(elongated state)임을 의미하며, 이 때는 gap 요소가 두 영역의 변형을 구속해서는 안된다. 즉, gap 요소의 계수 E 를 무시할 수 있을 정도의 작은 값(이상적으로는 영)으로 설정함으로써 전체적인 거동에 영향을 주지 않도록 해야 한다. 반면에 변형율이 압축축(-)이면 요소의 길이가 감소되어 수축된 상태(contract state)임을 나타내고, 변형율의 값이 -1 에 이르게 되면 요소의 길이가 영이 되어 두 영역 사이의 간격이 완전히 사라지게 되므로 접촉된 상태(contact state)임을 나타낸다. 결국 변형율이 -1 보다 작게 되면 한 영역이 다른 영역의 내부로 침범한 형태(overlapped state)가 되어 물리적으로 정의될 수 없는 상태가 되므로, 겹쳐지는 것을 방지하기 위하여 요소의 계수를 무한히 큰 값으로 지정해야 한다.

이러한 gap 요소의 개념은 간단한 접촉문제를 대상으로 흔히 사용되어 왔다. 그러나 기존의 gap 요소는 두 영역이 접촉하거나 겹쳐질 때 요소의 길이를 설정하는데 어려움이 있다(그림 2 (f) 및 (g)). 이러한 경우에는 예를 들어, ADINA(1984)의 트러스 요소에 포함되어 있는 gap 요소를 사용할 수 없다. 더우기 복잡한 접촉문제의 경우에는, 반복해의 수렴 과정에서 극복할 수 없는 진동현상이 발생한다. 몇가지 수치예제의 해석을 통해 반복해의 변화를 고찰한 결과, gap 요소의 상태가 그림 2에 도시한 바와 같이 여러 종류로 구분되는 것이 진동현상의 결정적인 요인으로 판단되었다. 이








Schematic Deformation	State and Description	
	General gap element	Proposed gap element
(a) 	Initial state initial gap distance d_0 initial gap strain $\epsilon_0=0$	Initial state initial gap distance d_0 initial indicator $\mu_0 = \frac{d_0 - \delta}{\delta}$
(b) 	Elongated state $\epsilon > 0$ $d > d_0$	Separated state $\mu > 0$ $d > \delta$
(c) 	Contracted state $-1 < \epsilon \leq 0$ $0 < d \leq d_0$	
(d) 		Contact state $\mu = 0$ $d = \delta$
(e) 	Contact state $\epsilon = -1$ $d = 0$	Overlapped state $\mu < 0$ $d < \delta$
(f) 		
(g) 	Overlapped state $\epsilon < -1$ $d < 0$	

그림 2 일반적인 gap 요소와 제안된 gap 요소의 비교

에 본 논문에서는 gap 요소의 상태를 구분하는 가짓수의 감소에 초점을 두고, 기존 gap 요소의 개념을 보완하여 새로운 형태의 gap요소를 개발하기로 한다.

우선 gap 요소의 실제 길이 대신에 가상 길이 δ 를 도입하는데, 이러한 간격에 의해서 접촉상태가 근사화될 수 있도록 충분히 작은 상수값으로 설정한다(그림 2). 여기서 얼마나 작은 값을 사용할 것인가는, 주어지는 문제의 특성을 고려하여 적절히 결정되어야 할 것이다. gap 요소의 상태는 다음식으로 정의되는 지표 μ 에 따라 결정한다.

$$\mu = \frac{d - \delta}{\delta} \quad (1)$$

결국 제안된 gap 요소는 μ 가 영의 값을 가질 때 접촉된 상태를 나타내고 μ 가 영보다 크면 벌어진 상태(separated state)를 나타내는 것으로 가정한다. 즉, 요소의 가상 길이가 근사적으로 영의 값을

가지게 되므로, 지표가 영보다 작은 경우를 두 영역이 겹쳐진 상태로 정의하는 것이다. 따라서 일반적인 gap 요소에서 정의되는 수축된 상태가 제안된 gap 요소에서는 존재하지 않게 된다(그림 2). 이와같이 gap 요소의 개념을 수정함으로써, 구조물에서 발생하는 접촉문제를 간단하게 구현하고 효율적으로 해를 구할 수 있게 된다.

제안된 gap 요소를 이용해서 접촉문제를 구현하는 기본 개념은 매우 간단하다. 즉, 벌어진 상태에 있는 gap 요소는 계수를 무시할 수 있을 정도의 작은 값으로 설정함으로써 관계되는 영역들의 거동을 구속하지 않도록 하고, 반면에 겹쳐진 상태가 되는 gap 요소는 영역들이 겹쳐지지 않도록 계수를 충분히 큰 값으로 증가시킨다. 이러한 개념에 따라 각 요소의 지표가 영이 되거나 계수가 매우 작은 값이 될 때까지 반복해서 계수를 수정하게 된다.

본 접촉 알고리즘은 해를 구하는 반복과정에서 축방향 응력 σ 가 일정하다는 가정에 기초를 두고 있다. 압축측 gap 요소 i 를 대상으로 하여 stress invariance 개념을 첫번째 및 두번째 반복단계에 적용하면 다음식이 성립된다.

$$\sigma_1^i = E_1^i \mu_1^i = E_2^i \mu_{con} \quad (2)$$

여기서 아랫첨자의 번호는 접촉해석시의 반복단계 횟수를 의미한다. 접촉된 상태를 나타내는 지표 μ_{con} 는 위에서 정의한 개념에 따르면 영의 값을 가져야 하지만, 수치적 처리를 위하여 음의 값을 가지는 접촉 허용오차(contact tolerance) μ_{tol} 로 치환한다. 결국, 본 알고리즘에서는 $\mu_{tol} \leq \mu \leq 0$ 인 경우를 접촉된 상태로 인정하고 이러한 영역을 경계로 하여 gap 요소의 벌어진 상태와 겹쳐진 상태를 구분하게 된다. μ_{tol} 의 절대값은 전반적인 접촉 알고리즘이 효율적으로 구현되도록 충분히 작은 값을 가져야 하는데, 테스트 결과 -0.05 가 적절한 값으로 평가되었다. 결국 (2)식은 다음식으로 변환된다.

$$E_1^i \mu_1^i = E_2^i \mu_{tol} \quad (3)$$

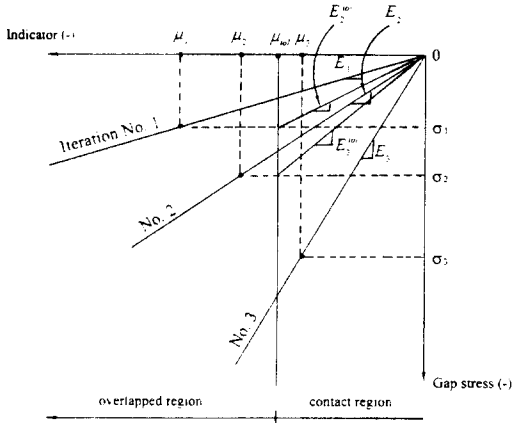


그림 3 압축측 gap 요소의 계수 보정

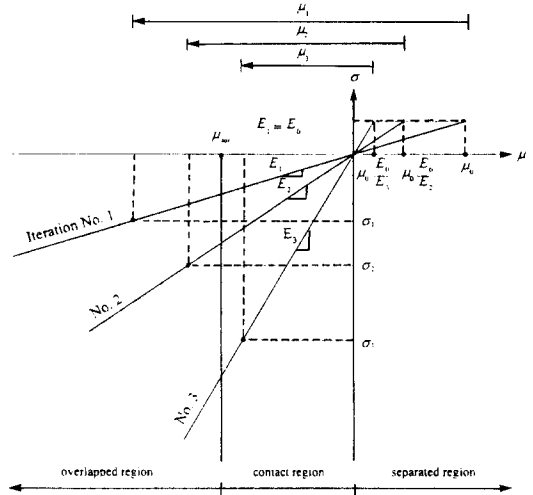


그림 4 누적된 상태에 따른 gap 요소의 계수 보정

이 식에 따라 계산되는 계수 E_2^i 는 그림 3에서 $E_2^{i,ol}$ 로 표시되어 있다.

그런데 하나의 gap 요소의 거동은 다른 gap 요소의 거동과 서로 연관성을 가지므로, 다음 반복 단계의 해석결과는 현단계에서의 예상치와 반드시 일치하지는 않을 것이고, 결국 수렴된 접촉상태를 얻기 위해서는 여러번의 반복단계를 필요로 하게 된다. 본 알고리즘에서는 수렴성을 높이기 위해서, 접촉 허용오차로 보정된 계수보다 약간 큰 값을 사용한다. 결국 k 번의 반복단계를 거친 후에 $(k+1)$ 번째 반복단계에서 사용하게 될 gap 요소의 계수는 다음 식으로 표현되며, 두번째 및 세번째 반복단계에 대하여 그림 3에 E_2 및 E_3 로 표시되어 있다.

$$E_{k+1}^i = E_k^i \frac{\mu_k^i}{\mu_{tol}^i} (1+\alpha) \quad (4)$$

여기서 α 는 수렴성을 안정화시키기 위한 가속기 역할을 하는데, 테스트 결과 0.1이 적절한 값으로 평가되었다.

현단계까지 누적된 gap 요소의 상태는 초기 지표 μ_0 와 계수 E_0 를 이용하여 파악할 수 있다. 그림 4는 초기에는 떨어져 있던 gap 요소가 하중이 작용함에 따라 접촉 상태로 바뀌는 경우의, 계수의

변화를 도시한 것이다. 결국 k 번째 반복 단계에서 gap 요소 i 의 누적 지표는 다음과 같고,

$$\mu_k^{i,acc} = \mu_k^i + \mu_0^i \frac{E_0^i}{E_k^i} \quad (5)$$

겹쳐진 gap 요소의 계수는 다음과 같이 수정된다.

$$E_{k+1}^i = \frac{E_0^i \mu_0^i + E_k^i \mu_k^i}{\mu_{tol}^i} (1+\alpha) \quad (6)$$

한편, 인장측 gap 요소의 계수는 감소 비율 β 를 도입하여 미리 설정한 감소 절차에 따라 최소값에 도달할 때까지 감소시킨다.

$$E_{k+1}^i = \beta E_k^i \quad (6)$$

계수의 최소값은 대상 구조물을 구성하는 재료의 특성을 고려하여 적절히 결정해야 한다.

예를 들어 탄성계수가 29,000 ksi인 철골재료로 구성되는 구조물의 경우, 최소값을 1 ksi로 설정하면 관련 영역들의 변형률 거의 구속하지 않는 것으로 나타났다. 인장측 gap 요소의 계수 감소비율은 접촉문제의 수렴성과 밀접한 관련이 있으므로,

지나치게 급격한 값의 변화를 주어서는 안된다. 계수를 어느 정도 감소시키는 것이 적절한 것인가 하는 문제는 해석 대상의 형상이나 하중 상태 및 크기에 따라 달라지게 된다. 테스트 결과, 대상문제가 비교적 단순한 경우에는 0.1의 감소 비율로도(또는 아주 간단한 경우에는 바로 최소값으로 감소시켜도) 수렴해를 얻을 수 있지만, 일반적인 경우 0.25의 감소비율이 적합한 것으로 나타났다.

이와같이 반복해를 구하는 경우, 현 반복단계에서 이루어지는 인장축 요소의 계수 감소가 다음 단계에서 압축축 요소의 기동에 미치게 될 영향을 고려할 수 없는 문제점이 있다. 이것은 해가 수렴하지 않고 진동하게 되는 결정적인 요인이 될 수 있다. 이러한 결점을 제거하기 위하여, 매 반복단

계마다 인장축 gap 요소가 모두 수렴조건을 만족할 때까지 압축축 요소의 계수를 보정하지 않음으로써, 해의 안정성을 보장할 수 있었다.

이러한 알고리즘에 의해서도, 복잡한 접촉문제의 경우에는 해의 진동을 피할 수 없었다. 이러한 진동 현상은 인장축 계수를 감소시킬 때 고정된 감소비율($\beta=0.25$)을 사용하고, 압축축 계수를 증가시킬 때 고정된 가속기($\alpha=0.1$)를 사용함으로써 발생하는 문제이다. 결국 해의 진동이 확인되면(즉, 인장축 gap 요소의 수렴조건이 모두 만족되는 단계별로, 겹쳐진 gap 요소의 총갯수가 이전에 비해 감소하지 않으면) 감소비율을 증가시켜 인장축 gap 요소의 계수를 완만하게 변화시킴으로써(예를 들어, $0.25 \rightarrow 0.9 \rightarrow 0.95 \rightarrow 0.99$), 최종적인

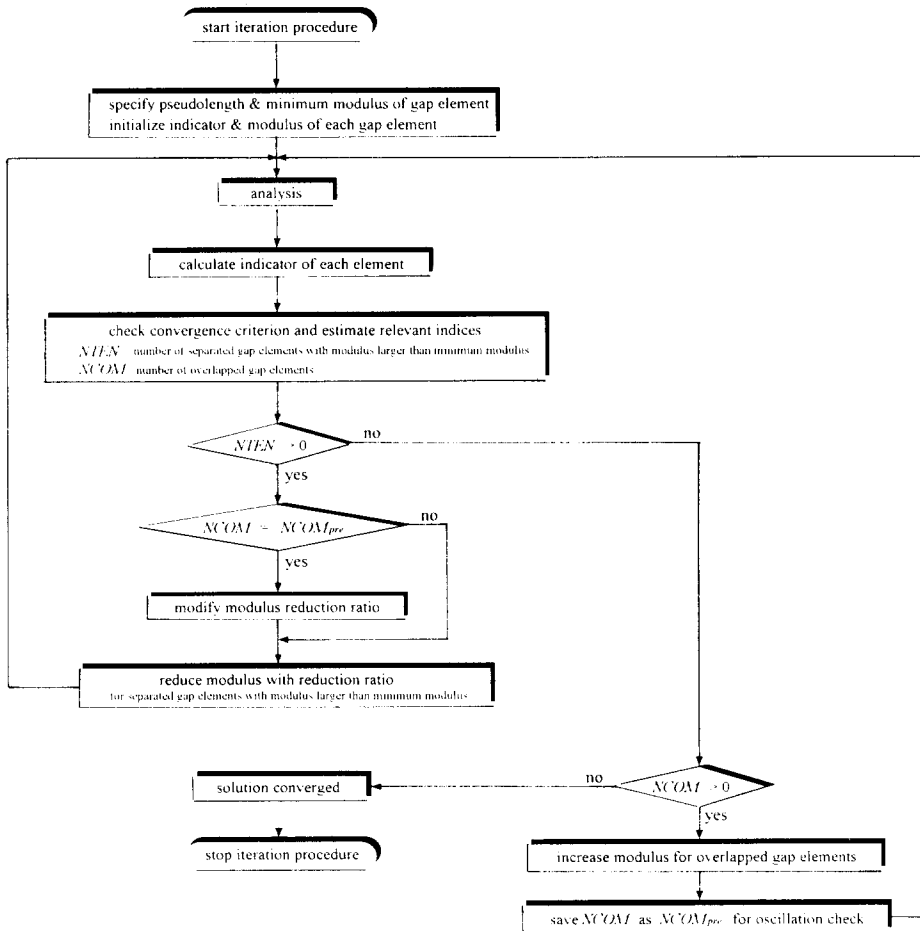


그림 5
gap 요소를 이용한
접촉 알고리즘의 개념도

진동현상을 방지할 수 있었다.

인장측 gap 요소의 계수가 모두 최소값을 가지고 압축측 gap 요소의 지표가 모두 접촉허용오차 μ_{tol} 보다 크거나 같으면, 해가 수렴된 것으로 판단하였다. 제안된 접촉 알고리즘은 비선형분해와 같은 증분하중해석(incremental load analysis)의 경우에도 쉽게 적용될 수 있다. 즉, 이전 하중단계에서 수렴된 지표 μ_{final} 와 계수 E_{final} 를 현 하중단계에서는 초기 지표 μ_0 와 계수 E_0 로 설정함으로써, 제안된 접촉 알고리즘을 이용한 증분해석이 가능해진다. 그림 5는 gap 요소를 이용한 접촉 알고리즘의 개략적인 흐름도를 나타내며, 그림 6은 접촉 알고리즘을 포함한 삼차원 탄소성 해석을 위하여 본 논문에서 개발된 구조해석 프로그램 CAFE (elasto-plastic three-dimensional Contact Anal-

ysis program with Finite Elements)의 전체적인 개념도를 도시하고 있다.

3. 수치 예제

본 절에서는 수치 예제의 해석을 통하여, 개발된 gap 요소를 이용한 접촉 알고리즘의 효율성 및 정확도를 검증한다. 수치 예제의 종류는 총 세 가지로서, 탄성 단순보와 두 캔틸레버보의 접촉 문제 및 탄성 편치하의 탄소성 기초로 구성된다. 각 예제의 유한요소 모델링에서는 효율적이고 경제적인 해석을 위해 개발된, 변절점과 비직함변위형을 포함하는 탄소성 입체요소(정기택 1995, Choi와 Chung 1995)를 이용한다. 탄성계수는 29,000 ksi를 사용하고, 포아송비는 0.3으로 통일한다. 각 탄소성 재료의 유효 응력-변형률 관계는 완전 탄소성으로 가정하고, 항복응력 σ_y 는 36 ksi를 사용한다.

3.1 탄성 단순보

본 예제는 중간점에서 집중하중을 받는 단순보로서, 개발된 gap 요소의 정확도를 탄성범위내에서 평가하는 것이 목적이다(그림 7). 대칭성을 고려하여 전체 보의 1/4만 모델링하여 해석한다. 유

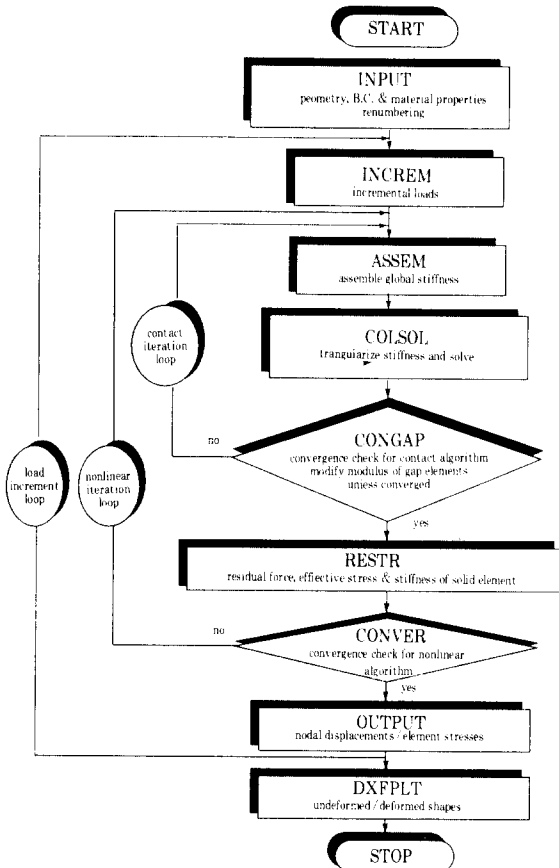


그림 6 구조해석 프로그램 CAFE의 개념도

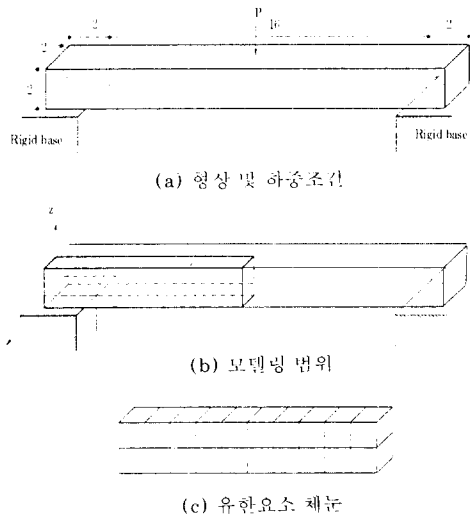


그림 7 탄성 단순보

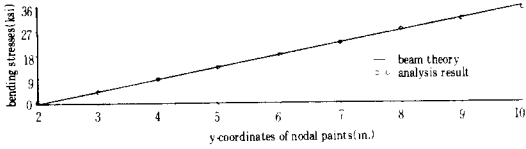
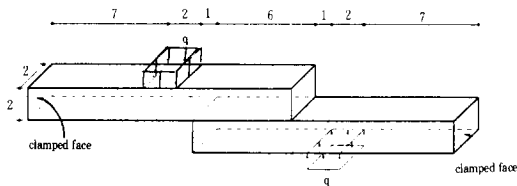


그림 8 대칭면 하부절점에서의 휨응력 분포

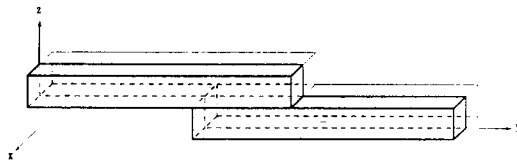
한요소 모델은 20개의 삼차원 요소와 6개의 gap 요소로 구성된다. 집중하중을 12 kips만큼 가했을 때의 중심점에서의 수직 변위는 0.02767 in.로서, Euler 보이론에 의한 값(0.02648 in.)보다 약간 큰 값을 나타낸다. 그림 8은 대칭면 하부 절점($x=0$ 및 $z=0$)에서의 휨응력 σ_{yy} 의 분포를 도시하고 있다. Superconvergent Patch Recovery(정기택 1995)를 이용해서 가우스 적분점에서의 응력들을 절점값으로 평활화시켰다. 해석결과로 얻어진 절점에서의 응력 분포는 보이론에 의한 기준값과 잘 일치하고 있다.

3.2 두 캔틸레버 보의 접촉문제

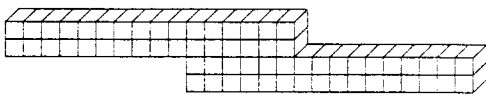
본 예제는 대칭 하중을 받는 두 캔틸레버 보사이의 접촉문제로서, 각 보의 소성화현상을 고찰하고 그 결과를 비선형 구조해석 패키지인 ADINA



(a) 형상 및 하중 조건



(b) 모델링 범위



(c) 유한요소 체분

그림 9 두 캔틸레버 보의 접촉문제

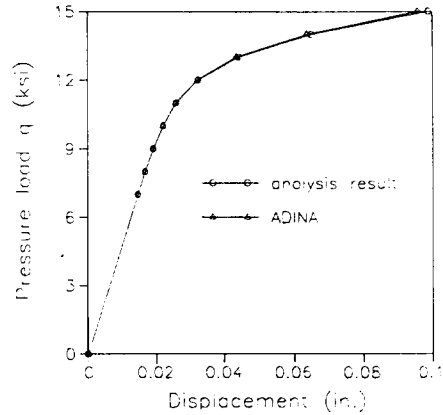


그림 10 하중영역 중심에서의 하중-변위 관계

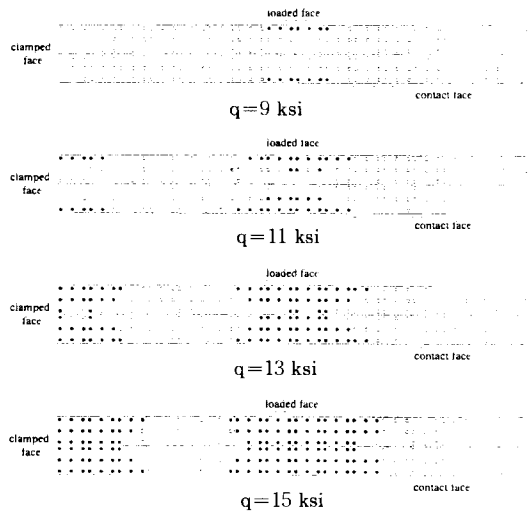
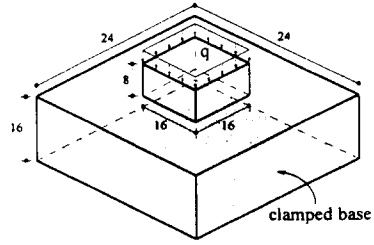


그림 11 상부보의 항복상태 변화

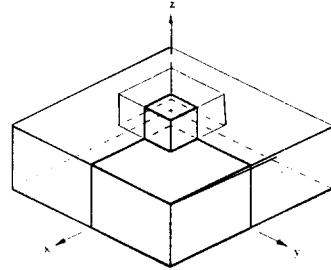
(1984)에 의한 결과와 비교함으로써 개발된 접촉 알고리즘의 정확도를 평가하는 것이 목적이다(그림 9). 대칭성을 고려해서 전체 문제의 반만 모델링하여 해석한다. 유한요소 모델은 64개의 삼차원 요소와 14개의 gap 요소로 구성된다. ADINA와 동일한 조건으로 해석하기 위하여, 본 예제에서 사용되는 삼차원 요소는 비적합 변위형을 포함하지 않는다.

그림 10은 하중영역 중심에서의 수직 변위의 변화를 도시하고 있다. 해석 결과로 얻어진 하중-변위 관계는 ADINA에 의한 결과와 잘 일치한다.

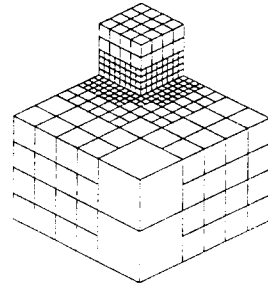
그림 11은 대칭면에 가까운 가우스 적분점($x=0.1127 \text{ in.}$)에서의 항복상태의 변화를 나타 내는데, 대칭성을 고려하여 상부의 보에 대해서만 도시하였다. 그림에서 흑색점은 항복된 가우스 적분점을 의미하고, 백색점은 탄성상태의 가우스 적분점을 의미한다. 보의 소성화는 하중이 가해지는 영역에서 제일 먼저 시작되고 다음으로 구속된 지지점에서 발생한 후, 두 위치를 중심으로 퍼져나간다. 이러한 현상은 ADINA에 의한 결과와 동일한 결과를 나타낸다.



(a) 형상 및 하중 조건



(b) 모델링 범위



(c) 유한요소 체논

그림 12 탄성편치하의 탄소성 기초

3.3 탄성 편치하의 탄소성 기초

본 예제는 하부가 고정된 탄소성 기초가 탄성 편치의 작용을 받는 문제로서, 기초에서의 소성화 현상을 고찰하는 것이 목적이다 (그림 12). 유한 요소 해석에서 접촉현상의 구현에 대한 정확도는 체논의 세분화 정도에 좌우된다. 이러한 사실은 기하학적 형상이나 하중 조건 등의 급격한 변화로 인하여 국부적으로 심한 응력 경사가 발생하는 삼차원 구조물에서 더욱 강조된다. 구조물의 세분화된 부분에서 증가되는 유연성은 접촉 영역의 변이 경계에서의 응력 분포에 영향을 주게 된다. 본 예제에서는 접촉면의 가장자리 변에서 심한 응력 경사가 발생하므로, 효율적이고 경제적인 유한요소 해석을 위해서는 변을 따라 국부적으로 세분화된 체논을 구성하는 것이 필요하다. 대칭성을 고려해서 전체 문제의 1/4만 모델링하여 해석하며, 유한 요소 모델은 649개의 삼차원 요소와 57개의 gap 요소로 구성된다.

그림 13은 편치의 상면 중심부에서의 수직 변위의 변화를 나타내는데, 분포 하중이 108ksi에 도달하면서 힘-변위 강성이 급격하게 저하되는 것을 관찰할 수 있다. 그림 14는 기초의 상부 표면 ($z=16 \text{ in.}$)에 위치한 각 절점에서의 유효응력 분포를 도시하고 있다. 전반부의 하중단계($q=54 \text{ ksi}$)에서 접촉면의 가장자리 변을 따라 응력이 집중되는 것을 관찰할 수 있다.

하중의 증가에 따라 편치와 접촉하는 부분이 완전히 소성화된 후, 소성 영역은 접촉면의 모서리 점으로부터 확장되어 나간다.

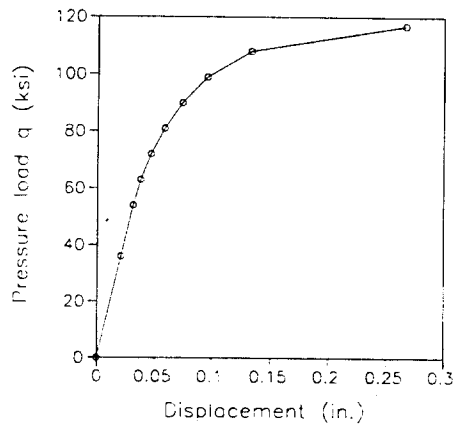


그림 13 편치 중심에서의 하중-변위 관계

4. 결 론

본 논문에서는 기존의 gap 요소의 단점을 보완하여 간단하면서도 효율적인 접촉 알고리즘을 개발하였다. 다양한 수치 예제를 통하여, 제안된 접촉 알고리즘의 효율성 및 정확도를 검증하였다. 새로운 gap 요소는 일반적인 유한요소와 결합되어, 마찰이 포함되지 않은 삼차원 탄소성 접촉 문제의 해를 구하는데 이용될 수 있다. 개발된 접촉 알고리즘은 최적화기법을 도입하지 않고 시행착오 기법에 기반을 두면서도 접촉문제에 대한 반복해의 수렴성 및 안정성을 보장한다. 또한 gap 요소를 이용한 접촉 알고리즘은 코드화가 용이하므로, 기존의 복잡한 알고리즘에 대한 좋은 대안이 될 것이다.

참 고 문 헌

1. ADINA-A Finite Element Program for Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis, Report AE 84-1, ADINA Engineering(1984).
2. Arya, S. K. and Hegemier, G. A., "Finite Element Method for Interface Problems", *J. Struc. Div., ASCE*, Vol. 108, No. ST2, pp. 327-342(1982).
3. Bai, Xinli and Zhao, Xinghua, "Analysis of Large Deformation Elastoplastic Contact through Finite Gap Elements", *Comp. & Struc.*, Vol. 30, No. 4, pp. 975-978 (1988).
4. Baniotopoulos, C. C., "On the Numerical Assessment of the Separation Zones in Semirigid Column Base Plate Connections", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 2, No. 3, pp.295-309, 1994.
5. Beer, G., "An Isoparametric Joint/Interface Element for Finite Element Analysis", *Int. J. for Num.Meth. in Eng.*, Vol. 21, pp. 585-600 (1985).
6. Chaudhary, A. B. and Bathe, K. J., "A Solution Method for Static and Dynamic Analysis of Three-Dimensional Contact Problems with Friction", *Comp. & Struc.*, Vol. 24, No. 6, pp. 855-873(1986).

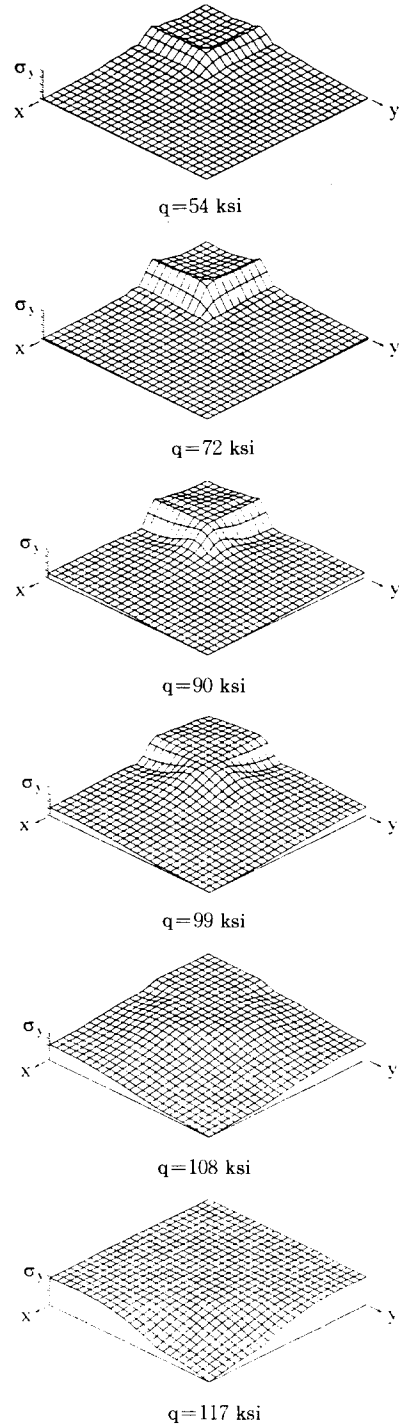


그림 14 기초 상부표면에서의 유효응력 분포 변화

7. Choi, Chang-Koon and Chung, Gi-Taek, "Elasto-Plastic Nonconforming Solid Element with Variable Nodes", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 3, No. 4, pp. 325-340(1995).
8. Goodman, R. E., Taylor, R. L. and Brekke, T. L., "A Model for the Mechanics of Jointed Rock", *J. Soil Mech. Found. Div., ASCE*, Vol. 94, pp. 637-659(1968).
9. Heuze, F. E. and Barbour, T. G., "New Models for Rock Joints and Interfaces", *J. Geotech. Eng. Div., ASCE*, Vol. 108, pp. 757-776(1982).
10. Heuze, F. E., Goodman, R. E. and Bornstein, A., "Numerical Analyses of Deformability Tests in Jointed Rock - 'Joint Perturbation' and 'No Tension' Finite Element Solutions", *Rock Mech.*, Vol. 3, pp. 13-24(1971).
11. Hughes, T. J. R., Taylor, R. L., Sackman, J. L., Curnier, A. and Kanokhukulchai, W., "A Finite Element Method for a Class of Contact-Impact Problems", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 8, pp. 249-276(1976).
12. Oden, J. T. and Kikuchi, N., "Finite Element Methods for Constrained Problems in Elasticity", *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. 18, pp. 701-725, 1982.
13. Papadopoulos, P. and Taylor, R. L., "A Mixed Formulation for the Finite Element Solution of Contact Problems", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 94, pp. 373-389(1992).
14. Schafer, H., "A Contribution to the Solution of Contact Problems with the aid of Bond Elements", *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, Vol. 6, pp. 335-354(1975).
15. Simons, J. W. and Bergan, P. G., "A Finite Element Formulation of Three-Dimensional Contact Problems with Slip and Friction", *Computational Mechanics*, Vol. 1, pp. 153-164(1986).
16. Stadter, J. T. and Weiss, R. O., "Analysis of Contact through Finite Element Gaps", *Comp. & Struc.*, Vol. 10, No. 6, pp. 867-873(1979).
17. Torstenfelt, B., "Contact Problems with Friction in General Purpose Finite Element Computer Programs", *Comp. & Struc.*, Vol. 16, No. 1-4, pp. 487-493(1983).
18. Wilson, E. A. and Parsons, B., "Finite Element Analysis of Elastic Contact Problems Using Differential Displacements", *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. 2, pp. 387-395(1970).
19. 정기택, "볼트 집합부의 비선형 해석을 위한 수치 해석 방법에 관한 연구", 한국과학기술원 박사학위논문, 1995.8. 