

고차이론을 이용한 보 및 아치형 구조물의 유한요소 해석

Finite Element Analysis of Beam-and Arch-Like Structures using Higher-Order Theory

조진래*
Cho, Jin-Rae

요약

보 및 아치형 구조물은 2차원 탄성체이지만 두께가 상대적으로 매우 얇다는 특성 때문에 Kirchhoff 이나 Reissner-Mindlin 이론과 같이 변위장의 두께방향 변위를 선형함수로 근사화시켜 왔다. 그 결과 2차원 문제가 물체의 중립면에서 표현되는 1차원 문제로 차원이 감소되어 이론적 해석이 간편해진다. 그러나 경계에서와 같이 두께방향 변위가 복잡한 영역의 거동을 보다 정확히 해석하기 위해서는 2차원 선형 탄성이론이나 두께방향 다항식의 차수가 상당히 높아야 한다. 본 논문은 두께방향 다항식의 차수변화에 따른 해석정도 경향 및 여러 다른 차수를 한 문제 영역에 혼합하는 모델조합에 대한 내용을 제시한다.

Abstract

Beam - and arch-like structures are two-dimensional bodies characterized by the fact of small thickness compared to the length of structures. Owing to this geometric feature, linear displacement approximations through the thickness such as Kirchhoff and Reissner-Mindlin theories which are more accessible one dimensional problems have been used. However, for accurate analysis of the behavior in the regions where the state of stress is complex, two-dimensional linear elasticity or relatively high order of thickness polynomials is required. This paper analyses accuracy according to the order of thickness polynomials and introduces a technique for model combination for which several different polynomial orders are mixed in a single structure.

Keywords : Higher-Order Theory, Relative Modeling Error, Model Combination, q-Refinement, Finite Element Method

1. 서론

보 및 아치형 구조물은 각종 건축물이나 기계 메카니즘등의 기본 구성요소로 사용되어 왔고, 따

라서 이러한 물체에 대한 연구도 긴 역사를 가지고 있다. 이런 구조물에 대한 이론적인 해석은 물체의 형상적 특성, 즉 길이에 비해서 두께가 상대적으로 매우 작다는 사실에 기초하고 있다.

* 정회원, 부산대 기계공학부, 기계기술 연구소 조교수

• 이 논문에 대한 토론을 1997년도 6월 30일까지 본학회에 보내주시면 1997년도 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

이 형상적 특성에 따라 두께 방향으로 변위 및 응력의 변화를 저차 다항식으로 근사시켜 왔다. Kirchhoff 이론과 Reissner-Mindlin 이론 등이 전통적인 저차이론으로서 변위장의 두께방향 변위를 일차함수로 표현한다.

이들 이론에 대해서는 다음 절에서 상세히 논의하겠지만, 비록 얇은 두께의 보 및 아치라고 하더라도 경계부근과 같은 영역에서는 두께방향으로의 변위가 간단하지 않고 상당히 복잡하다. 따라서 보다 정확한 해석을 위해서는 2차원 선형 탄성 이론이나 보다 높은 두께 다항식 차수가 필요하다.

최근에 와서 두께방향 다항식의 차수 증가에 따른 연구가 활발한데,^{1,3,4,6)} 본 논문은 두께방향 다항식의 차수변화에 따른 해석정도를 고찰하였고, 또한 여러가지 고차이론을 한 문제영역 내에 혼합하는 모델조합이란 새로운 모델링기법을 이용한 유한요소 기법을 제시하였다.⁵⁾

2. 이론적 해석

아래의 Fig. 1은 전통적인 Kirchhoff 및 Reissner-Mindlin 이론에 있어서의 x-방향 변위성분의 두께 방향으로의 분포를 나타낸다.

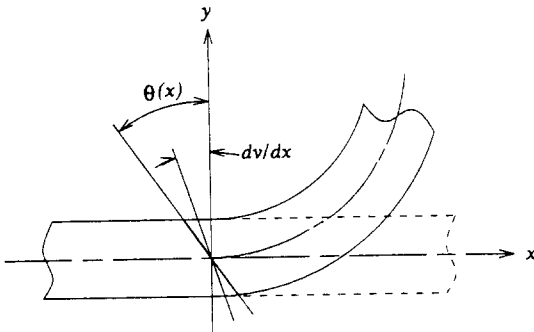


Fig. 1 Notation for the classical theory.

그림에서 $\theta(x)$ 는 중립면($y=0$)에 수직한 면의 회전을 의미한다. 이 이론들에 대한 변위장은 식 (1)과 같고, 중립면은 변형 후에도 두께 방향으로 직선이다.

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= -y \cdot \theta(x) \\ v(x, y) &= v_0(x, 0) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

그러나, 두 이론은 다음과 같은 큰 차이를 가지고 있다. 우선 Kirchhoff 이론에서는 중립면에 수직한 면의 회전은 변형후에도 중립면에 수직이라고 가정한다($dv(x)/dx = \theta(x)$) 따라서 전단변형 γ_{xy} 을 고려하지 않는다.

$$\gamma_{xy} = \partial_u / \partial_y + \partial_v / \partial_x = 0 \quad (2)$$

반면에 Reissner-Mindlin 이론은 Kirchhoff 가정을 따르지 않고 식 (3)과 같이 두께 방향으로 일정한 전단변형을 포함한다.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} - \theta(x) \neq 0 \quad (3)$$

다른 한편 이들 두 이론의 유한요소법 적용에 대해 살펴보면, 해석결과가 유한한 변형 에너지를 갖기위해 Reissner-Mindlin 이론은 두 변위에 대하여 C^0 유한요소가 필요한 반면 Kirchhoff 이론은 $\theta(x)$ 가 dv/dx 로 표현되기 때문에 C^1 유한요소를 필요로 하는 어려움이 있다는 점은 잘 알려진 사실이다.⁷⁾

다음은 변위장이 두께 방향으로 식 (4)와 같이 고차 다항식으로 표현되는 고차이론(higher-order theory)에 대하여 살펴본다.

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{\ell=0}^{q_x} u_{\ell}(x) P_{\ell}(2y/d) \\ v(x, y) &= \sum_{\ell=0}^{q_y} v_{\ell}(x) P_{\ell}(2y/d) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

여기서 d 와 $P_{\ell}(2y/d)$ 는 각각 구조물의 두께 및 ℓ 차 다항식을 의미한다. 결국 두 변위 성분의 두께 방향 다항식의 최대차수 (q_x, q_y)의 지정에 따라서 임의의 고차이론, 즉 (q_u, q_v) 모델을 규정할 수 있고, 두 성분의 차수가 ∞ 인 경우가 2차 선형 탄성이론이 된다. 두께 방향으로의 $u(x, y)$ 성분의 변위가 Fig. 2에 도시되어 있다.

고차이론의 경우 전단변형이 두께 방향으로 고차함수가 된다. 따라서 두께 방향으로 복잡한 변위 혹은 응력상태를 충분히 묘사할 수 있기 때문에 서론에서 지적인 경계 부근과 같은 영역에 고차이론을 사용하면 구조물의 거동을 적절히 설명할 수 있다.

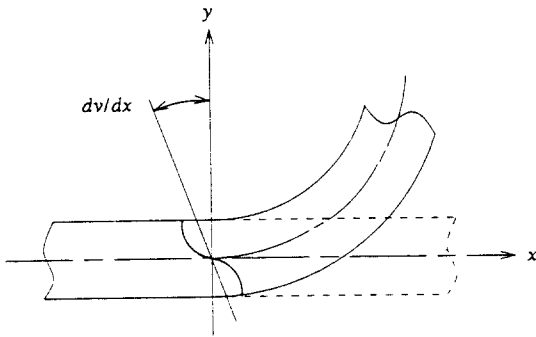


Fig. 2 Deformation in higher-order theories.

3. 고차이론의 유한요소 근사화

본 절에서는 구조물의 형상에 대한 유한요소 근사와 앞 절에서 언급한 고차이론에 대한 유한요소 근사화를 설명한다.

3.1 형상에 대한 유한요소 근사화

보와 같은 구조물의 형상은 아치형 구조물의 특수한 형태이므로, 보다 일반적인 Fig. 3과 같은 아치형 형상에 대하여 고려한다.

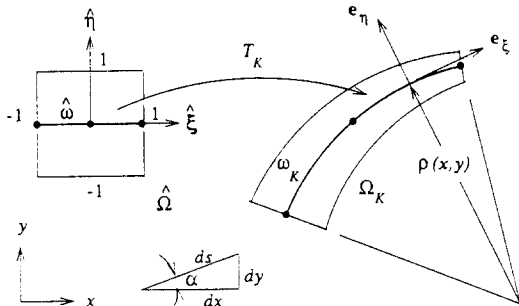


Fig. 3 Generation of a finite element for arch-like structures.

구조물의 중립면 $\omega(x, y)$ 는 일차원 마스터 요소 (master element) $\hat{\omega}(\hat{\xi})$ 에서 정의된 형상함수 $\psi_i(\hat{\xi})$ 를 이용하여 식 (5)로 표현된 사상함수 $T_k: \omega \rightarrow \hat{\omega}$ 로 근사화 한다.

$$T_k : \begin{cases} x = \sum_{i=1}^n x_i \psi_i(\hat{\xi}) \\ y = \sum_{i=1}^n y_i \psi_i(\hat{\xi}) \end{cases} \quad (5)$$

아치형 구조물인 경우, 지역 극좌표 (ξ, η) ($\xi \sim$ 중립면 방향, $\eta \sim$ 두께방향)를 이용하면 편리하다. 이 경우 두께 방향으로의 사상식 $\eta = d(\hat{\xi}) \cdot \hat{\eta} / 2$ 을 이용한다. 그러면 마스터 요소의 좌표계 $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ 와 지역 극좌표계 (ξ, η) 사이 관계는 다음 행렬식으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\left(\frac{dx}{d\hat{\xi}} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\hat{\xi}} \right)^2 \right]^{1/2} & 0 \\ 0 & d(\hat{\xi})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\hat{\xi} \\ d\hat{\eta} \end{bmatrix} \quad (6)$$

따라서 중립면과 두께방향 사상함수를 이용하여 임의의 아치형 유한요소 Ω_k 를 구성한다.

3.2 강성행렬 및 하중벡터

임의의 유한요소 Ω_k 에 있어서 변위성분 (u_ξ, u_η) 이 두께다항식 차수 (q_ξ, q_η) 를 가진 고차이론에 대한 유한요소 근사는 식 (7)과 같은 형태로 표현된다.

$$(u_a)_k^h = \sum_{\ell=0}^{q_a} \sum_{i=1}^{P_k+1} (\bar{u}_a)_k^\ell \varphi_i(\xi) \cdot (2\eta/d)^\ell, \quad a = \xi, \eta \quad (7)$$

여기서 P_k 는 사용되는 형상함수 $\varphi_i(\xi)$ 의 차수를 의미하는데, 본 논문에 있어서는 계층적(hierarchical) 형상함수를 사용하였다.

식 (7)에서 보듯이 유한요소 해석은 각 두께방향 다항식 $(2\eta/d)^\ell$ 에 대응하는 계수 $(\bar{u}_a)_k^\ell$ 를 근사적으로 구하는 일차원 해석문제로 규정된다. 표현상의 편의를 위하여 유한요소 근사 변위장 u_k^h 를 다음과 같이 표기한다.

$$\mathbf{u}_k^h = \begin{bmatrix} (u_\xi)_k^h \\ (u_\eta)_k^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_1 \cdot (2\eta/2) \cdots \\ \psi_2 & \psi_2 \cdot (2\eta/2) \cdots \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_k^h = \Phi \bar{\mathbf{u}}_k^h \quad (8)$$

식 (8)속의 $\psi_1 \psi_2$ 및 $\bar{\mathbf{u}}_k^h$ 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \psi_1 = (\varphi_1, 0, \varphi_2, 0, \varphi_3, 0, \dots) \\ \psi_2 = (0, \varphi_1, 0, \varphi_2, 0, \varphi_3, \dots) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_k^h = \left\{ \begin{bmatrix} (\bar{u}_\xi)_1^0, (\bar{u}_\eta)_1^0, (\bar{u}_\xi)_2^0, (\bar{u}_\eta)_2^0, \\ (\bar{u}_\xi)_3^0, \dots \end{bmatrix}, \right. \\ \left. \begin{bmatrix} (\bar{u}_\xi)_1^1, (\bar{u}_\eta)_1^1, (\bar{u}_\xi)_2^1, (\bar{u}_\eta)_2^1, \\ (\bar{u}_\xi)_3^1, \dots \end{bmatrix}, \dots \right\}_K^T \quad (10)$$

다음으로 극좌표계에서 유한요소 근사 변위장의 변형률 ϵ_k^h 은 다음과 같이 계산된다.

$$\epsilon_k^h = \mathbf{D}\mathbf{u}_k^h = \mathbf{D}\Phi\bar{\mathbf{u}}_k^h = \mathbf{B}\Phi\bar{\mathbf{u}}_k^h \quad (11)$$

극좌표계의 편미분 오퍼레이터 \mathbf{D} 는 다음과 같다(보형 구조물인 경우는 $\xi = x, \eta = y$ 및 $1/\rho = 0$ 임).

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \partial/\partial\xi & 1/\rho \\ 0 & \partial/\partial\eta \\ (\partial/\partial\eta - 1/\rho) & \partial/\partial\xi \end{bmatrix} \quad (12)$$

2차원 선형 탄성체 물질상수 행렬 \mathbf{E} (3×3)⁶⁾을 이용하여 유한요소 근사 응력 σ_k^h 은 식 (13)과 같이 표현된다.

$$\sigma_k^h = \mathbf{E}\epsilon_k^h = \mathbf{E}\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}_k^h \quad (13)$$

식 (11)과 (13)을 가상일의 원리(principle of virtual work)에 대입하면 \mathbf{K} -유한요소에 대한 강성행렬(\mathbf{K})_k과 하중벡터 (\mathbf{F})_k를 각각 구할 수 있는데, 우선 유한요소 강성행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$(\mathbf{K})_k^h = \int_{\omega_k} \left\{ \int_{-d/2}^{d/2} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} (1 + \frac{\eta}{\rho}) d\eta \right\} d\xi \quad (14)$$

일반적으로 보나 아치형 구조물의 경우 외부 응력 \mathbf{t} 는 구조물의 윗면과 아랫면에 작용한다. 따라서 Neumann 경계 Γ_N 는 윗면과 아랫면에 한정할 수 있다. 구조물의 자중을 무시할 때 유한요소 하중 벡터는 식 (15)로 표현된다.

$$(\mathbf{F})_k^h = \int_{(\Gamma_N)_K} \Phi^T \mathbf{t} ds \quad (15)$$

식 (14)에서 알 수 있듯이 두께 방향으로 두께 다항식을 해석적(analytic)으로 적분 가능하기 때문에 유한요소 강성행렬은 중립면에서의 일차원 적분형태가 된다.

4. 모델 조합

본 절에서는 서로 다른 모델들의 조합, 즉 q-세분화(q-refinement, $q=(q_\xi, q_\eta)$)에 대하여 살펴본다. 모델들의 조합에 있어서 고려해야 할 사항은 임의의 두 모델의 경계에 있어서의 변위성분의 연속성이다. Fig. 4에서와 같이 서로 다른 두 모델을 고려하자. 편의상 좌측 \mathbf{K} 유한요소는 (3, 3)차수인 모델을, 그리고 우측 \mathbf{L} 유한요소는 (2, 2)차수인 모델을 각각 사용한다고 가정한다. 그림에서는 경계 Γ_{KL} 에서의 두께방향 다항식의 차수에 따른 유한요소 절점(node) A에서의 x-방향 변위성분을 나타내고 있다. 경계에서의 연속성을 유지하기 위해 구속 조건 $(\bar{u}_A^3)_K = (\bar{v}_A^3)_K = 0$ 이 (3, 3)차수인 가진 좌측 유한요소 \mathbf{K} 에 부과되어야 한다.

따라서 모델조합에 따른 경계에서의 적합성 조건(compatibility condition)을 식으로 표현하면

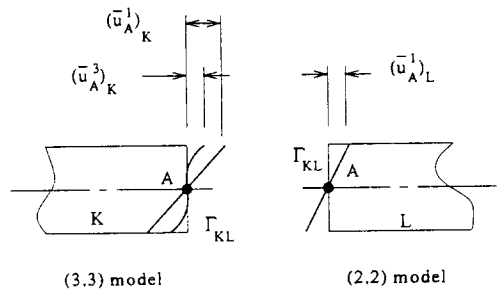


Fig. 4 Displacement profile at the interelement side.

다음과 같다(가정 : $q_L < q_K$).

$$\left. \begin{aligned} (\bar{u}_k)_k &= (\bar{u}_A)_L, (\bar{v}_k)_k = (\bar{v}_A)_L, i=0, 1, \dots, q_L \\ (\bar{u}_k)_k &= (\bar{v}_A)_L, i=0, 1, \dots, q_L \leq i \leq q_k \end{aligned} \right\} (16)$$

또 다른 가능성은 두 모델 중 높은 차수를 기준 하여 두 모델차수의 차이에 해당하는 변위항들을 낮은 차수 모델의 유한요소 절점 A에 추가하는 방법이다. 본 논문에서는 식 (16)로 주어진 적합식을 적용하였다.

5. 수치해석 결과

본 절에서는 고차이론의 모델차수(q) 증가에 따른 해석정도와 여러 모델의 조합에 대한 예제를 살펴보았다. 우선 고차이론의 정도, 즉 모델링 오차를 위하여 Fig. 5와 Fig. 6과 같은 균일 두께의 보 및 아치형 구조물을 고려하였다. 아치형 구조물은 우측단이 대칭인 경계조건을 갖고, 또한 그 점에 수직하중 P_y 가 작용하고 있다.

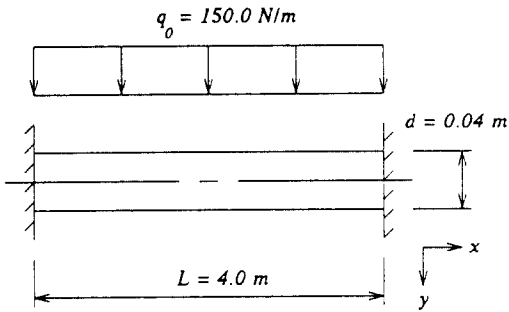


Fig. 5 Clamped uniform thickness beam-like structure.

오차는 식 (17)과 같이 2차원 선형 탄성이론의 변형에너지 $U(\mathbf{u}_{2D})$ 에 대한 상대오차(relative error)로 계산하고, 2차원 선형 탄성이론치로 본 논문에서 (9, 9) 고차이론을 48개의 균일한 $p=9$ 인 유한요소를 사용하여 구하였다.

$$\xi(\%) = \left[\frac{|U(\mathbf{u}_{2D}) - U(\mathbf{u}')|}{|U(\mathbf{u}_{2D})|} \right]^{1/2} \times 100(\%) \quad (17)$$

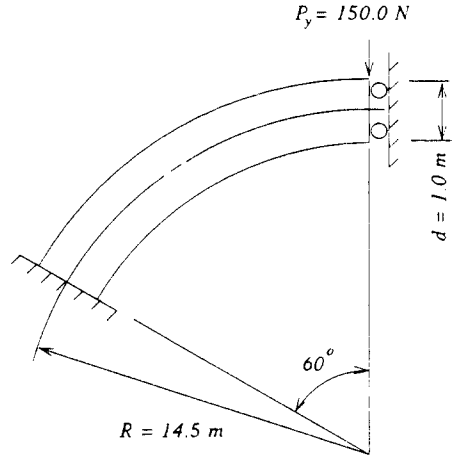


Fig. 6 Uniform circular arch-like structure.

Table 1과 2는 각 예제에 있어서 고차이론의 모델차수 q 와 유한요소 근사차수 p 에 따른 상대오차를 보여주고 있다. 수치값에서 알 수 있는 것은 차수 p 가 증가하면 어느 정도까지 오차가 줄어들지만 얼마 이상에서는 오차에 변화가 없다. 이것은 두께 방향으로의 모델차수에 제한을 받기 때문이다.

이 결과로부터 구조물의 상대오차는 고차이론의 모델차수와 유한요소 파라미터(체눈 크기 및

Table 1 Relative error $\xi(\%)$ for beam-like problem ($L/d=100$, 1 element)

$p \backslash q$	1	2	3
2	99.91	99.91	99.91
3	99.91	99.71	99.71
4	42.48	25.77	25.73
5	42.48	25.75	25.69
6	42.48	18.08	18.01
7	42.48	18.06	17.97

Table 2 Relative error $\xi(\%)$ for beam-like problem ($R/d=14.5$, 3 elements)

$p \backslash q$	1	2	3
2	55.55	55.00	54.71
3	15.73	11.07	8.34
4	13.74	8.00	2.02
5	13.74	7.96	1.43
6	13.74	7.96	1.17
7	13.74	7.96	0.83

근사차수)에 의존함을 알 수 있는데, 이들 두 파라미터는 상호 보완적이라기 보다는 서로 독립적임을 알 수 있다. 즉, 어느 한 쪽으로의(모델차수 혹은 유한요소 파라미터) 세분화(refinement)만으로는 오차를 일률적으로(monotonously) 감소시킬 수 없음을 의미한다.

다음 예제는 가변 두께를 가진 보와 아치에 있어서의 모델조합에 따른 오차경향을 보여준다. 우선 Fig. 7은 식 (18)로 표현된 두께분포를 가진 보를 나타낸다.

$$d(x) = d_0 + \{\cos(\pi x/L) + 1\}/2 \quad (18)$$

이 예제에 있어서 2차원 선형 탄성이론을 기준한 전체 목표 상대오차(global relative error) ξ_G 를 10%로 한다. Table 3은 모든 유한요소들에 대해 $q=1$ 혹은 3인 균일한 경우와 여러 모델을 조합한 세 경우에 대한 유한요소별 상대오차와 전체 상대오차를 보여주고 있다.

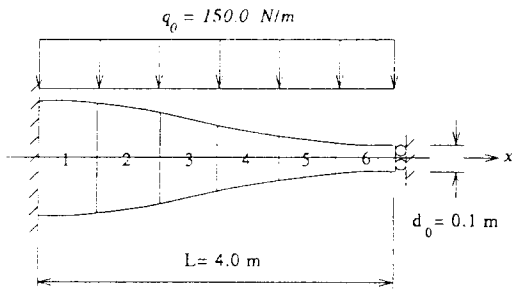


Fig. 7 Beam-like structure with non-uniform thickness(uniform six elements, $p=6$).

Table 3 Relative error of non-uniform thickness beam-like structure.

Case	Case 1		Case 2		Case 3	
	q	$\xi_K(\%)$	q	$\xi_K(\%)$	q	$\xi_K(\%)$
1	1	31.5	3	11.1	7	4.4
2	1	45.1	3	0.4	3	2.9
3	1	27.4	3	2.1	3	2.1
4	1	31.7	3	1.5	3	1.6
5	1	16.7	3	0.9	5	4.4
6	1	61.7	3	1.0	2	2.0
$\xi_G(\%)$		94.2		11.5		7.6

위 결과로부터 균일한 $q=1$ 혹은 3차수를 가진 고차이론은 목표한 10%를 벗어나고 있다. 모델들을 조합한 경우, 즉 Case 3은 목표를 만족하는데, 왼쪽 경계와 5번 유한요소에 상대적으로 높은 차수가 필요함을 볼 수 있다. 한편 균일한 모델을 적용한 경우들에서는 모델링 오차가 고르지 않는 반면, 모델을 조합한 경우에 있어서는 매우 고른 오차분포를 보여준다.

다음의 Fig. 8은 식 (19)로 표현된 두께분포를 가진 아치형 구조물로서 대칭 경계조건이 우측단에 주어져 있다. 앞의 예제처럼 세가지 경우에 대한 유한요소별 상대오차 ξ_K 그리고 전체상대오차 ξ_G 를 살펴본다.

$$d(\theta) = d_0 + \{\cos 3\theta + 1\}/2 \quad (19)$$

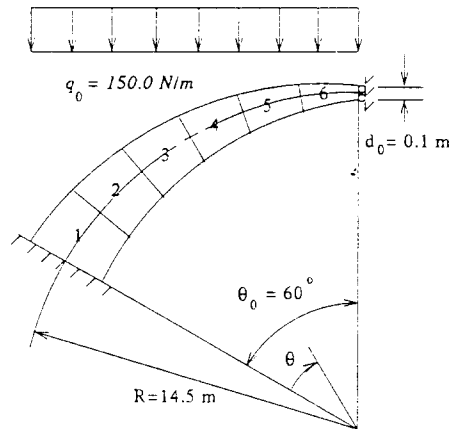


Fig. 8 Arch-like structure with non-uniform thickness(uniform six elements, $p=6$).

Table 4 Relative error of non-uniform thickness beam-like structure.

Case	Case 1		Case 2		Case 3	
	q	$\xi_K(\%)$	q	$\xi_K(\%)$	q	$\xi_K(\%)$
1	1	29.7	3	8.6	5	3.4
2	1	11.8	3	6.2	3	5.1
3	1	21.7	3	4.4	3	4.9
4	1	24.0	3	2.5	2	4.4
5	1	13.4	3	2.2	2	2.3
6	1	14.7	3	2.8	2	2.8
$\xi_G(\%)$		49.6		12.3		9.7

계산 결과치가 Table 4에 기록되어 있는데, 앞의 보형 구조물과 같이 $q=1$ 혹은 3으로 각각 균일한 고차이론을 적용한 경우는 목표 오차보다 큰 값을 나타낸다. 모델들을 조합한 Case 3은 요구 오차 범위를 만족하는데, 경계에서 상대적으로 높은 차수가 필요하고 내부에는 상대적으로 낮은 차수로도 가능하다.

6. 결 론

본 연구에서는 이차원 탄성체인 보 및 아치형상의 구조물을 위하여 고차이론을 이용한 유한요소 해석에 관하여 살펴보았다. 2, 3절의 이론적인 내용은 아치형 구조물을 기준하여 전개되었지만, 전체적인 내용은 곡률이 0인 보형 구조물에도 일관성있게 적용된다.

수치 결과로부터 우선 종래의 전통적인 Kirchhoff 이나 Reissner-Mindlin 이론은 상당한 오차를 수반함을 알 수 있고, 두께다항식의 차수가 증가할수록 오차가 상당히 감소함을 확인할 수 있다. 모델조합에 대한 결과로 부터는 전체적으로 균일한 오차를 얻기 위해서는 경계부근에서 상대적으로 고차의 차수가 요함을 알 수 있다. 따라서 전체오차의 상당부분은 경계부근과 같이 두께 방향으로의 변위가 복잡한 영역에서 발생함을 쉽게 알 수 있다.

본 논문에서와 같이 고차이론을 지역적인 영역에 적용하면, 높은 정도의 해석을 얻을 수 있다. 특히 제시된 모델조합의 개념이 본 논문에서는 이차원 탄성체에만 국한되어 있지만 다른 분야로도 응용이 가능한 잠재력을 가지고 있다.⁸⁾

참 고 문 헌

1. Szabo, B. A. and Sahrman, G. J., "Hierarchic Plate and Shell Models Based on p-Extensions," International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26, pp. 1855-1881, 1988.
2. Huang, H. C., Static and Dynamic Analysis of Plates and Shells, Springer-Verlag, 1988.
3. Babuska, I. and Li, L., "Hierarchic Modeling of Plates," Computers & Structures, 40, pp. 419-430, 1991.
4. Stein, E., Rust, W. and Ohnimus, S., "h- and d-Adaptive FE Methods for Two-Dimensional Structural Problems Including Post-Buckling of Shells," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 101, pp. 315-354, 1992.
5. Cho, J. R., A Study of Hierarchical Models of Structures using Adaptive *hp*-Finite Element Methods, Masters Thesis, The University of Texas at Austin, 1993.
6. Szabo, B. A. and Babuska, I., Finite Element Analysis, John Wiley, 1991.
7. Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., The Finite Element Method, Vol. 2, McGraw-Hill, 1991.
8. Oden, J. T., Zohdi, T. and Cho, J. R., "Hierarchical Modeling, A Posteriori Error Estimation and Adaptive Methods in Computational Mechanics," ECCOMAS 96, John Wiley & Sons, 1996.

(접수일자 : 1996. 10. 21)