

# 단일방향 복합재료의 공유면에 존재하는 계면 모서리균열의 점탄성 해석

## Viscoelastic Analysis of Stress Intensity Factor for Interface Edge Crack in a Unidirectional Laminate

이 상 순\*      김 범 식\*\*  
Lee, Sang-Soon      Kim, Beom-Shig

### 요 약

탄성 섬유와 점탄성 기지로 구성된 2차원의 단일방향 복합재료에서 발생하는 계면 응력 특이성을 시간영역 경계요소법을 사용하여 조사하였다. 먼저, 아무런 균열 없이 섬유와 기지가 완전하게 결합되어 있는 단일방향 복합재료에 횡방향 인장변형이 작용할때 자유경계면 부근에 나타나는 계면 특이응력들을 조사하였다. 그러한 응력들은 섬유와 기지의 결합분리나 계면 모서리 균열을 야기 시킬 수 있다. 다음에, 여러가지 크기의 모서리 균열들에 대한 응력확대계수가 계산되었다.

### Abstract

Interfacial stress singularity in a unidirectional two-dimensional laminate model consisting of an elastic fiber and a viscoelastic matrix has been investigated using the time-domain boundary element method. First, the interfacial singular stresses between the fiber and the matrix of a unidirectional laminate subjected to a uniform transverse tensile strain have been investigated near the free surface, but without any defect or any edge crack. Such a stress singularity might lead to fiber-matrix debonding or interfacial edge cracks. Then, the overall stress intensity factor for the case of a small interfacial edge crack of length  $a$  has been computed.

Keywords : boundary element method, viscoelastic analysis, interface crack, stress intensity factor, unidirectional laminate

### 1. 서 론

일반적으로 공학 구조물에 복합재료(composite materials)가 사용될때는 단일방향 복합재료(unidirectional composite materials)가 아닌 다

방향 복합재료(multidirectional composite materials)가 주로 사용되고 있지만, 그러한 다방향 복합재료의 내부에서 발생하는 복잡한 응력분포를 해석하고 구조물의 안정성 여부를 판단하기 위해서는 단일방향 복합재료의 거동을 정확히 이해

\* 정회원, 한국원자력연구소, 원자로그계분야, 선임연구원  
\*\* 한국원자력연구소, 원자로그계분야, 책임연구원

• 이 논문에 대한 토론을 1997년 6월 30일까지 본학회에 보내주시면 1997년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

할 필요성이 요구되고 있다. 섬유가 보강된 단일방향 복합재료(fiber-reinforced unidirectional composite materials)는 횡방향 인장력에 대해 매우 취약한 특성을 나타내기 때문에, 횡방향 인장 상태에 있는 단일방향 복합재료에 대한 문제는 오래전 부터 많은 관심을 받아왔다. Muskhelishvili<sup>1</sup>는 한개의 섬유(fiber)만을 지닌 무한평판에 횡방향 인장력이 작용하는 문제를 해석하였다. Adams와 Doner<sup>2</sup>, Adams<sup>3</sup>, 그리고 Gotsis 등<sup>4</sup>은 많은 수의 섬유들이 보강된 단일방향 복합재료에 횡방향 인장력이 작용하는 문제를 해석하였다. 그러나 이러한 해석의 결과들은 복합재료의 중간부분에 대해서만 유효할 뿐이고 보다 복잡한 응력분포를 갖는 자유경계면(free surface)부근에 대해서는 적용되지 못하는 단점을 지니고 있다.

서로 다른 2가지 재료들이 완전하게 결합된 탄성 4분 평면들(elastic quarter planes)의 공유경계면의 모서리에는 응력 특이성이 존재하고, 그러한 응력들은 부분항복이나 균열을 야기시킨다는 사실은 잘 알려져 있다<sup>5</sup>. 단일방향 복합재료의 경우도 횡방향의 인장력을 받게되면 섬유(fiber)와 기지(matrix)의 경계면에 복잡한 응력상태가 나타날 수 있고, 이러한 응력들은 자유경계면 근처에서 매우 커질 수 있다. 자유경계면 근처에서 발생한 특이 응력들은 섬유와 기지사이의 결합분리나 모서리 균열을 야기시킬 수 있다<sup>6</sup>. 그러므로 단일방향 복합재료의 안정성을 예측하기 위해서는 자유경계면에서의 역학적인 거동을 자세히 조사할 필요성이 발생한다.

현재 복합재료의 기지로는 에폭시나 폴리에스터와 같은 고분자재료가 널리 사용되고 있다. 그러한 복합재료가 여러가지 환경조건, 즉 상온 보다 높은 온도상태나 수분이 많은 조건하에서 공학 구조체에 사용되었을때를 가정해 보면 탄성-점탄성 복합재료의 해석이 매우 중요하다고 볼 수 있다. 즉, 상온상태에서 기지는 하중이 작용하는 기간 동안 초기의 탄성거동상태를 유지하지만, 온도가 높아지거나, 수분이 많아질때는 이상 탄성상태를 유지하지 못한다. 그와같은 조건에서는 기지의 거동은 탄성상태에서 벗어나 점탄성거동으로

바뀌게 된다. 최근 Lee<sup>7</sup>)는 탄성 섬유와 점탄성 기지로 구성된 단일방향 복합재료의 자유경계면에서 나타나는 응력 특이성의 거동을 멜린변형(Mellin transform)과 라플라스변형(Laplace transform)을 사용하여 계산하였는데, 그러한 응력 특이성은 시간의 함수로 나타남을 보여주었다.

본 논문에서는, 먼저 아무런 균열 없이 탄성 섬유와 점탄성 기지가 완전하게 결합되어 있는 단일방향 복합재료에 횡방향 인장변형이 작용할때 자유경계면 부근에 나타나는 계면 특이응력들을 시간영역 경계요소법<sup>8</sup>)을 사용하여 조사하였다. 다음에, 탄성 섬유와 점탄성 기지의 경계면에 발생한 모서리 균열들에 대한 응력확대계수를 계산하였다. Lee와 Kim<sup>9</sup>)에 의하면, 재료의 거동이 점탄성일 경우에 해당하는 파괴인자(fracture parameter)는 균열의 크기가 일정하게 유지되어도 시간에 따라 변하게된다. 본 연구의 주요관심은 탄성섬유와 점탄성 기지사이의 모서리 균열이 존재하는 경우에 파괴인자가 시간에 따라 변하는 거동을 예측하는데 있다.

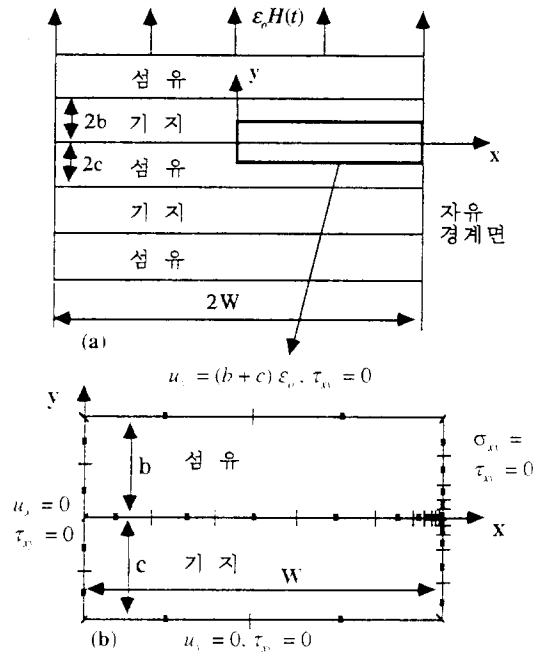


그림 1 단일방향 복합재료의 계면응력 해석모델

2. 공유면 모서리 부근에서의 특이 응력들

2.1 경계요소 공식

그림 1-(a)는 무한하게 섬유와 기지가 번갈아가며 적층된 이차원의 단일방향 복합재료에 횡방향 인장 변형률  $\epsilon_0 H(t)$ 가 작용하는 것을 나타내고 있으며, 그림 1-(b)는 섬유와 기지의 경계면 모서리 부근에서 발생하는 계면 응력들을 조사하기 위한 해석모델을 나타낸다.  $H(t)$ 는 Heaviside unit step 함수를 나타낸다. 여기에서 복합재료는 2차원 평면 변형률 상태에 있다고 가정한다. 이 장에서, 섬유는 탄성거동을 한다고 가정하고, 기지는 점탄성 거동을 한다고 가정한다. 섬유와 기지의 부피비율은 똑같다고 가정하였고, 섬유와 기지 사이에는 아무런 결함이나 균열이 없이 완전하게 결합되어 있다고 가정하였다.

어떠한 체력(body forces)도 존재하지 않는다는 가정아래, 해석모델에 대한 경계적분 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

섬유영역에 대해서,

$$d_{ij}(\mathbf{y})u_j^i(\mathbf{y},t) + \int_S u_j^i(\mathbf{y}',t)T_{ij}^m(\mathbf{y},\mathbf{y}')dS^m(\mathbf{y}') = \int_S t_j^i(\mathbf{y}',t)U_{ij}^m(\mathbf{y},\mathbf{y}')dS^m(\mathbf{y}') \quad (1)$$

이고,

기지 영역에 대해서,

$$c_{ij}^m(\mathbf{y})u_j^m(\mathbf{y},t) + \int_{S^m} \left[ u_j^m(\mathbf{y}',t)T_{ij}^m(\mathbf{y},\mathbf{y}';0+) + \int_{0+}^t u_j^m(\mathbf{y}',t-t') \frac{\partial T_{ij}^m(\mathbf{y},\mathbf{y}';t')}{\partial t'} dt' \right] dS^m(\mathbf{y}') = \int_{S^m} \left[ t_j^m(\mathbf{y}',t)U_{ij}^m(\mathbf{y},\mathbf{y}';0+) + \int_{0+}^t t_j^m(\mathbf{y}',t-t') \frac{\partial T_{ij}^m(\mathbf{y},\mathbf{y}';t')}{\partial t'} dt' \right] dS^m(\mathbf{y}') \quad (2)$$

이다. 식(1)과 (2)에서 윗 첨자 'm' 과 'f'는 각각 기지와 섬유를 가리키고,  $u_i$ 와  $t_i$ 는 각각 경계면에서의 변위와 표면력(traction) 을 나타내며,  $S$ 는 주어진 문제의 경계면을 가리킨다.  $c_{ij}(\mathbf{y})$ 는 경계

면의 기하학적 형상에만 의존하는 함수이다.  $U_{ij}$ 와  $T_{ij}$ 들은 기본해들이다.

일반적으로, 식(1)과 (2)에 대한 정밀해를 구하는 것은 불가능하기 때문에 수치적분이 사용되어야 한다. 이 논문에서는 변위와 표면력, 그리고 기하학적 형상을 나타내기 위해서 이차 형상함수(quadratic shape functions)를 사용하였다. 자세한 계산과정은 참고 문헌[8]에 설명되어 있다. 참고문헌[8]에 설명된 절차에 따라 식(1)과 (2)를 정리하고, 두 영역의 공유면에서 변위의 연속조건과 표면력의 평형조건을 적용하면, 다음과 같은 행렬 방정식이 얻어진다. 즉,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{H}^2 & \mathbf{0} & \mathbf{G}^{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}^{21} & \mathbf{H}^2 & -\mathbf{G}^{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{t}^1 \\ \mathbf{t}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}^1 \\ \mathbf{t}^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

이다. 식(3)에서, 윗 첨자 '1' 과 '2' 는 각각 점탄성 기지영역과 탄성 섬유영역을 가리키고, '12' 와 '21' 는 두 영역의 공유면을 나타내며,  $\mathbf{H}$ 와  $\mathbf{G}$ 는 각각의 영역에서의 영향행렬들을 나타낸다.  $\mathbf{R}$ 는 점탄성 이력때문에 발생하는 항이다. 외부 경계조건을 식(3)에 적용하여 풀면 해석모델에 대한 응력과 변위를 구하게 된다.

2.2 수치해석 결과

이 수치해석에서는, 점탄성체의 모델로써 체적계수(bulk modulus)는 탄성거동을, 전단계수는 표준 선형고체(standard linear solid) 거동을 한다고 가정하였다. 즉,

$$k^m(t) = k_0$$

$$\mu^m(t) = g_0 + g_1 \exp(-\frac{t}{t^*}) \quad (4)$$

식(4)에서 윗 첨자 'm'는 점탄성 기지를 가리킨다.  $k$ 와  $\mu$ 는 각각 체적계수와 전단이완계수를 나타내고,  $t^*$ 는 이완시간을 가리킨다.  $k_0, g_0$ , 그리고  $g_1$  들은 모두 양수들이다. 수치해석에서 사용한 물성 값들은 다음과 같다.

$$\frac{\mu^m(\infty)}{k_0} = 0.1, \frac{\mu^m(0)}{k_0} = 0.5 \quad (5)$$

$$\frac{\mu^f}{k_0} = 50, \frac{k^f}{k_0} = 79.5$$

$$t^* = 2$$

식(5)에서 윗 첨자 'f'는 탄성 섬유를 가리키고,  $\mu$ 와  $k$ 는 각각 전단계수와 체적계수를 나타낸다.

섬유와 기지의 경계면을 따라 발생하는 응력들의 특성을 조사하기 위해서 경계요소해석으로 얻어진 결과들을 그림으로 나타내었다. 그림 2는 공유면에서의 수직응력  $\sigma_{yy}$ 와 전단응력  $\tau_{xy}$ 의 변화를 시간  $t/t^*=0$ 과 20에 대해서 보여주고 있다. 계면 응력들은 모재의 점탄성적인 특성때문에 시간에 따라 이완되고, 그러한 응력들은 자유경계면 가까이 이르러 급속히 커지고 있다. 이러한 특이 응력들은 섬유나 기지의 두께에 비해 비교적 작은 범위에 걸쳐서 나타나는 국소적인 현상이긴 하지만, 자유경계면 가까이에서 계면 균열을 야기시킬 수 있다.

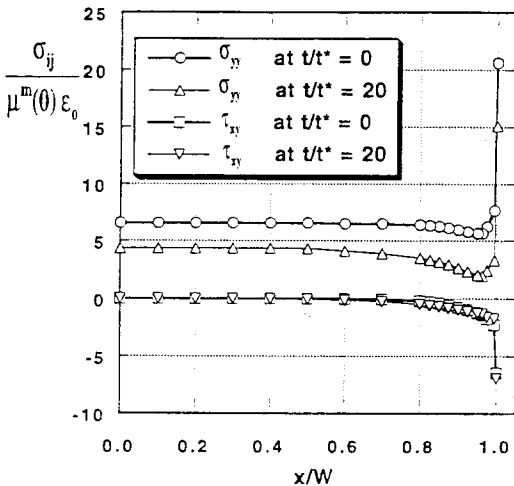


그림 2  $t/t^*=0$ 과 20에서의 계면응력들의 변화

### 3. 계면 균열에 대한 응력확대계수

#### 3.1 응력확대계수에 대한 식

그림 3은 탄성-점탄성 복합재료의 계면균열을

보여주고 있다. 탄성-점탄성 복합재료의 계면균열 선단 부근에서의 응력분포는 탄성-점탄성 대응원리를 이용하여, 탄성-탄성 복합재료의 계면균열에 대한 표현식으로 부터 구할 수 있다. 라플라스 변환공간에서  $\theta=0$ 인 조건에서의 응력은 다음과 같이 표현될 수 있다<sup>10)</sup>:

$$[\bar{\sigma}_{yy}(r,\theta;s) + i \bar{\tau}_{xy}(r,\theta;s)]_{\theta=0} = \frac{K_1(s) + i K_2(s)}{\sqrt{2\pi r}} \exp\left\{i \bar{\beta}(s) \ln\left(\frac{r}{d}\right)\right\} \quad (6)$$

식 (6)에서  $r$ 는 균열 선단으로부터의 거리를 나타내고,  $d$ 는  $r$ 을 정규화시키는 임의의 길이이다.  $i$ 는  $\sqrt{-1}$ 이고,

$$\bar{\beta}(s) = \frac{1}{2\pi} \ln [\bar{\gamma}(s)]$$

$$\bar{\gamma}(s) = \left[ \frac{\kappa_{\perp}(s)\mu_{\parallel} + s\mu_{\perp}(s)}{\kappa_{\parallel}s\mu_{\perp}(s) + \mu_{\parallel}} \right] \quad (7)$$

$$\bar{\kappa}_{\perp}(s) = 3 - 4 s \bar{v}_{\perp}(s) \quad (\text{평면 변형})$$

$$= \frac{3 - s v_{\perp}(s)}{1 + s v_{\perp}(s)} \quad (\text{평면 응력})$$

$$\kappa_{\parallel} = 3 - 4 v_{\parallel} \quad (\text{평면 변형})$$

$$= \frac{3 - v_{\parallel}}{1 + v_{\parallel}} \quad (\text{평면 응력})$$

이다. 윗 식에서  $\bar{\sigma}_{yy}(s)$ 와  $\bar{\tau}_{xy}(s)$ 는 라플라스 변형된 점탄성 응력들을 가리키고,  $\bar{K}_1(s)$ 와  $\bar{K}_2(s)$ 는 라플라스 변형된 응력확대계수들을 나타내며,  $s$ 는 변형변수이다.  $\bar{\mu}_{\perp}(s)$ 와  $\bar{v}_{\perp}(s)$ 는  $\mu_{\perp}(t)$ 와  $v_{\perp}(t)$ 의 라플라스 변형을 나타낸다. 아래 첨자들은 각각의 영역을 나타낸다.

응력확대계수의 크기는 다음과 같이 표현된다<sup>10)</sup>.

$$K_0(t) = \sqrt{2\pi L} \sqrt{[t_1^A(t)]^2 + [t_2^A(t)]^2} \quad (8)$$

식 (8)에서  $t_1^A$ 는 경계요소법에 의해 계산된 균열 선단에서의 표면력을 나타내고,  $L$ 은 균열 선단에

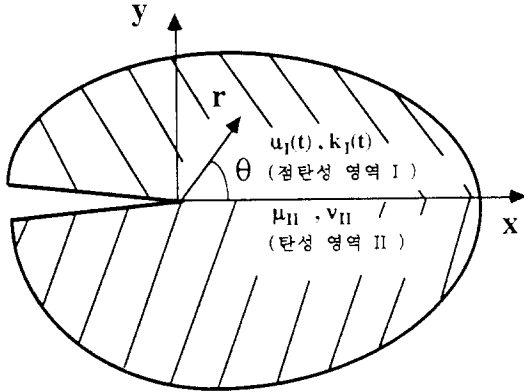


그림 3 계면균열 선단부근

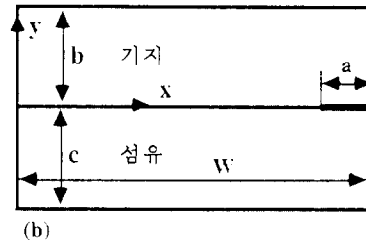
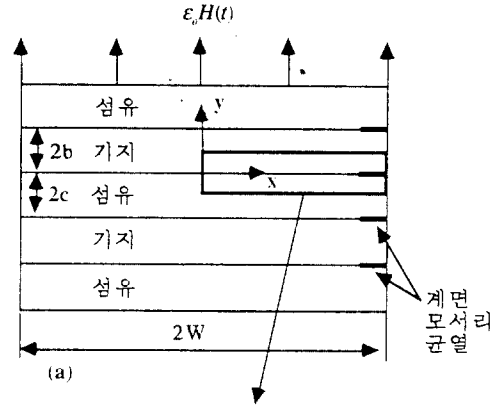


그림 4 모서리 균열을 갖는 단일방향 복합재료

있는 경계요소의 길이를 가리킨다. 응력확대계수의 크기는 식(8)을 이용하여, 균열 선단 부근에서의 응력들로 부터 직접 계산할 수 있다. 균열 선단 부근의 거동을 정확히 나타내기 위해서는 특수 경계요소가 사용되어야 한다. 이 논문에서는, 균열 선단에서의 변위를 나타내기 위해서 사분점 경계요소를 사용하였고, 균열 선단의 응력을 나타내기 위해서 표면력 특이 사분점 경계요소(traction singular quarter-point element)를 사용하였다. 이러한 경계요소에 대한 수치해석 결과들은 참고 문헌[10]에 나타나 있다.

3.2 수치해석 결과

탄성 섬유와 점탄성 기지의 경계면에 발생한 모서리 균열들에 대한 응력확대계수를 계산하였다. 그림 4-(a)는 무한하게 적층된 단일방향 복합재료에 횡 방향 인장변형률  $\epsilon_s H(t)$ 가 작용하는 것을 나타내고 있으며, 그림 4-(b)는 해석모델을 보여주고 있다. 해석모델은 섬유와 기지의 경계면에 따라 길이가  $a$ 인 모서리 균열을 포함하고 있다. 이 연구에서는  $c=b$ 와  $(W-a) > 9c$ 의 조건이 사용되었고, 균열길이  $a/c=1.0, 0.5, 0.06$ , 그리고  $0.03$ 에 대해서 38개의 경계요소가 사용되었다. 기술상의 흥미와 중요성때문에 현재 많이 사용되고 있는 graphite/epoxy 복합재료가 선택되었는데, 기지의 물성값들은 다음과 같이 선택되었다<sup>11)</sup>:

$$k^m(t) = k_0 = 3.556 \times 10^3 \text{ MPa} \tag{9}$$

$$E^m(t) = \frac{3.2 \times 10^3}{1 + 0.0336 t^{0.19}} \text{ MPa}$$

수치해석을 위해서 섬유에 대해 사용한 값들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} k^f &= 2.24 \times 10^5 \text{ MPa} \\ \mu^f &= 0.29 \end{aligned} \tag{10}$$

그림 5는 균열길이  $a/c=1, 0.5, 0.06$ , 그리고  $0.03$ 에 대해서 경계요소법에 의해 계산된 응력확대계수의 크기  $K_0(t)$ 를 나타내고 있다.  $K_0(t)$ 는 균열길이들이 작아짐에 따라 작아짐을 보여주고 있다. 또한  $K_0(t)$ 는 기지의 점탄성 특성때문에 각각의 균열 길이에 대해서 시간에 따라 점차 이완됨을 알 수 있다.

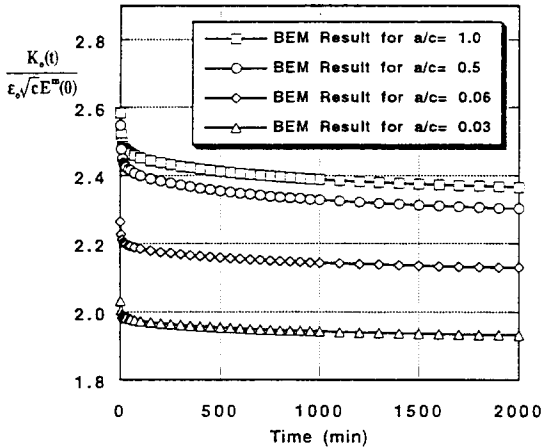


그림 5 균열길이 a/c=1, 0.5, 0.06, 그리고 0.03에 대한 K<sub>0</sub>(t)와 시간과의 관계

#### 4. 결 론

본 논문에서는, 시간영역 경계요소법을 사용하여 단일방향 탄성-점탄성 복합재료에 횡 방향 인장변형률이 작용할때 발생할 수 있는 파단과정을 조사하였다. 균열이 없는 단일방향 복합재료에 횡 방향 하중이 작용하는 경우에, 발생하는 계면 응력들은 기지의 점탄성 특성때문에 시간에 따라 이완되는 현상을 보이고 있으며, 반면에 이러한 계면 응력들은 자유 경계면 가까이에 이르러 급속히 커진다. 이러한 특이 응력들은 자유 경계면 가까이에서 모서리 균열을 야기시킬 수 있다. 다음으로, 자유 경계면 근처에 존재하는 모서리 균열에 대한 응력확대계수를 조사 하였다. 응력확대계수의 크기는 균열길이가 작아짐에 따라 점점 작아져 가지만, 각 균열 길이에 대해서 시간에 따라 점차 이완되는 현상을 보여주고 있다. 이러한 거동을 실제 복합재료의 파단과 연관시키기 위해서는 실험적인 뒷받침이 있어야 한다고 보아진다.

본 논문에서는 기술상의 중요성과 관심 때문에 graphite/epoxy 복합재료가 선택되어 해석되었지만, 다른 종류의 복합구조체에도 적용될 수 있다.

#### 참 고 문 헌

1. Muskhelishvili, N.I., *Some Basic Problems of the*

*Mathematical Theory of Elasticity*, P. Noordhoff, Groningen(1953).

2. Adams, D.F. and Doner, D.R., "Transfer normal loading of a unidirectional composite", *Journal of Composite Materials*, 1(1967), pp.152-164.
3. Adams, D.F., "Inelastic analysis of a unidirectional composite subjected to transverse normal loading", *Journal of Composite Materials*, 4 (1970), pp.310-328.
4. Gotsis, P.K., Shabaik, A.H. and Sines, G.H., "Elasto-plastic analysis of an aluminum alloy matrix reinforced with silicon carbide fibers packed in a hexagonal array", *Computers & Structures*, 41(1991), pp. 345-353.
5. Bogy, D.B., "Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 35(1968), pp. 460-466.
6. Lee, S.S., "Boundary element evaluation of stress intensity factors for interface edge cracks in a unidirectional composite", *Engineering Fracture Mechanics*, 55(1996), pp. 1-6.
7. Lee, S.S., "Stress singularity of a unidirectional viscoelastic laminate model", *ASME Journal of Applied Mechanics*(1997), (in press).
8. Lee, S.S. and Westmann, R.A., "Application of high-order quadrature rules to time-domain boundary element analysis of viscoelasticity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(1995), pp.607-629.
9. Lee, S.S. and Kim, Y.J., "Time-domain boundary element analysis of cracked linear viscoelastic solids", *Engineering Fracture Mechanics*, 51(1995), 585-590.
10. Lee, S.S., Kim, J.G., and Hwang, J.K., "Boundary element analysis of stress intensity factor for interface crack in elastic and viscoelastic bimaterials", *Boundary Element Technology XI*, Ertekin, R.C., et al.(eds), Computational Mechanics Publications(1996), pp.105-114.
11. Weitsman, Y., "Residual thermal stresses due to cool-down of epoxy-resin composite", *ASME Journal of Applied Mechanics*, 46(1979), pp. 563-567. (접수일자 : 1996. 8. 14)