

첨가질량이 있는 적층복합판의 고유진동수에 관한 연구

A Study on the Natural Frequency of Composite Laminated Plate Under Attached Point Mass/Masses

홍 창 우*
Hong, Chang-Woo

심 도 식**
Sim, Do-Sik

박 제 선***
Park, Je-Sun

요 약

본 논문은 첨가질량이 있는 양단 단순지지 타단 자유단의 경계조건을 갖는 특별 직교 이방성 적층복합판에 대한 적용례로 제시한다. 구조물 설계시 설계자들은 구조물의 정확한 고유진동수를 계산할 필요성을 느끼나 정확한 해답을 얻기란 매우 어렵다. Pretlove는 유효질량 개념을 사용하여 첨가질량을 갖는 보의 해석 방법을 발표하였다. 그러나 이 방법은 단순보의 경우에만 유용할 뿐이다. 그러므로 본 논문에선 해석법이 간단하고, 정확하며, 임의의 경계조건과 단면을 가진 판의 해석에 매우 효과적인 김덕현의 방법으로 첨가질량이 있는 적층복합판의 고유진동수를 계산하였다.

Abstract

This paper presents the illustration of application under attached point mass to the special orthotropic plates with a pair of opposite edges simply supported and the other pair of opposite edges free. Design engineers need to calculate the natural frequencies of such elements but obtaining exact solution to such problems is very much difficult. Pretlove reported a method of analysis of beams with attached masses using the concept of effective mass. This method, however, is useful only for certain simple types of beam. Therefore, considering the method has been developed by D. H. Kim(1974) is simple, accurate, and very effective for the plates with arbitrary boundary conditions and irregular sections, this paper calculates the natural frequencies of composite laminated plate under attached point mass / masses.

Keywords : natural frequency, attached mass, composite laminated plate.

1. 서 론

복합재료는 임의의 방향으로 보강이 가능하고, 기하학적 요소 변화없이 재료의 보강방향에 따라 성능개선이 가능하며, 강도에 비해 현저하게 경량

화 시킬 수 있고, 내식 및 내구성이 뛰어난 장점을 갖고 있다. 그러나 이러한 복합재료를 건설재료로 사용할때 구조 공학적 측면에서 고려해야 할 것은 대부분의 구성형태가 적층이거나 샌드위치 상태라는 점과 비등방성(Anisotropic)이라는 사실이

* 강원대학교 토목공학과 박사과정
** 강원대학교 토목공학과 시간강사
*** 강원대학교 토목공학과 교수

• 이 논문에 대한 토론을 1997년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1997년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

며, 해석할 때에 미시적, 거시적 및 탄성-소성 현상을 모두 고려해야만 된다는 것이다.

따라서 본 연구에서는 교량데크에 첨가질량(Attached Point Mass)이 재하된 경우에 대해 수치해석을 행하였으며, 이에 관한 연구는 1987년 Pretlove^[7]가 경계조건이 단순지지된 보의 첨가질량에 대한 해석을 한 바 있으나 1차원 해석에 국한하였으며, 본 연구에서는 2차원으로 확장 적용하기 위해 김^[4,5,6]의 진동 해석방법을 사용하였다.

수치해석은 경계조건이 $x=0\sim a$ 에서 자유지지, $y=0\sim b$ 에서 단순지지인 경우에 대해 판의 형상비와 첨가질량의 위치 및 크기를 변화시켜 진동특성을 규명하고자 하였으며, 진동해석에 필요한 영향계수는 유한요소 프로그램을 사용하여 구하였다. 그리고 오차범위는 사변 단순지지인 경우의 정확해^[11]와 비교하여 유한 요소 프로그램의 오차를 밝히고, 계산된 영향 계수를 이용하여 김의 방법에 의해 적층판의 고유진동수를 구하였으며, 2차원으로 간편하게 해결할 수 있음을 보였다.^[12]

2. 적층복합판의 이론

박판에 대한 고전이론은 Kirchhoff의 가정에 근거를 두고 있는데, 이 이론은 판의 중립면에서의 변형은 없고 변형전 평판의 중립면의 법선상에 있는 점은 변형후에도 중립면의 법선 상에 있다. 따라서 판의 중앙면에 수직인 방향에서의 응력은 무시될 수 있다는 것이다. 횡전단 변형이 무시될 때 적층복합판의 평형방정식은 다음과 같이 3개의 4차 편미분 연립 방정식으로 나타낸다.^[8]

$$\begin{aligned}
 & A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
 & + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\
 & - 3B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned}
 & + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
 & - B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \\
 & - 3B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
 & D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\
 & - 3B_{16} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \\
 & - B_{26} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \\
 & - 3B_{26} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} = q(x, y)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

적층복합판에 대한 면내 응력의 합(Inplane Stress Resultants)과 Stress Couples은 균질성인 보, 판, 셸 등에서와 같이 중립면의 변형에 대한 함수이고, 곡률(Curvatures)과 뒤틀림(Twist)에 대한 함수이다. 열 효과 및 습열(Hygrothermal) 효과를 무시한 구성방정식은 다음과 같다.^[3]

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 2A_{16} & B_{11} & B_{12} & 2B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 2A_{26} & B_{12} & B_{22} & 2B_{26} \\ A_{16} & A_{22} & 2A_{66} & B_{16} & B_{26} & 2B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 2B_{16} & D_{11} & D_{12} & 2D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & 2B_{26} & D_{12} & D_{22} & 2D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & 2B_{66} & D_{16} & D_{26} & 2D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{x0} \\ \epsilon_{y0} \\ \epsilon_{xy0} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

여기서 [A] matrix는 인장강성으로서 면내 응력의 합력(N)과 중립면에서의 변형률(ϵ_0)사이의 관계를 나타내며, [D] matrix는 휨강성으로 응력 coupling (M)과 곡률(κ)사이의 관계를 나타낸다. [B] matrix는 휨-인장 연계강성이다. 한편, A_{16} 와 A_{26} 항은 팽창(extension) 및 전단(shear)에 대한 항이고, B_{16} 와 B_{26} 는 휨-전단과 팽창(extension)-뒤틀림(twisting)에 관한 항이며, D_{16} 와 D_{26} 는 휨(bending)-뒤틀림(twisting)에 관한 항이다.^[9] 이와같은 ()₁₆, ()₂₆항 들은 해석상의 어려움을 초래하는 항들이다. 만약 중립면에 대하여 정확하

개 대칭이 될 경우에는 모든 [B] matrix의 성분들이 소거된다. 이러한 대칭성은 laminae의 물성, 보강재의 배향, 중립면으로부터의 위치 등 모든 것을 포함한다.

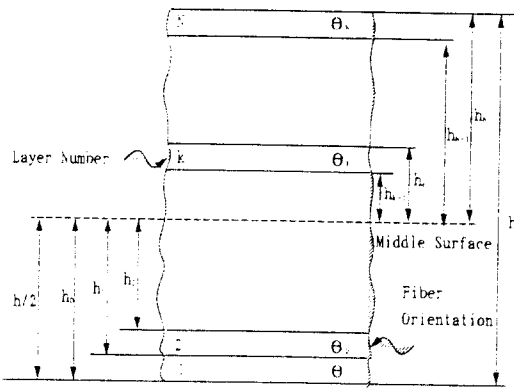


Fig. 1 Geometry of an N-layered laminate

A, B, D matrix는 다음과 같다.^[10]

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) \quad (2.5)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (2.6)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (2.7)$$

h=laminate의 두께

여기서 \bar{Q}_{ij} 는 아래 주어진 바와 같이 평면응력의 경우에 대한 축소된 강성 matrix이다.^[3]

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4)$$

$$\bar{Q}_{13} = Q_{13}m^2 + Q_{23}n^2$$

$$\bar{Q}_{16} = -Q_{22}mn^3 + Q_{11}m^3n - (Q_{12} + 2Q_{66})mn(m^2 - n^2)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4$$

$$\bar{Q}_{23} = Q_{13}n^2 + Q_{23}m^2$$

$$\bar{Q}_{26} = -Q_{22}m^3n + Q_{11}mn^3 + (Q_{12} + 2Q_{66})mn(m^2 - n^2)$$

$$\bar{Q}_{33} = Q_{33} \quad (2.8)$$

$$\bar{Q}_{36} = (Q_{13} - Q_{23})mn$$

$$\bar{Q}_{44} = Q_{44}m^2 + Q_{56}n^2$$

$$\bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44})mn$$

$$\bar{Q}_{56} = Q_{55}m^2 + Q_{44}n^2$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})m^2n^2 + Q_{66}(m^2 - n^2)^2$$

여기서 $m = \cos\alpha$, $n = \sin\alpha$ 이고, α 는 좌표변환각도이다.

Q_{ij} 는 다음과 같이 정의된다.^[3]

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (2.9)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

3. 본 연구에 사용된 진동 해석방법

본 연구에 사용된 진동이론은 임의의 단면과 임의의 경계조건을 갖는 구조요소에 대한 진동해석 방법으로 1974년 김^[5]에 의해 고안, 제시된 것이다.

교량의 상판, 건축물의 바닥, 벽체 등 대부분의 구조물은 2차원의 구조부재로 이루어져 있다. 이러한 구조물은 대부분 탄성지지되었거나 변단면으로 되어 있어 해석상 모순이 뒤따르게 된다. 균등단면을 갖고 단순지지되거나 적어도 대칭의 두 지지선이 단순지지자가 아닌 경우, 해석적으로 진동 문제를 해결하기란 그리 쉬운 일이 아니다.

그 반면, 본 연구에서 사용한 방법은 이러한 문제를 쉽게 해결할 수 있고 매우 간편하게 "정확한" 답을 얻을 수 있다는 큰 장점이 있다.

구조물의 고유진동수는 공명상태하에서 확산하기 시작하는 처짐모드 형태하에서의 주파수이다. 자유진동으로 인한 처짐으로부터 이러한 처짐을 유발하는데 필요한 힘을 알 수 있다. 일련의 이러

한 과정에 의해 결정된 모드형태가 충분히 정확하다면, 수렴된 것과 바로 이전 값 사이에서의 상대적 최대치짐은 이러한 관성력 하에서 불변하다.

구조물의 진동은 조화운동이고 진폭형상은 삼각함수에 의해 표시될 수 있는 부분이다. 처음에 제 1모드만 고려하면, 구조부재의 처짐형태는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w = W(x,y) F(t) = W(x,y) \sin \omega t \quad (3.1)$$

여기서 W : 최대진폭
 ω : 고유 진동 주파수
 t : 시간

이다.

Newton의 법칙에 의해 진동하는 질량 m 의 동적 힘은

$$F = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

이다.

(3.1)를 식(3.2)에 대입하면

$$F = -m\omega^2 W(x,y) \sin \omega y \quad (3.3)$$

여기서 ω 와 W 는 미지수이다. 고유진동수 ω 를 구하기 위하여 다음의 과정이 취해진다. 어떤 몇 개의 점에서 최대치짐의 진폭은 임의로 주어진다.

$$w(i,j) (1) = W(i,j) (1) \quad (3.4)$$

여기서 (i,j) 는 고려한 점을 나타내며, $W(i,j) (1)$ 은 판의 위치별 최초의 가정된 처짐의 변위를 나타낸다. 이때 고차모드로 확장하기 위해서는 $W(i,j) (1)$ 를 다음과 같이 가정하므로써 계산될 수 있다

$$1\text{차모드} : W(i,j) (1) = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 20 & 10 \\ 20 & 35 & 35 & 20 \\ 20 & 35 & 35 & 20 \\ 10 & 20 & 20 & 10 \end{bmatrix}$$

$$2\text{차모드} : W(i,j) (1) = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 20 & 10 \\ 10 & 20 & 20 & 10 \\ -10 & -20 & -20 & -10 \\ -10 & -20 & -20 & -10 \end{bmatrix}$$

이것은 절대적으로 임의의 값이지만 경험에 의해 가정하면 수렴을 촉진시키는데 더욱 좋다. 이러한 최대진폭에 대응하는 동적힘은 식(3.5)로 표현될 수 있다.

$$F(i,j) (1) = -m(i,j)[\omega(i,j)(1)]^2 w(i,j)(1) \quad (3.5)$$

여기서

$m(i,j)$: (i,j) 점에서의 질량, $\rho \cdot h(i,j) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$

$\Delta x, \Delta y$: x, y 방향으로 요소의 크기

$h(i,j)$: (i,j) 점에서 판의 두께

이 힘에 의해 일어나는 "새로운" 변위는 F 의 함수이고 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} w(i,j)(2) &= f m(i,j)[\omega(i,j)(1)]^2 w(i,j)(1) \\ &= \Sigma \Delta(i,j,k,l) \{-m(i,j) \\ &\quad [\omega(i,j)(1)]^2 w(i,j)(1)\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

여기서

$\Delta(i,j,k,l)$; (k,l) 점의 단위 하중에 의한 (i,j) 점의 영향계수

$\omega(i,j)$; 첫 번째 cycle에서 (i,j) 점의 진동수

공명상태하에서 구조부재의 모든 점에서 고려한 $w(i,j)(1)$ 과 $w(i,j)(2)$ 는 동일해야 하고 다음 조건을 만족해야 한다.

$$w(i,j)(1)/w(i,j)(2) = 1 \quad (3.7)$$

이 방정식으로부터 (i,j) 의 각 점에서의 $w(i,j) (1)$ 이 얻어질 수 있지만, 대부분의 경우에 일치하지 않는다. 구조부재의 고유진동수가 부재의 모든 점에서 동일해야 하므로 $\omega(i,j)$ 의 충분한 같은 값이 모든 (i,j) 점에서 얻어질 때까지 이 과정이 반복된다. 그러나 대부분의 경우에 첫 번째 cycle의

계산에 의해 얻어진 $\omega(i,j)$ 의 최대값과 최소값의 차이는 공학적으로 충분히 무시 될 수 있다.

정확도는 최대치와 최소치의 평균을 취하거나 또한 처짐이 최대인 곳에서 $\omega(i,j)$ 의 값을 취함으로써 개선될 수 있다.

2번째 cycle의

$$\omega(i,j)(3) = f\{m(i,j)[\omega(i,j)(2)]^2 \omega(i,j)(2)\} \quad (3.8)$$

에서 $\omega(i,j)(2)$ 의 절대적 수치가 편리하게 사용될 수 있다.

적층복합판의 경계조건은 양단 단순지지, 타단 자유단이며 처짐에 대한 영향계수 $\Delta(i,j,k,l)$ 은 범용 프로그램인 ALGOR을 사용하여 구하였다.^[1] 모든 구조물을 설계하기 위해서는 각종 변위, Slope, 모멘트, 전단력 등을 구하고 각종 하중상태하에서의 이들 값을 구해야 한다. 그런 다음에 진동이나 좌굴문제를 다시 고려해 콘크리트 등과 같은 복합구조를 해석 설계하는 것이다.

복합구조물을 포함하여 불규칙한 단면과 해석상 이상적이 아닌 지지 조건을 가진 판의 경우, 경계조건에 관계없이, 이 판을 몇 개의 질량요소로 나누어 고려하는 것이 편리하며, 정확한 영향계수를 구하는 것은 매우 중요한 일이 된다. 결과의 정확성은 처짐계산의 정확도에 비례한다.

4. 수치 해석

본 연구의 해석방법에 대한 예로서 $[\alpha, \beta, \alpha]_r$ 적층복합판의 형태는 Figure 2와 같으며, 이때 보강재의 각도는 $\alpha=0^\circ, \beta=90^\circ$ 로 하였고, 각 층(ply)의 두께(h_0)는 0.005m로 균일하며, $r=1$ (3층)일 때를 고려하였다. 경계조건은 Figure 3과 같으며, 판의 형상비(a/b)를 1에서 5까지 증가시켜 각 경우에 대한 해석을 수행하였으며, 수치해석에서 사용한 적층복합판의 물성은 다음과 같이 가정하였다.^[9]

$$E_1=67.36 \text{ GPa}, \quad E_2=8.12 \text{ GPa}, \quad \nu_{12}=0.2720, \\ \nu_{21}=0.0328, \quad G_{12}=3.0217 \text{ GPa},$$

Figure 4에서 CASE-A는 집중하중 $P(i,j)=N \cdot q \cdot a \cdot b$ 를 갖는 판이다. 그리고 CASE-B는 $P(i,j)$

와 등분포하중 q 를 갖는 적층복합판이며, N 은 하중정수로서 $a/b=1$ 인 적층복합판의 자중에 대한 정수배를 의미하는 것이다. 여기서 (i,j) 와 q 는 각각 집중하중 ($mass \cdot g$)의 위치와 적층복합판의 등분포 사하중($\rho \cdot h \cdot g$)을 나타낸다. Figure 5는 하중 작용점 (i,j) 를 보여준다.

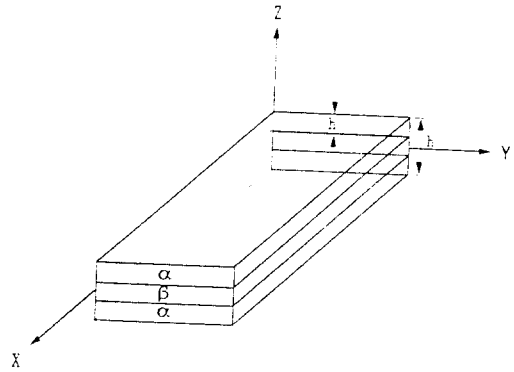


Fig 2 Geometry of $[\alpha/\beta/\alpha]_r$ Type Laminate($r=1$)

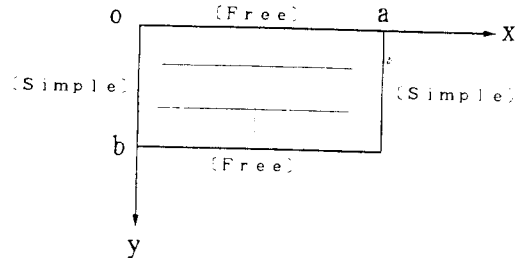


Fig 3 Boundary Condition of Plate(FS)

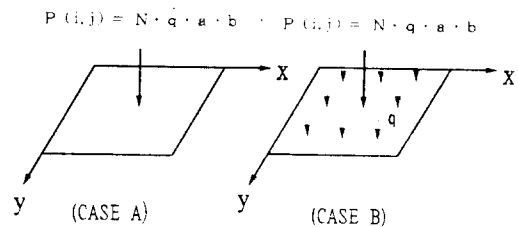


Fig. 4 Plates with and without Own Weight

5. 결과분석

1) 유한요소 프로그램의 오차범위 계산

본 연구에서 사용한 물성을 이용하여 사변이 단

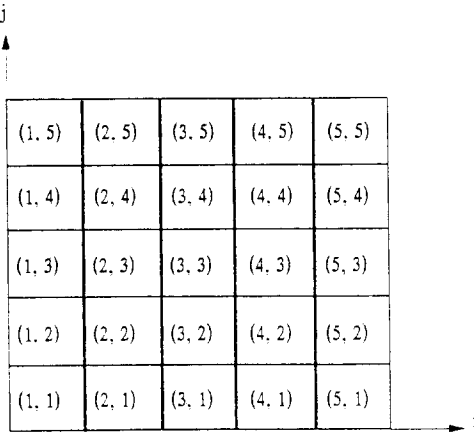


Fig. 5 Location of Concentrated Mass, (i, j)

순지된 $a=1m$, $b=1m$ 인 적층복합판의 고유진동수를 구하기 위해 유한요소 프로그램을 사용하여 Mesh Size별 처짐에 대한 영향계수를 구했으며, Table 1에 고유진동수에 따른 상대오차를 나타내었다.

Table 1에서와 같이 4×4 Mesh는 20×20 Mesh에 비해 5.93%, 6×6 Mesh는 1.11%, 8×8 Mesh는 0.75%의 오차를 보이며, 10×10 Mesh는 0.42%, 12×12 Mesh는 0.32%, 14×14 Mesh는 0.13%의 오차를 나타낸다. 본 연구에서는 10×10 Mesh를 기준으로 0.42%의 상대적 오차를 수용하여 진동해석을 하였다.

고전이론^[11]과 유한요소 프로그램(ALGOR)에 의해 계산된 단순지된 적층복합판의 최대처짐에 대한 이들 두 값의 비율을 Table 2에 나타내었다.

Table 1 Comparison of Natural Frequencies with variation of Meshes($a/b=1$)

Classification Mesh Size	Natural Frequency (rad/sec)	Iteration	$(\omega = \omega_{real} \sqrt{\rho h})$
			Relative Error(%) (20×20)
4x4	1479.5490	2	5.93
6x6	1555.4780	10	1.11
8x8	1561.0820	8	0.75
10x10	1566.3040	9	0.42
12x12	1567.8440	8	0.32
14x14	1570.9030	13	0.13
20x20	1572.8940	8	0.00

Table 2 Maximum Deflection of Simply Supported Plate

(Unit : E-6)

Method	Aspect Ratio (b : a)				
	1 : 1	1 : 2	1 : 3	1 : 4	1 : 5
Classical Theory	0.637	3.133	4.396	4.677	4.668
F.E.M	0.618	3.096	4.293	4.570	4.554
C-Theory / F.E.M	1.031	1.012	1.024	1.023	1.025

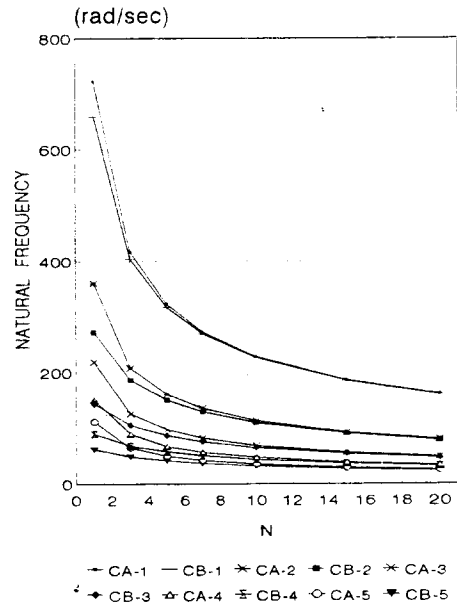


Fig. 6 Comparison of Aspect Ratio

고전이론과 유한요소 프로그램의 처짐에 대한 최대오차는 Table 2에서와 같이 1.2~3.1%인데, 구조물의 고유진동수는 최대처짐의 제곱근에 역비례하므로 유한요소 프로그램을 이용하여 계산된 고유진동수의 최대오차는 1.09~1.76%임을 알 수 있다.

Table 2에서 Classical Theory는 Energy 방법을 이용한 Whitney의 식에 의해 계산된 최대처짐 값이다.

2) 형상비 변화에 따른 고유진동수

첨가질량이 적층복합판의 중앙점에 작용할때, 하중정수 N을 1~20까지와 형상비를 1~5까지 증가시켰고, 첨가질량만 작용하였을 경우(CASE A)와 첨가질량과 판의 자중을 동시에 고려한 경우

(CASE B)를 비교하였다.

적층복합판은 형상비가 증가함에 따라 처짐이 증가하기 때문에 고유진동수가 급격히 감소하는 경향을 나타내었으며, 첨가질량에 따른 고유진동수를 Table 3과 Figure 6에 나타내었다.

판의 중앙점에 첨가질량이 있을 때, 한 예로 설계시 형상비가 1인 적층판의 경우 판 자중의 5배 정도의 첨가질량이 작용하면 적층복합판의 자중을 무시하고 첨가질량만으로도 진동 해석이 가능하며, 형상비 증가에 따른 진동해석은 도표를 이

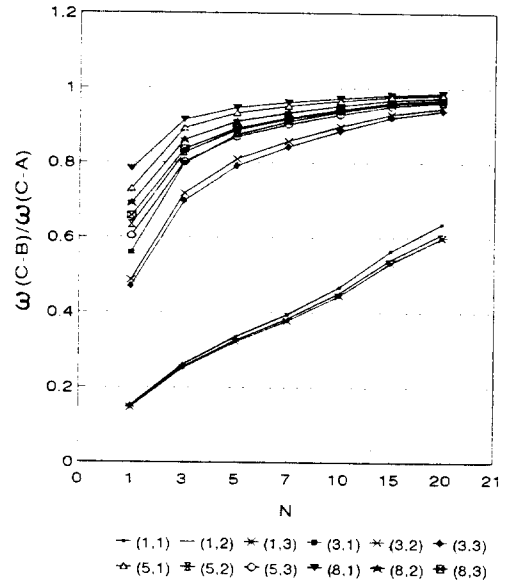
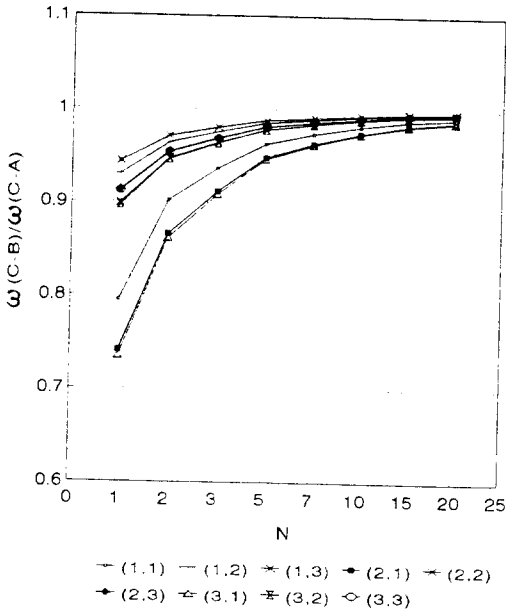


Fig. 7 $\omega(B)/\omega(A)$ of Each Point with Attached Masses, $c=1$

Fig. 9 $\omega(B)/\omega(A)$ of Each Point with Attached Masses, $c=3$

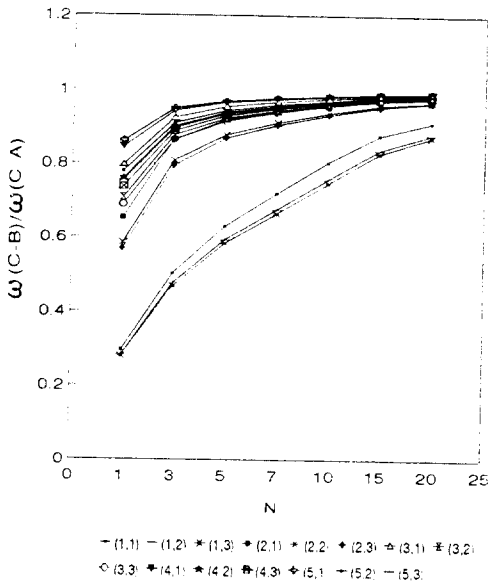


Fig. 8 $\omega(B)/\omega(A)$ of Each Point with Attached Masses, $c=2$

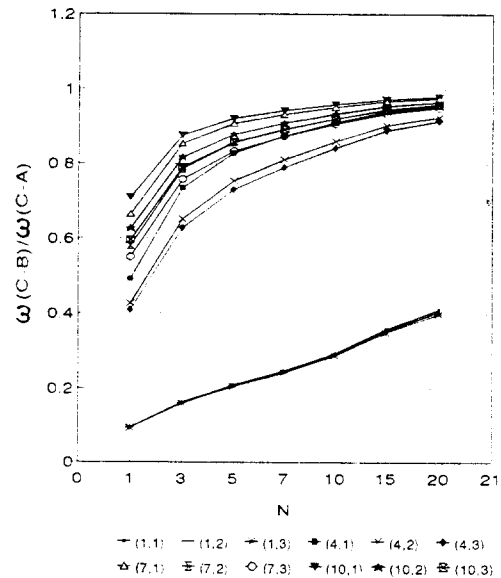


Fig. 10 $\omega(B)/\omega(A)$ of Each Point with Attached Masses, $c=4$

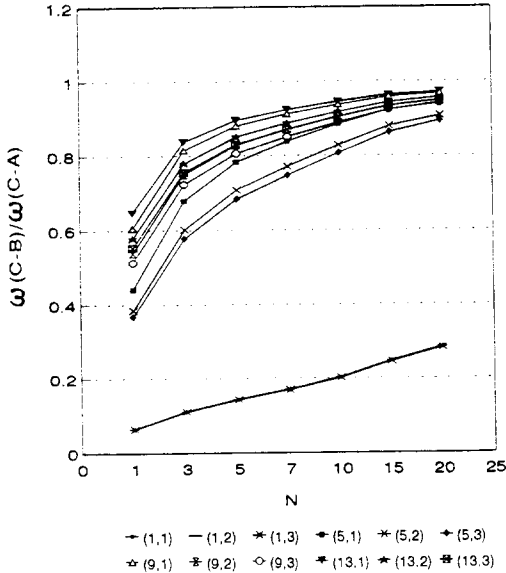


Fig. 11 $\omega(B)/\omega(A)$ of Each Point with Attached Masses, $c=5$

용하면 가능함을 알 수 있다.

3) 첨가질량의 위치에 따른 고유진동수

유한요소 프로그램을 이용하여 영향계수를 구하고 이를 김의 방법에 의해 고유진동수를 계산하였다. 이때 첨가질량의 위치에 따라 적층복합판에 미치는 영향을 모든 (i,j)점에 대해 구하였으며, 첨가질량의 크기 N은 1~20까지 증가하면서 CASE A와 CASE B의 영향 및 첨가질량의 위치에 따른 고유진동수를 고찰하였다.

적층복합판에 대한 종합적 계산 결과는 형상비가 1인 경우, Table 4~6 및 Figure 7에서와 같이 적층복합판의 모든 위치에 첨가질량이 작용해도 그 위치와 관계없이 판의 자중을 무시한 첨가질량만으로 해석이 가능하다. 그러나, 형상비가 증가하면 Figure 8~11에서와 같이 단순지지된 지점으로 부터 $c=2$ 인 경우는 0.2m, $c=3$ 인 경우는 0.4m, $c=4$ 인 경우는 0.6m, $c=5$ 인 경우는 0.8m까지는 판의 자중을 고려해서 고유진동수를 계산해야 한다.

따라서 위에서 제시한 이외의 위치에서는 첨가질량의 크기가 증가하면 판의 자중을 무시한 첨가질량만으로 진동해석이 가능함을 알 수 있다.

Table 3 Natural Frequencies at the Center Point with Attached Point Masses

$(\omega = \omega_{real} \sqrt{\rho h}) \text{ (rad/sec)}$

Aspect Ratio (b : a)	CASE	N							
		0	1	3	5	7	10	15	20
1 : 1	A		722.502	417.137	323.113	273.080	228.475	186.549	161.556
	B	1439.022	638.052	404.090	316.967	269.349	226.280	185.350	160.776
	B/A		0.9122	0.9687	0.9810	0.9863	0.9904	0.9936	0.9952
1 : 2	A		360.047	207.873	161.018	136.085	113.857	92.963	80.509
	B	398.2901	272.028	186.325	150.562	129.626	110.007	90.839	79.119
	B/A		0.7555	0.8973	0.9351	0.9525	0.9662	0.9772	0.9827
1 : 3	A		218.670	126.249	97.792	82.649	69.149	56.460	48.896
	B	187.8315	143.689	105.552	87.236	75.998	65.122	54.208	47.413
	B/A		0.6571	0.8361	0.8921	0.9195	0.9418	0.9601	0.9697
1 : 4	A		150.568	86.930	67.336	56.909	47.614	38.876	33.668
	B	110.6975	89.659	68.742	57.789	50.804	43.871	36.762	32.268
	B/A		0.5855	0.7908	0.8582	0.8927	0.9214	0.9456	0.9584
1 : 5	A		111.660	64.467	49.936	42.203	35.310	28.830	24.968
	B	73.6756	61.724	48.725	41.492	36.740	31.926	26.901	23.684
	B/A		0.5528	0.7558	0.8309	0.8706	0.9042	0.9331	0.9486

Table 4 Natural Frequencies of Each Point with Attached Point Masses($a=1, b=1$)

$(\omega = \omega_{real} \sqrt{\rho h}) \text{ (rad/sec)}$

N \ $\omega(i,j)$	$\omega(1,1)$			$\omega(2,1)$			$\omega(3,1)$		
	CASE A	CASE B	B/A	CASE A	CASE B	B/A	CASE A	CASE B	B/A
1	1556.4320	1237.6230	0.7952	1637.2550	1213.6640	0.7413	1638.1340	1204.0300	0.7350
2	1100.5640	992.8533	0.9021	1157.7150	1002.5370	0.8660	1158.3360	997.8875	0.8615
3	898.6064	841.5588	0.9365	945.2700	861.8494	0.9117	945.7771	859.4437	0.9087
5	696.0576	670.1931	0.9628	732.2030	694.2060	0.9481	732.5958	693.2908	0.9463
7	588.2760	572.8447	0.9738	618.8244	596.1437	0.9633	619.1564	595.7075	0.9621
10	492.1870	483.2306	0.9818	517.7457	504.5911	0.9746	518.0234	504.4243	0.9737
15	401.8690	397.0234	0.9879	422.7376	415.6297	0.9832	422.9644	415.6199	0.9826
20	348.0288	344.8966	0.9910	366.1015	361.5028	0.9874	366.2979	361.5489	0.9870

Table 5 Natural Frequencies of Each Point with Attached Point Masses($a=1, b=1$)

$(\omega = \omega_{real} \sqrt{\rho h}) \text{ (rad/sec)}$

N \ $\omega(i,j)$	$\omega(1,2)$			$\omega(2,2)$			$\omega(3,2)$		
	CASE A	CASE B	B/A	CASE A	CASE B	B/A	CASE A	CASE B	B/A
1	756.4587	703.6310	0.9302	834.1882	749.9362	0.8990	831.7177	745.8588	0.8968
2	534.8970	515.6995	0.9641	589.8601	558.6864	0.9472	588.1132	556.3275	0.9460
3	436.7416	426.1981	0.9759	481.6188	464.4012	0.9643	480.1924	462.6319	0.9634
5	338.2986	333.3665	0.9854	373.0603	364.9632	0.9783	371.9554	363.6988	0.9778
7	285.9145	282.9260	0.9895	315.2935	310.7853	0.9844	314.3597	309.3508	0.9841
10	239.2132	237.4584	0.9927	263.7935	260.9971	0.9891	263.0122	260.0678	0.9888
15	195.3168	194.3630	0.9951	215.3865	213.8105	0.9927	214.7486	213.1422	0.9925
20	169.1493	168.5283	0.9963	186.5302	185.5050	0.9945	185.9777	184.9327	0.9944

Table 6 Natural Frequencies of Each Point with Attached Point Masses(a=1, b=1)

$$(\omega = \omega_{\text{real}} \sqrt{\rho h}) \text{ (rad/sec)}$$

N	$\omega(1,3)$			$\omega(2,3)$			$\omega(3,3)$		
	CASE A	CASE B	B/A	CASE A	CASE B	B/A	CASE A	CASE B	B/A
1	639.6766	603.7444	0.9438	727.3448	664.3690	0.9134	722.5020	659.0518	0.9122
2	452.3197	439.2404	0.9711	514.3105	490.9193	0.9545	510.8861	487.3155	0.9539
3	369.3175	362.1251	0.9805	419.9328	406.9868	0.9692	417.1367	404.0901	0.9687
5	286.0721	282.7035	0.9882	325.2785	319.1846	0.9813	323.1127	316.9671	0.9810
7	241.7750	239.7340	0.9916	274.9105	271.2090	0.9865	273.0801	269.3486	0.9863
10	202.2835	201.0894	0.9941	230.0067	227.8288	0.9905	228.4752	226.2903	0.9904
15	165.1638	164.5111	0.9960	187.7996	186.6101	0.9937	186.5492	185.3504	0.9936
20	143.0360	142.6114	0.9970	162.6393	161.8705	0.9953	161.5564	160.7764	0.9952

6. 결 론

본 연구에서는 첨가질량이 존재하고, 양단 단순 지지 타단 자유단인 적층복합판의 진동해석 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 적층복합판의 진동해석시 첨가질량이 판의 자중에 비해 클수록 판의 자중을 무시한 첨가질량 (Attached Point Mass/Masses)만으로 고유진동수를 계산할 수 있다는 것을 알 수 있었다.

(2) 형상비의 증가에 따라 처짐의 증가로 인해 고유진동수가 현저하게 감소됨을 알 수 있었다.

(3) 형상비가 2이상이면 단부에서는 첨가질량과 판의 자중을 동시에 고려해서 고유진동수를 계산해야 하며, 판의 자중을 무시한 첨가질량만으로 진동해석이 가능한 범위를 제시 할 수 있었다.

(4) 판의 영향계수가 정확히 구해지면 임의의 첨가질량이 있는 판의 진동을 간편하게 해석할 수 있다는 것을 알 수 있었다.

진동해석을 위해 특정 경계조건에 한해 기초적 연구로써 수행되었으나, 향후 설계자료로 이용하기 위해서는 혼합 경계조건에 대한 광범위한 연구가 요구된다.

감사의 글

본 논문은 초대형 구조시스템 연구센터에서 지원된 연구비로 수행되었으며, 이에 대해 감사드립니다.

NOTATIONS

$[A_{ij}], [B_{ij}], [D_{ij}]$: 적층판의 강성 Matrix

a, b : 판 요소의 치수

h : 적층복합판의 두께

$m(i, j)$: i, j 점 요소의 질량

N : 하중정수

\bar{Q}_{11} : 축소된 강성 (Reduced stiffness)

u, v, w : x, y, z 방향에서의 변위

W : 최대진폭

Y : 최대변위

y : 가정된 변위

$\Delta(i, j, k, l)$: 처짐에 대한 영향계수

ρ : 질량 밀도

ω : 고유진동 주파수

참 고 문 헌

1. 홍창우, "첨가질량이 있는 양단 단순지지 타단 자유단인 적층복합판의 진동해석", 강원대학교 대학원 공학석사 학위논문, 1996. 2.
2. 홍창우, 심도식, 이봉학, 김덕현, "축하증을 받고 첨가된 점질량이 있는 적층복합판의 간편한 진동해석", 대한 토목학회 학술발표회 논문집 (I), 1995. 10. 21, pp. 347~350.
3. Ashton, J. E., and Whitney, J. M., *Theory of Laminated Plates*, Technomics, 1970.
4. Kim, D. H., *Composite Structures for Civil and Architectural Engineering*, E & FN SPON, 1995.
5. Kim, D. H., "A Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Structural Elements", International Symposium on Engineering Problems in Creating Coastal Industrial Sites, Seoul, Korea, 1974, pp. 39-63.
6. Kim, D. H. et al., "Vibration Analysis of Irregularly Shaped Composite Structural Members for Higher Modes", 8th Structural Congress, ASCE, Baltimore, MD, USA, 30 apr.-3 May, 1990, pp. 63-64.
7. Pretlove, A. J., "A Simple and Accurate Method for Calculating the Fundamental Natural Frequencies of Beams with Attached Masses", International Journal of Mechanical Engineering Education, Vol 15 No 4, Ellis Horwood

- Ltd, Chichester, England, 1987, pp. 257~266.
8. Reissner, E., "The Effect of Transverse Shear Deformation of the Bending of Elastic Plates", J. of Applied Mech., Dec. 12, 1954, A69-A77.
 9. Tsai, S. W., Composite Design, 4th Ed., Think Composites, Dayton, 1988.
 10. Vinson, J. R. and Sierakowski, R. L., *The Behavior of Structures Composed of composite Materials*, Martinus Nühoff Publishers, Dordrecht, 1987.
 11. Whitney, J. M. and Leissa, A. W., "Analysis of a Simply-Supported Laminated Anisotropic Rectangular Plate", AIAA, vol.8, No.1, 1970, pp. 28-33.

(접수일자 : 1996. 8. 22)