

# 유한요소법을 이용한 축대칭 구조물의 비선형 거동해석

## Analyses of Non-linear Behavior of Axisymmetric Structure by Finite Element Method

구 영 덕\*      민 경 탁\*\*  
Koo, Young-Duk      Min, Kyung-Tak

---

### Abstract

A finite element method is programmed to analyse the nonlinear behavior of axisymmetric structures. The 1st order Mindlin shell theory which takes into account the transversal shear deformation is used to formulate a conical two node element with six degrees of freedom. To evade the shear locking phenomenon which arises in Mindlin type element when the effect of shear deformation tends to zero, the reduced integration of one point Gauss Quadrature at the center of element is employed. This method is the Updated Lagrangian formulation which refers the variables to the state of the most recent iteration. The solution is searched by Newton-Raphson iteration method. The tangent matrix of this method is obtained by a finite difference method by perturbing the degrees of freedom with small values. For the moment this program is limited to the analyses of non-linear elastic problems. For structures which could have elastic stability problem, the calculation is controlled by displacement.

**Keywords :** mindlin type element, transversal shear deformation, reduced integration, updated lagrangian formulation, newton-raphson method, tangent matrix, control by displacement

---

### 1. 서      론

본 논문에서는 축대칭 구조물의 비선형 탄성문제를 해석할 수 있는 수식을 유한요소 기법을 사용하여 프로그래밍 하였다. 본 연구의 궁극적인 목표는 이 프로그램에 소성과 접촉을 해석할 수 있는 모듈을 추가하여 소성가공 문제를 해석하는 것이다. 판과 셸이론중 첫번째 차수(first order) 이론으로 Kirchhoff이론과 Mindlin이론이 있다.

Kirchhoff이론은 횡방향 전단변형을 무시한

것으로, 변위가  $C^1$  연속조건을 만족해야 한다. 따라서 변위를 보간(interpolation)하는 함수의 차수가 높아지므로 문제를 공식화할 때 식이 복잡해진다. 본 논문에서 사용한 Mindlin이론은 횡방향 전단변형을 감안한 것이다. 자유도에 단면의 회전을 추가함으로써 변위가  $C^0$  연속조건만 만족하면 된다. Mindlin이론에 근거한 변위 방식의 유한요소법은 횡방향 전단변형의 영향이 작아질때 Kirchhoff이론의 결과를 재현하지 못한다는 것은 Shear locking 으로 알려진 사실이다.

---

\* 정희원·인천대학교 기계공학과 박사과정

\*\* 인천대학교 기계공학과 부교수

· 이 논문에 대한 토론을 1997년도 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1997년도 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

이와 같은 문제를 피하기 위한 첫번째 방법은 reduced order 적분 방법이다. 사용한 유한요소는 원뿔의 일부인 2절점 6자유도 요소이며, 시간  $t + \Delta t$ 의 가장 최근 반복계산 결과를 기준으로 한 Updated Lagrange 공식의 적분을 이용한다. 계산과정은 Newton-Raphon 반복계산법을 사용하였으며, 이에 필요한 접선행렬(tangent matrix)은 유한차분법을 이용하여 구하였다. 하중을 증가 시킴에 따라 발생하는 변형과정 중에 탄성 안정성 문제 즉 좌굴(buckling)이 발생하는 구조물은 변위에 의한 제어 방식을 이용하였다.

### 2. 비선형 문제의 해석 방법

비선형 문제를 해석하기 위하여, 작용외력이 시간에 따라 변화 한다고 가정하고,  $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t$  와 같이 시간을 단계적(step)으로 나누어서, 특정 시간(step)에 작용하는 외력을 할당한다. 시간이 0에서 출발하여 홀름감에 따라 구조물에 작용하는 외력도 변한다. 이때 각 시간마다 작용하는 외력에 해당하는 구조물의 평형위치(equilibrium position)를 계산한다. 시간 step 0에서 부터  $t$ 까지의 모든 단계(step)에서의 결과를 알고 있을 때 시간  $t + \Delta t$ 에서의 평형위치를 계산하는 절차를 수식화 하였다면, 이 계산 방법은 완전한 해를 구할때 까지 반복적으로 사용할 수 있을 것이다.

유한요소법을 이용하여 큰변화(대변형, 대변위)가 발생하는 비선형 문제를 해석함에 있어서 여러가지 종류의 Lagrangian formulation을 사용할 수 있다. 첫째로 변형전 형태(initial configuration)을 기준으로 하는 Total Lagrangian 방법, 두번째로 가장 최근 수행 완료한 step의 형태를 기준으로 하는 Updated Lagrangian in each step, 마지막으로 가장 최근에 수행한 반복계산(iteration) 결과를 기준으로 하는 Updated Lagrangian in each iteration 등을 들 수 있다.

여기서는 가장 최근 수행한 반복계산을 기준으로 하는 방법을 채택하였다.

Updated Lagrangian in each iteration를 위한

구조물의 형태(configuration)는 Fig. 1과 같이 3개의 형태로 구분할 수 있다.

즉,  $C^0$ 는 변형전 형태(initial configuration)이며,  $C^i$ 는 시간  $t$ 에 해당하는 작용외력에 대해서 평형조건을 만족하는 가장 최근에 수행완료한 step 시간  $t$ 에서의 형태,  $C^{i+\Delta t}$ 는 현재 수행중인 step으로 시간  $t + \Delta t$ 의 외력에 대해 아직 평형조건을 만족하지 못하고 있다.  $C^{i+\Delta t(i)}$ 는  $i$ 번째 반복계산 결과로서 가장 최근에 수행완료한 것이며,  $C^{i+\Delta t(i+1)}$ 는  $i+1$ 번째 반복계산으로 현재 수행중인 계산으로서 아직 그 결과를 모르고 있는 형태이다.

Fig. 1에서 각 변위의 증분은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \Delta \bar{U}_{step}^{(i+1)} = \Delta \bar{U}_{step}^{(i)} + \Delta \bar{U} \\ \bar{U}^{(i)} = \bar{U}^t + \Delta \bar{U}_{step}^{(i)} \\ \bar{U}^{(i+1)} = \bar{U}^t + \Delta \bar{U}_{step}^{(i+1)} \text{ 또는 } \bar{U}^{(i)} + \Delta \bar{U} \end{cases} \quad (1)$$

첨자  $i$  또는  $i+1$ 은 step  $t + \Delta t$ 에서의 반복계산(iteration)을 뜻한다.

### 3. 축대칭 쉘의 비선형 해석

#### 3.1 유한요소소에 의한 분할 가상일의 원리에 의하여

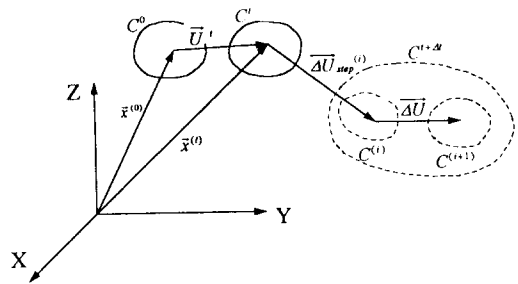


Fig. 1 Configurations of updated Lagrangian in each iteration

$$\delta II = \delta U_{int} - \delta W_{ext} = 0 \quad (2)$$

여기서  $II$ 는 전체 위치에너지(total potential),  $U_{int}$ 는 구조물 내에 축적된 내부 탄성에너지,  $W_{ext}$ 는 외력이 한 일이다.

Fig. 2에서  $\{r, \theta, Z\}$ 는 전체 원통좌표계(global cylindrical coordinates)이며,  $\{s, \theta, z\}$ 는 국부 곡선좌표계(local curvilinear coordinates)이다.

$\theta$ 는  $Z$ 축을 중심으로 측정하는 각도로서, 두 좌표계에서 동일하다. 쉘을 Fig. 2와 같이 2절점 축대칭 유한요소로 분할한다. 이 경우 좌표와 변위는 동일한 함수에 의하여 보간(interpolation)된다. 즉 절점 1, 2의 변위벡터를 국부 곡선좌표계(local curvilinear coordinates)에서

$$\langle u_n \rangle^e = \langle u_1 \ w_1 \ \beta_1 \ u_2 \ w_2 \ \beta_2 \rangle \quad (3)$$

라 하면, 요소 내부의 변위중  $s$ 축 방향의 변위  $u$ 는

$$u(s) = N_1 u_1 + N_2 u_2 \quad (4)$$

이다. 나머지 변위  $w, \beta$  그리고 절점의 원통좌표계내의 좌표  $r, Z$ 도 식(4)와 동일한 방법으로 보간된다. 여기서  $N_1, N_2$ 는 보간함수로서 다음과 같다.

$$N_1 = 1 - \frac{s}{L}; \quad N_2 = \frac{s}{L} \quad (5)$$

식 (2)중 내부 가상 에너지를 한개의 요소(element)에 대해 나타내면 다음과 같다.

$$\delta U_{int}^e = \langle u_n^* \rangle^e \{f_{int}\}^e =$$

$$\int_{V^e} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* dV = \langle u_n^* \rangle^e \int_{V^e} [B^T] \{\sigma\} dV \quad (6)$$

윗 식에서  $\{u_n^*\}$ 는 가상변위(virtual displacement),  $\epsilon_{ij}^*$ 는 가상변형율이다.

$$\begin{Bmatrix} \langle \sigma \rangle \\ \langle \epsilon \rangle \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \langle \sigma_{ss} \ \sigma_{\theta\theta} \ \tau_{sz} \rangle \\ \langle \epsilon_{ss} \ \epsilon_{\theta\theta} \ \gamma_{sz} \rangle \end{Bmatrix} \quad (7)$$

국부 곡선좌표계에서 변형율은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{ss}^* \\ \epsilon_{\theta\theta}^* \end{Bmatrix} = \{e_m^*\} + z \{x_i^*\} \quad (8)$$

여기서 membrane 변형율과 곡률(curvature), 횡 방향 전단 변형율은 각각 다음과 같다.

$$\{e_m^*\} = \begin{Bmatrix} e_s^* \\ e_\theta^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (u^* \cos \phi - w^* \sin \phi) / r \\ \beta_s^* \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\{x_i^*\} = \begin{Bmatrix} \beta_s^* \\ \beta^* \cos \phi / r \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\gamma_{sz}^* = \gamma_{sz}^* = \beta^* + \omega_s^* \quad (11)$$

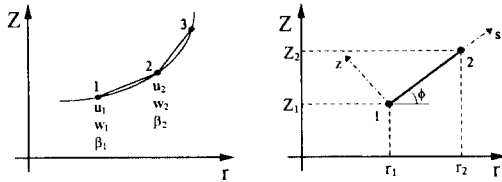
따라서 식 (5)를 이용하여 요소(element)내의 변위를 절점에서의 변위로 보간하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{ss}^* \\ \epsilon_{\theta\theta}^* \end{Bmatrix} = \left[ [B_m] + z [B_r] \right] \{u_n^*\}, \quad (12)$$

$$\gamma_{sz}^* = \langle B_c \rangle \{u_n^*\} \quad (13)$$

여기서

$$[B_m] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ \frac{N_1 \cos \phi}{r} & -\frac{N_1 \cos \phi}{r} & 0 & \frac{N_2 \cos \phi}{r} & -\frac{N_2 \cos \phi}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$



a) discretization and nodal displacements      b) geometry of an element

Fig. 2 Discretization by truncated cone element

$$[B_r] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 & \frac{N_1 \cos \phi}{r} & 0 & 0 & \frac{N_2 \cos \phi}{r} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\langle B_r \rangle = \langle 0 \quad -\frac{1}{L} N_1 \quad 0 \quad \frac{1}{L} N_2 \rangle \quad (16)$$

절점에서 나타낸 내부힘 벡터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{f_{int}\}^e &= \int_{V^e} [B^T] \{\sigma\} dV \\ &= \iiint [B^T] \{\sigma\} r d\theta ds dz \\ &= 2\pi \iint_0^L [B^T] \{\sigma\} r ds dz \end{aligned} \quad (17)$$

길이 방향의 적분을 요소의 중간에서 Gauss 1 점 적분을 행하면 식 (17)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{f_{int}\}^e = 2\pi r_m L \int [B^T] \{\sigma\} dz \quad (18)$$

여기서  $r_m$ 은 요소(element) 중간에서의  $r$  값,  $L$ 은 요소(element)의 길이이다.

$h$ 가 요소의 두께일때,  $z = \frac{h}{2}\xi$  (단,  $-1 < \xi < 1$ )이다. 따라서  $dz = \frac{h}{2}d\xi$  이므로

$$\{f_{int}\}^e = \pi r_m L h \int_{-1}^1 [B^T] \{\sigma\} d\xi \quad (19)$$

두께 방향의 적분은 Lobatto 적분법<sup>4)</sup>을 따른다. 이때 응력  $\{\sigma\}$ 는 식 (29)에 의해 구한다. 위에서 구한  $\{f_{int}\}^e$ 는 국부 곡선좌표계에서 표현되어 있으므로 전체 원통좌표계로 변환하면 다음과 같다.

$$\{f_{int}\}_{gl}^e = [TRLG] \{f_{int}\}_{loc}^e \quad (20)$$

여기서 행렬  $[TRLG]$ 는 국부 곡선좌표계(local curvilinear coordinates)로 부터 전체 원

통좌표계(global cylindrical coordinates)로 변환하는 행렬이다.

$$[Q] = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 일때} \quad (21)$$

$$[TRLG] = \begin{bmatrix} [Q] & 0 \\ 0 & [Q] \end{bmatrix} \quad (22)$$

셀에 작용하는 외력은 압력 형태의 분포하중과 절점에 작용하는 집중하중 두 가지로 생각할 수 있다. 이중 집중하중은 전체 좌표계에서 표현하여 직접 입력하면 된다. 단 축대칭 요소를 사용하고 있으므로 하중이  $P$  N/m로 주어졌을 경우 절점에 실제로 작용하는 하중을 입력해야 하므로 해당 절점이 대표하는 실제 길이를 곱하여 입력한다. 예를 들면 절점의 위치가  $r$ 일때  $2\pi r P$ 를 입력한다.

압력형태의 분포하중에 기인한 각 요소의 절점에서의 외력은 식 (2)의 외력에 의한 가상일을 한개의 요소에 대해서 나타내었을 때 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= \langle u_n^* \rangle \{f_{ext}\}^e = \int_{A^e} (\omega^* f_z) dA \\ &= \iint (\omega^* f_z) r d\theta ds = 2\pi \int_0^L \omega^* f_z r ds \\ &= \langle u_n^* \rangle 2\pi \int_0^L \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \\ 0 \\ 0 \\ N_2 \\ 0 \end{bmatrix} f_z r ds \end{aligned} \quad (23)$$

$r = N_1 r_1 + N_2 r_2$ 를 대입한후 정확한(exact) 적분을 행하면, 국부 곡선좌표계에서의 외력은 다음과 같다.

$$\langle f_{ext} \rangle_{loc}^e = \frac{\pi f_z L}{3} \langle 0 \quad a_1 \quad 0 \quad 0 \quad a_2 \quad 0 \rangle \quad (24)$$

여기서,

$$a_1 = 2r_1 + r_2 \quad a_2 = r_1 + 2r_2 \text{이다.}$$

식 (24)를 전체 원통좌표계에서 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \langle f_{ext} \rangle_{gt}^e = \frac{\pi f_z L}{3} \langle -\sin \phi a_1 \cos \phi a_1 0 \\ -\sin \phi a_2 \cos \phi a_2 0 \rangle \end{aligned} \quad (25)$$

### 3.2 응력의 증분

시간  $t$ 에서 Cauchy 응력을 알고,  $t + \Delta t$ 에서의 응력을 국부 곡선좌표계에서 구하면 다음과 같다.

$$\{\sigma\}^{t+\Delta t} = \{\sigma\}^t + \{\Delta\sigma\} \quad (26)$$

시간  $t$ 와  $t + \Delta t$ 사이의 응력의 증분  $\{\Delta\sigma\}$ 는 두 시간 사이의 변위의 증분  $\{\Delta u\}^e$ 로부터 구한 변형율의 증분  $\{\Delta\epsilon\}$ 을 응력과 변형율 관계식에 적용하여 구한다. 변형율 증분은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \{\Delta e_m\} &= [B_m] \{\Delta u_m\}^e \\ \{\Delta \chi\} &= [B_\chi] \{\Delta u_m\}^e \\ \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_{ss} \\ \Delta \epsilon_{\theta\theta} \end{Bmatrix} &= \{\Delta e_m\} + z \{\Delta \chi\} \\ \Delta \gamma_c &= \langle B_c \rangle \{\Delta u_m\}^e \\ \langle \Delta \epsilon \rangle &= \langle \Delta \epsilon_{ss} \quad \Delta \epsilon_{\theta\theta} \quad \Delta \gamma_c \rangle \end{aligned} \quad (27)$$

응력 증분은 식 (29)의 응력-변형율 관계식에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{\Delta\sigma\} = [H] \{\Delta\epsilon\} \quad (28)$$

### 3.3 응력과 변형율 관계식

탄성문제의 경우 응력과 변형율의 관계식은 다음과 같다.

$$\{\sigma\} = [H] \{\epsilon\} \quad (29)$$

여기서,

$$[H] = \begin{bmatrix} [H_d] & 0 \\ 0 & H_c \end{bmatrix}$$

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{ss} \quad \sigma_{\theta\theta} \quad \tau_c \rangle$$

$$\langle \epsilon \rangle = \langle \epsilon_{ss} \quad \epsilon_{\theta\theta} \quad \gamma_c \rangle$$

$\sigma_{ss}, \sigma_{\theta\theta}, \epsilon_{ss}, \epsilon_{\theta\theta}, [H_d]$ 는 중간면으로 부터  $z$  만큼 떨어진 점  $q$ 에서의 응력, 변형율, 탄성계수 행렬이다.  $\tau_c = \tau_{sz}, \gamma_c = \gamma_{sz}$ 로서  $s$ 축과  $z$ 축 사이의 전단응력과 변형율이다.

등방성 재질, 축대칭 구조물의 경우,

$$[H_d] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}$$

$$[H_c] = [G_{sz}] = \frac{Ek}{2(1+\nu)} \quad (30)$$

여기서  $E$ 는 영율,  $\nu$ 는 poisson 비,  $k = \frac{5}{6}$ 는 전단 보정계수이다.

### 3.4 중간 평면의 회전

시간  $t \leq \tau \leq t + \Delta t$ 와 같은 하나의 계산 step이 수행되는 동안 구조물은 큰변화(대변형, 대변위)를 겪으므로, step 전후의 변위, 특히 회전을 무시할 수 없다. 그러므로 하나의 계산 step 중 발생한 변위의 증분  $\Delta \bar{U}_{step}$ 에 따른 회전을 계산하여  $\{f_{int}\}_{loc}^e$ 를  $\{f_{ext}\}_{gt}^e$ 로 변환 시키는 변환 행렬에 반영하여야 한다.

변위  $\Delta \bar{U}_{step}$ 과 시간  $t$ 에서의 위치벡터  $\bar{X}(t)$ 로부터 변형 구배 텐서(Deformation gradient tensor)와 오른편 코시-그린 텐서(Right Cauchy-Green tensor)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[\Delta F] = \left[ \frac{\partial (\bar{X}(t) + \Delta \bar{U})}{\partial \bar{X}(t)} \right] \quad (31)$$

$$[\Delta C] = [\Delta F^T] [\Delta F] \quad (32)$$

다음과 같은 관계식으로 부터 주 좌표계(principal axes)내의 신장(stretch)를 구할 수 있으나, 우리의 경우 축대칭 문제이므로 좌표축  $s, \theta,$

$z$  가 이미 주 좌표계 이므로 추가 계산이 필요 없다.

$$[\mathcal{L}C] = [M][\Delta\lambda^2][M^T] \quad (33)$$

순수한 신장행렬과 회전행렬은 각각 다음과 같다.

$$[\Delta U] = [\mathcal{L}C^{1/2}]$$

$$\text{즉 } [\Delta U] = [M][\Delta\lambda][M^T] \quad (34)$$

$$[\Delta R] = [\Delta F][\Delta U^{-1}] \quad (35)$$

즉, 시간  $t$ 에서 행렬  $[Q_i]$ 로 표현되던 요소는 시간  $t' = t + \Delta t$ 에서는  $[Q_{i'}]$ 의 자세를 취하게 된다.

$$[Q_{i'}] = [Q_i][\Delta R] \quad (36)$$

### 3.5 한 단계내에서의 변형을 증분과 셀의 두께

첫번째 방법으로 각 반복계산(each iteration)의 변위증분  $\Delta U$ 에 해당하는 변형을 증분  $\langle \Delta e_m \rangle$ ,  $\langle \Delta \lambda_i \rangle$ ,  $\Delta \gamma_i^c$ 를 계속 더해가는 것이다.

$$\begin{cases} \langle \Delta e_m \rangle = \sum_i \langle \Delta e_m^i \rangle \\ \langle \Delta \lambda_i \rangle = \sum_i \langle \Delta \lambda_i^i \rangle \\ \Delta \gamma_i^c = \sum_i \Delta \gamma_i^c \end{cases} \quad (37)$$

두번째 방법으로 membrane 변형율은 순수한 신장행렬  $[U]$ 로 부터 직접 계산할 수도 있다.

한 step내의 변위 증분  $\Delta U_{step}$ 로 부터 계산한 순수한 신장행렬은 다음과 같다.

$$[\Delta U] = \begin{bmatrix} \Delta\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\lambda_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\lambda \end{bmatrix} \quad (38)$$

$\Delta\lambda_\theta$ ,  $\Delta\lambda_\theta$ 를 먼저 구한후, 변형중 부피가 일정하다는 가정아래  $\Delta\lambda_z = 1/\Delta\lambda_\theta \Delta\lambda_\theta$ 를 구한다. 현재 step에서의 셀의 두께는  $h^{t+\Delta t} = \Delta\lambda h^t$ 이다.

Membrane logarithmic 변형을 증분은  $s$ 와  $\theta$  방향에서 다음과 같다.

$$\begin{cases} \Delta e_s = \ln \Delta \lambda_s \\ \Delta e_\theta = \ln \Delta \lambda_\theta \end{cases} \quad (39)$$

### 3.6 Newton-Raphson 해법에 의한 반복계산

가상일의 원리로 부터  $\delta U_{int} = \delta W_{ext}$ 이다. 즉,

$$\langle U^* \rangle \{F_{ext}\} - \langle U^* \rangle \{F_{int}\} = 0 \quad (40)$$

여기서  $\{F_{int}\}$ 와  $\{F_{ext}\}$ 는 구조물 전체의 자유도에 대한 것으로서 식 (20)과 (25)의 한개의 요소에 대한 힘 벡터,  $\{f_{int}\}^e$ ,  $\{f_{ext}\}^e$ 를 조합하여 구한 것이다. 이로부터 다음과 같이 나머지(residual)를 정의한다.

$$\{R(\bar{U})\} = \{F_{ext}\} - \{F_{int}\} \quad (41)$$

Newton-Raphson 해법에 의한 반복계산은 이미 수행한  $i$ 번째 반복계산의 해가  $\bar{U}^{(i)}$ 일때 이에 해당하는 나머지(residual)  $\{R(\bar{U}^{(i)})\} \neq \{0\}$ 인 경우,  $i+1$ 번째 반복계산에서 나머지가  $\{0\}$ 에 근접하도록 변위벡터  $\{\bar{U}\}$ 를 수정하는 기법이다.

$$\{R(\bar{U}^{(i)} + \Delta \bar{U})\} \cong \{R(\bar{U}^{(i)})\} + \left[ \frac{\partial \{R\}}{\partial \bar{U}} \right] \Delta \bar{U} = \{0\} \quad (42)$$

$$-\left[ \frac{\partial \{R\}}{\partial \bar{U}} \right] \{\Delta \bar{U}\} = [K_T] \{\Delta \bar{U}\} = \{R(\bar{U}^{(i)})\} \quad (43)$$

여기서 접선행렬(tangent matrix)  $[K_T]$ 는  $\bar{U}^{(i)}$ 에 서 계산한 것이다.

나머지  $\{R(\bar{U}^{(i)})\} = \{F_{ext}\}^{t+\Delta t} - \{F_{int}(\bar{U}^{(i)})\}$ 를 구하는데 있어서 일반적으로  $\{F_{ext}\}$ 는 변위에 무관하고 내부힘  $\{F_{int}\}$ 의 계산은  $\bar{U}^{(i)}$ 에 해당하는 형태에 대한  $V^{t+\Delta t(i)}$ 를 기준으로 한 적분에 의해 구한다.

$$\bar{U}^{(i+1)} = \bar{U}^{(i)} + \Delta \bar{U} \quad (44)$$

위와 같은 새로운 변위를 가지고 변위의 증분

$\Delta U$ 의 변화량이 일정한 기준이하로 작아질 때 까지 계산을 반복한다.

### 3.7 접선행렬의 계산

행렬  $[K_T]$ 는 수식으로 표현하여 구하는 방법과 유한차분법(finite difference)을 사용하여 구하는 방법이 있는데, 여기서는 유한 차분법을 사용하였다. 유한차분법은 전진법, 후퇴법, 중앙법 등이 있는데 다른 저자들의 경험에 의하면 중앙법이 가장 우수하므로 중앙법을 사용하였다.

$$[K_T] = - \frac{\{R(\{U\} + \{dU\})\} - \{R(\{U\} - \{dU\})\}}{2\{dU\}} \quad (45)$$

즉 각 자유도에 차례로 교란(perturbation)을 주어 가면서 계산을 수행한다.

## 4. 계산 제어 방법

구조물의 임의의 점에 작용하는 외력  $F_0$ 의 영향으로 발생하는 Fig. 3과 같은 구조물의 비선형 거동에 대해 생각해 보자. 여기서  $u_q$ 는 구조물의 대표적인 자유도의 변위이다.

### 4.1 작용 외력에 의한 제어

경로 OAB는 각 단계(step)마다 하중계수  $\lambda$ 를 점진적으로 증가시켜 이에따른 반응  $u_q$ 를 구하면

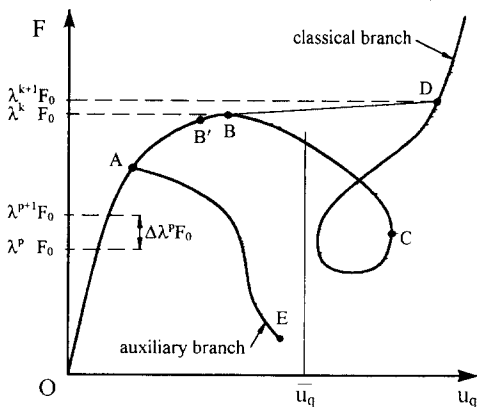


Fig. 3 Applied load and displacement

아무런 어려움 없이 따라갈 수 있다. 여기서 각 step에서의 하중계수 증분  $\Delta \lambda^p$ 는 사용자가 적절한 값을 선택한다. 즉 단계  $p$ 에서의 하중계수를  $\lambda^p$ 라 하였을때,

$$\{F_{ext}\}^p = \lambda^p \{F_0\} \quad (46)$$

이므로, 나머지(residual)는  $\{R\} = \{F_{ext}\}^p - \{F_{int}\}$ 이다.

### 4.2 변위에 의한 제어

그러나 점 B 근처에 다다르면 문제가 발생한다. 위에서 설명한 방법으로는 한계점 B를 통과하여 전진할 수 없다. 하중계수  $\lambda$ 를 증가시키면 기껏해야 점 B로 부터 점 D로 곧장 뛰어넘게 되고, 일반적으로는 계산이 발산하고 만다. 왜냐하면 상태 B와 D는 그 조건의 차이가 너무 크기 때문이다. 이와같은 중간상태를 알수 있어야 계산을 계속할 수 있으며, 또한 구조물의 거동을 완전히 알 수 있다. 한계점 B를 극복하기 위해서 자유도  $q$ 의 변위를  $\bar{u}_q$ 로 설정하고 하중계수  $\lambda$ 를 미지수로 취급하는 것이다. 다시 말하면 각 단계에서 변위  $\bar{u}_q$ 를 적절히 변화(증가)시켜 가면서, 이에 해당하는 평형상태를 만족하는 하중계수를 반복계산에 의하여 찾아내는 것이다. 즉 단계  $p$ 에서 다음과 같은 문제의 해를 구하고자 하는 것이다.

$$\begin{cases} \{F_{ext}\}^p = \lambda^p \{F_0\} \\ u_q = \bar{u}_q \\ \{R(U, \lambda^p)\} = \{F_{ext}\}^p - \{F_{int}(U)\} = \{0\} \end{cases} \quad (47)$$

여기서 미지수는 하중계수  $\lambda$ 와 미리 설정된  $\bar{u}_q$ 를 제외한 변위벡터  $\{U\}$ 이다.

## 5. 계산결과

앞서 설명한 수식으로 유한요소 기법을 이용한 계산프로그램을 작성하였다. 문제 해결의 범위, 즉 적용 범위는 대변위에 기인한 기하학적(geometrical) 비선형 문제로서 구조물의 각 부분에서

의 변형은 작은 상태로 남아있어 탄성영역을 벗어나지 않는 상태이다. 작용하중을 여러 단계(step)로 나누어서 점진적으로 변화시켰으므로 각 step에서 응력증분과 변형율증분은  $\{\Delta\sigma\} = [H]\{\Delta\epsilon\}$  와 같은 선형 탄성 법칙을 만족한다.

### 5.1 균일한 분포하중을 받는 고정된 원형

둘레가 고정된 원형판(cantilevered circular plate)이 균일한 분포하중을 받고 있다. 판의 형태, 경계조건, 재료의 기계적특성은 Fig. 4와 같다. Liu<sup>11)</sup>와 같이 길이가 동일한 8개의 쉘 요소를 이용하여 계산하였다. Fig. 5는 무차원화된 하중과 변위  $q' = \frac{qa^4}{Eh^4}$ ,  $\xi = \frac{w_c}{h}$  를 좌표로 계산 결과를 나타낸 것이다. 이 문제의 해석적(analytic) 해는 Timoshenko 등<sup>7)</sup>이 구한 바 있는데 좋은 일치성을 보이고 있다.

### 5.2 Belleville spring의 snap-through

Belleville spring이라 불리는 절단된 원뿔형태의 쉘이 Fig. 6과 같이 집중하중을 받고있다. 점

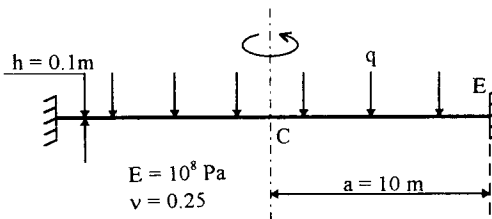


Fig. 4 Cantilevered circular plate

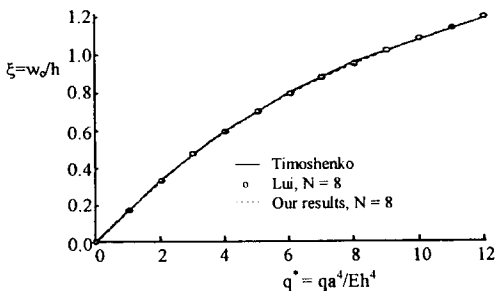


Fig. 5 Displacement-load curve

B는 집중하중 P이외에 별도의 구속조건이 경계조건으로 주어지지 않으며, 점 A에서는 Z축 방향의 변위(W=0)만이 강제되어 있다. 이 문제는 Surana<sup>8)</sup>가 parabolic element를 이용하여, 그리고 Teng과 Rotter<sup>9)</sup>가 cubic hermite type element를 이용하여 해석한 바 있다. 우리는 Liu<sup>11)</sup>와 같이 길이가 일정한 5개의 요소를 이용하여 변위 제어 방식으로 계산을 수행하였다. Fig. 7에서 Liu<sup>11)</sup>의 곡선과 차이가 나는 것을 볼 수 있는데, Liu<sup>11)</sup>는 tangent matrix를 수식을 이용하여 구하였고, 우리는 유한차분법을 이용하여 구한대기인한 것으로 보인다. 여기서 집중하중 P를 입력시킬때 주의할 점은 절점 B에 작용하는 실제 힘을 사용해야 하는 것이다.

축 힘 =  $2\pi R_2 * P$ 를 입력시킨다.

### 5.3 축대칭 집중하중을 받는 구형셸

Fig. 8은 반경 r인 위치에 축대칭 집중하중 P의 영향아래 탄성변형 상태에 있는 구형셸(spherical shell)의 형상과 기계적 성질을 보여주고 있다. Liu<sup>11)</sup>와 같이 길이가 동일한 24개의 쉘 요소를 이용하여 변위제어방식으로  $\frac{r}{a}=0$ ,  $\frac{r}{a}=0.25$ ,  $\frac{r}{a}=0.42$ 의 세가지 경우에 대해 해를 구하였다.

셸 중앙의 변위에 대해 하중 곡선을 나타낸 것이 Fig. 9이다. 이 그림에서 하중은 길이당 힘이 아니고 실제로 작용하는 전체 힘이다. 셸의 중앙에 ( $r/a=0$ )하중이 걸리는 경우는 Mescall<sup>10)</sup>의 해석적 방법에 의한 해가 존재한다. Wood와 Zienk-

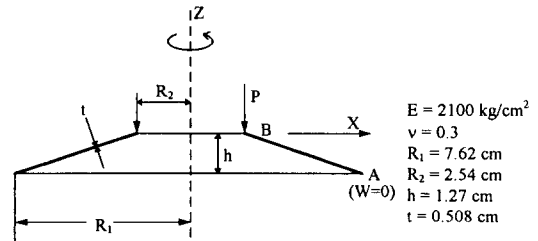


Fig. 6 Belleville spring of snap-through



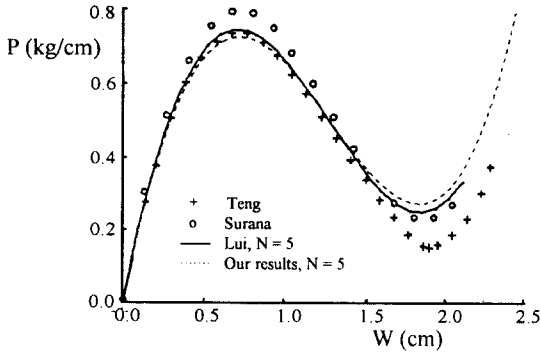


Fig. 7 Load-displacement curve of point B

있는 구형셸의 형상과 기계적 성질은 다음 Fig. 10과 같다. 이 문제는 Kotnishin과 Isanvaeva<sup>12)</sup>이 해석적(analytic) 방법으로 해를 구하였고, Bath 등<sup>13)</sup>, Teng과 Rotter<sup>9)</sup>가 수치적 기법으로 해를 구한 바 있다. 여기서는 Liu<sup>1)</sup>와 같이 길이가 동일한 셸(bending 해석 가능) 요소 20개를 이용하여 변위제어 방식으로 해를 구하였다. 계산 결과를 무차원화한 변위와 하중  $\frac{W_c}{t}$ 와  $\frac{qa^4}{Et^4}$ 를 좌표로한 것이 Fig. 11이다. 우리의 계산 결과는 Liu<sup>1)</sup>의 곡선과 정확하게 일치한다.

### 6. 결 론

본 논문에서는 유한요소법을 이용하여 축대칭 구조물의 비선형 탄성문제를 해석하였다. 우리가 사용한 Mindlin 이론은 횡방향 전단변형을 감안한 것으로서 Shear locking 현상을 피하기 위해

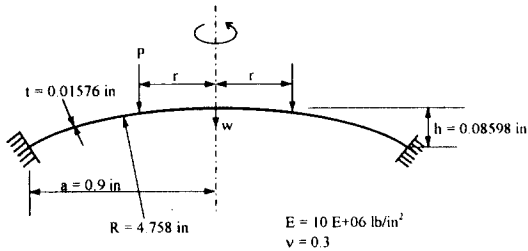


Fig. 8 Spherical shell under axisymmetric concentrated load

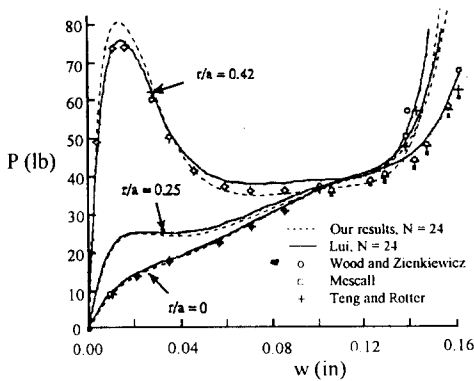


Fig. 9 Total load-displacement curve

iewicz<sup>11)</sup>가 2차원 isoparametric element를 이용하여  $r/a=0$ 과  $r/a=0.42$ 인 경우의 해를 구하였고, Teng과 Rotter<sup>9)</sup>가 cubic hermite type element를 이용하여 해를 구하였다.

### 5. 4 균일한 압력하중하의 구형

균일한 압력하중의 영향아래 탄성변형을 겪고

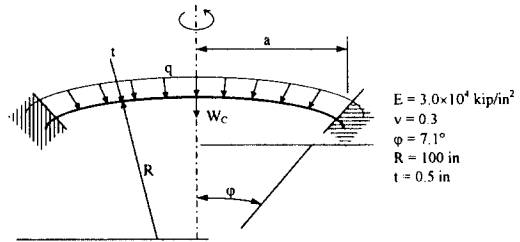


Fig. 10 Spherical shell under uniform distributed load

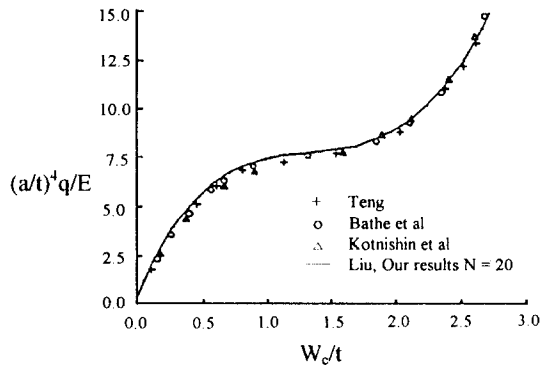


Fig. 11 Load-displacement curve

Reduced order 적분방법을 사용하였다. 사용한 유한요소는 원뿔의 일부인 2절점 6자유도 요소이며, 시간  $t + \Delta t$ 의 가장 최근 반복계산 결과를 기준으로 한 Updated Lagrange 공식의 적분을 이용하였다. 계산과정은 Newton-Raphon 반복계산법을 사용하였으며, 이에 필요한 접선행렬(tangent matrix)은 유한차분법을 이용하여 구하였다. 하중을 증가시킴에 따라 발생하는 변형과정중에 탄성 안정성 문제, 즉 좌굴(buckling)이 발생하는 구조물은 변위에 의한 제어방식을 이용하였다.

우리의 해석법을 검증하기 위하여 많은 연구자들이 사용한 구조물에 대해 적용한 결과 좋은 일치를 보였다.

위의 검증을 통하여 본 논문의 프로그램에 소성과 접촉을 해석할 수 있는 모듈을 추가하면 우리의 궁극적 목표인 소성가공문제를 해석할 수 있을 것으로 기대된다.

### 감사의 글

본 연구는 1996년도 인천대학교의 연구비 지원에 의해 수행되었으며, 이에 감사의 뜻을 표합니다.

### 참고 문헌

1. X. J. Liu, "Modelisation des grandes deformations elasto-plastiques de coques axisymetriques", 프랑스 UTC 대학, 박사학위 논문, 1992.
2. K. J. Bathe, "Finite element procedures in engineering analysis", Prentice-Hall, New Jersey, 1982.
3. J. L. Batoz, G. Dhatt, "Modelisation des structures par elements finis", Vol. I, II, III, Hermes, Paris, 1992.
4. T. J. R. Hughes, "The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis", Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
5. L. E. Malvern, "Introduction to the mechanics of a continuous medium", Prentice-Hall, New Jersey, 1969.
6. P. Pol, "Simulation du comportement elasto-plastique de coques minces par element finis", 프랑스 UTC 대학, 박사학위 논문, 1992.
7. S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, "Theory of plates and shells", McGraw-Hill, New York, 1959.
8. K. Surana, "Geometrically nonlinear formulation for axisymmetric shell elements", Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 18, 1982, pp. 477-502.
9. J. G. Teng and J. M. Rotter, "Elastic-plastic large deflection analysis of axisymmetric shell", comput. & struct., Vol. 31, No. 2, 1989, pp. 211-233.
10. J. F. Mescall, "Large deflection of spherical shells under concentrated loads", J. Appl. Mech., Vol. 32, 1965, pp. 936-938.
11. R. D. Wood and O. C. Zienkiewicz, "Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells", Comput. & Struct., Vol. 7, 1977, pp. 725-735.
12. H. S. Kotnishin and F. S. Isanbaeva, "Flexible plates and panels", Nanka, Moscow, 1968.
13. K. Bathe, E. Ramm and L. Wilson, "Finite element formulations for large deflection analysis", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 9, 1975, pp. 353-386.

(접수일자 : 1996. 10. 23)