

S. I. 기법을 이용한 유한요소모델의 신뢰도 제고에 관한 연구

A Study on Improving the Accuracy of Finite Element Modeling Using System Identification Technique

양 경 태*
Yang, Kyung-Taek

요 약

본 연구에서는 경계부 및 연결부를 지닌 기계 구조물의 유한 요소모델 수립시 상대적으로 불확실성이 많은 경계부 및 연결부를 정확히 모델링하여 전체 구조계에 대한 해석적 모델의 신뢰도를 제고하는데 그 목적을 두고, 현장에서 간단히 측정할 수 있는 측정 데이터와 축약된 형태의 유한요소모델을 이용하는 S. I. 기법을 제시하였다. 제시된 방법은 연결부를 제외한 연속체를 유한요소법으로 모델링하고 연결부의 동적 계수를 변수 상태로 하여 시간 영역에서의 비선형 상태 방정식을 구성하였으며 계수 규명 문제를 비선형 상태 방정식의 상태 추정 문제로 변환하여 해결하였다. 두 가지 예제에 대한 수치 해석을 통하여 제시된 기법의 타당성을 검증하였다.

Abstract

Mechanical structures are composed of substructures connected by joints and boundary elements. While the finite element representation of plain substructures is well developed and reliable, joints have a lot of uncertainties in being accurately modelled and affect dynamic behavior of a total system. In order to improve the accuracy of a finite element model, a new method is proposed, in which reduced finite element model is combined with a system identification technique. After substructures except joints are modelled with finite element method and joint properties are represented by parameter states, non-linear state equation is derived in which parameter states are multiplied by physical states such as displacements and velocities. So the joint parameter identification is transformed into non-linear state estimation problem. The methods are tested and discussed numerically and the feasibility for physical application has been demonstrated through two example structures.

Keywords : finite element method, system identification, substructure, joints, reduction technique, nonlinear state equation

1. 서 론

최근 들어 컴퓨터의 보편화와 상용 프로그램의

개발 및 보급으로 유한요소 해석 기법이 기계 구조물의 동적 해석에 널리 사용되어 지고 있으며 이와 더불어 해석 결과의 신뢰도 제고가 요구되

* 정회원·대림전문대학 메카트로닉스과 전임강사

· 이 논문에 대한 토론을 1997년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1997년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

어 지고 있다. 이러한 상황에서 대상 구조물의 정확한 해석적 모델 수립이 필요하며 이는 구조물의 설계시 계를 정량적 또는 정성적으로 평가하는데 매우 유용하게 사용되며 이를 위하여 실험적 결과를 이용하여 유한요소 모델의 신뢰도를 개선시키려는 많은 연구가 진행되어 왔다^{1)~3)}.

이와 같은 연구는 70년대초 정역학적 관점에서 시작되어⁴⁾, 80년대에는 실험 장비 및 측정 기술의 발달로 동적 데이터를 이용하게 되었으며 이들 연구의 주된 흐름은 유한요소모델의 질량, 감쇠, 강성 행렬 전체에 불확실성(uncertainty)이 존재한다는 가정하에 실험 데이터를 이용하여 해석적 모델의 신뢰도를 개선하는 것이나 실험량과 규명될 계수가 많아 현장 엔지니어들이 적용하기에는 아직 많은 제약이 따르고 있다⁵⁾. 일반적인 기계 구조물은 Fig. 1과 같이 부구조(substructure)로 생각할 수 있는 연속체와 볼트나 베어링과 같은 연결 부위 및 경계부로 구성되어 지며 연속체는 유한요소법과 같은 해석적 방법으로 정확한 모델링이 가능하나 연결부 및 경계부의 강성과 감쇠 같은 동적 계수는 해석적으로 구하기 힘들어 적절한 가정이나 공학용 핸드북에 의지하여 입력되므로 전체 구조계에 대한 해석적 모델의 신뢰도가 저하되고 특히 연결부위 및 경계부의 동적 계수는 전체 구조계의 응답에 많은 영향을 미치므로 해석 결과가 실측 결과와 일치하지 않는 문제점을 야기시키는 경우가 많다. 또한 모델러(modeller)나 유한요소 프로그램의 프리 프로세서(preprocessor)가 널리 보급되어 비교적 복잡한 형상을 지닌 연속체도 쉽게 모델링이 가능하나 연결부나 경계부의 강성과 감쇠

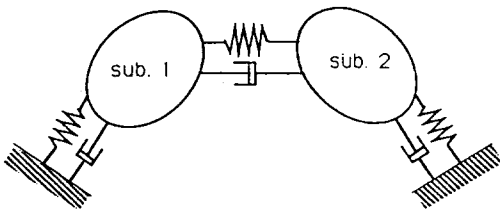


Fig. 1 Structure connected with joints

와 같은 동적 계수의 결정에는 이 분야의 엔지니어들도 어려움을 토로하고 있는 실정이다.

본 연구에서는 이와 같은 문제점을 해결하기 위하여 S. I. (System Identification) 기법을 유한요소모델에 결합하여 불확실성이 큰 연결 부위나 경계부의 동적 계수를 규명하여 전체 구조계에 대한 유한요소 모델의 신뢰도를 제고하기 위한 방법을 제시하였다. 현장에서 간단히 측정할 수 있는 데이터를 사용하는 S. I. 기법을 유한요소모델과 같이 많은 자유도를 지닌 해석적 모델과 결합하기 위하여 좌표계를 축약하였으며 축약된 유한요소모델에 S. I. 기법을 적용하였다. 제시된 방법의 전체적인 과정은 Fig. 2 와 같이 연결 부위 및 경계부를 제외한 부분을 유한요소법과 같은 해석적 방법으로 모델링하고 유한요소모델의 단점인 많은 자유도를 줄이기 위해 관심 있는 주파수 영역 내에서 해석적으로 구한 한정된 갯수의 모드 벡터를 이용하여 좌표계를 축약한 뒤, 축약된 운동 방정식에 연결 부위의 계수를 변수 상태(parameter state)로 결합하여 전체계에 대한 연속 시간 영역에서의 상태 방정식(augmented state equation)을 구성하였다. 이와 같은 상태 방정식은 비선형성을 지니게 되며 연결부 및 경계부의 동적 계수를 규명하는 문제는 비선형 상태방정식의 상태를 추정하는 문제로 변환된다.

따라서 본 연구에서는 최소자승법의 순차적 형태(recursive form)인 비선형 필터(nonlinear filter)를 S.I. 기법으로 선정하고 현장에서 간단히

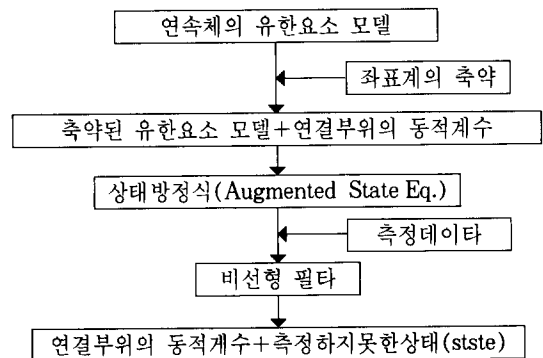


Fig. 2 Schematic flow of joint parameter identification

구할 수 있는 측정데이터와 축약된 유한요소모델을 이용하여 연결부 및 경계부의 동적계수를 규명하였으며 수치 해석을 통하여 제시된 방법을 검증하였다.

2. 수학적 모델

2.1 좌표계의 축약

연결부 및 경계부가 제외된 연속체를 유한요소 모델로 정확하게 표현하기 위하여는 되도록 많은 수의 자유도가 필요한데 이들은 시간 영역에서 미분 방정식의 형태로 기술되므로 연산의 효율성을 높이기 위해 좌표계의 축약이 필요하다. 또한 실제 실험에서 측정되는 데이터는 불완전(incomplete)하기 때문에 계수 규명의 관점에서 전체 자유도를 가진점과 측정점 및 연결 부위를 포함하는 최소한의 자유도로 표현하면 효과적이다.

좌표계의 축약에는 정적 축약과 동적 축약이 있는데 정적 축약은 관심 있는 좌표 성분(master dof)에서 정적 하중에 의한 변위가 축약 전후에 같아야 한다는 제한 조건으로 좌표계를 축약시키는 방법으로 전체 좌표계와 축약된 좌표계를 연결하는 변환 행렬이 강성 행렬만으로 표현된다^{6), 7)}. 이 축약법은 정적인 관점에서는 의미가 있지만 축약 전후에 고유치(eigen value)가 달라져 동적 응답의 관점에서는 고차 모드에서 많은 오차가 발생하게 된다. 동적 축약은 임의의 주파수 성분을 가지는 입력에 대해 관심 있는 좌표 성분에서 축약 전후의 응답이 같아야 한다는 조건으로 좌표계를 축약시키게 되는데 엄밀한 의미로는 축약 전후의 주파수 응답함수가 같아야 한다⁸⁾. 이러한 조건을 만족시키기 위하여는 전체 좌표계와 축약된 좌표계의 관계식인 변환 행렬이 주파수의 함수가 되어 축약된 구조계의 질량, 감쇠, 강성 행렬이 주파수의 함수가 되고 이러한 구조계의 행렬을 주파수의 다항식으로 근사시키면 시간 영역에서는 고차 미분 방정식으로 표현되어 변수 규명이 어렵게 된다^{9), 10)}. 시간 영역에서 연결 부위의 계수를 규명하기 위해서는 주파수 의존성이 없는 질량, 강성, 감쇠행렬을 구해

야 하므로 본 연구에서는 관심 있는 주파수 영역 내의 모드 벡터(modal vector)를 이용하여 좌표계를 축약하였다.

경계부 및 연결 부위의 강성과 감쇠를 고려하여 n 개의 자유도를 지닌 구조계에 대해 운동 방정식을 세우면 아래와 같다.

$$[M]\{\ddot{X}\} + ([C] + [C_s])\{\dot{X}\} + ([K] + [K_s])X = \{f\} \quad (1)$$

여기서 $[M]$, $[C]$, $[K]$ 는 경계부 및 연결 부위를 제외한 연속체의 유한요소모델이고 $[C_s]$, $[K_s]$ 는 경계 요소나 연결 부위와 관련된 자유도에만 계수가 있고 나머지는 계수가 영인 행렬이다.

경계부 및 연결부가 제외된 유한요소모델만의 식은 식 (2)와 같다.

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]X = \{0\} \quad (2)$$

효율적으로 연결부 및 경계부의 계수를 규명하기 위하여 n 개의 자유도 중 가진 및 측정 위치와 연결 부위에 관계되는 자유도를 $\{X_m\}$ 으로 하고 제거시킬 자유도를 $\{X_s\}$ 으로 구분하여 식(2)를 정리하면 식(3)과 같다.

$$\begin{bmatrix} [M_{mm}] & [M_{ms}] \\ [M_{sm}] & [M_{ss}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\ddot{X}_m\} \\ \{\ddot{X}_s\} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{mm}] & [C_{ms}] \\ [C_{sm}] & [C_{ss}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\dot{X}_m\} \\ \{\dot{X}_s\} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{mm}] & [K_{ms}] \\ [K_{sm}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{X_m\} \\ \{X_s\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

식 (2)을 이용해 해석적으로 고유치 문제를 풀 뒤, 관심 있는 주파수 영역 내의 r 개의 모드를 고려하여 물리 좌표계(physical coordinate)를 모드 좌표계(modal coordinate)로 변환하면 식 (4)와 같이 된다.

$$\{X\} = \begin{pmatrix} \{X_m\} \\ \{X_s\} \end{pmatrix} = [U] \{q\} = \begin{bmatrix} [U_m] \\ [U_s] \end{bmatrix} \{q\} \quad (4)$$

여기서 $[U]$ 는 r 개의 고유 벡터이며 $[U_m]$ 은

축약된 좌표계에 대한 고유 벡터 성분이고 $[U_s]$ 는 제거될 좌표계에 대한 고유 벡터 성분이다.

일반적으로 축약된 좌표계의 수(m 개)가 관심 있는 모우드의 수(r 개)보다 많으므로 식 (4)에서 $\{X_m\}$ 에 관련된 성분만을 정리하고 일반화된 역행렬(generalized inverse)을 도입하여 모우드 좌표계와의 관계를 표시하면 다음과 같다.

$$\{X_m\} = [U_m]\{q\} \quad (5)$$

$$\{q\} = [[U_m]^T [U_m]]^{-1} [U_m]^T \{X_m\} \quad (6)$$

식 (6)을 식 (4)에 대입하여 전체 좌표계 $\{X\}$ 를 축약된 좌표계 $\{X_m\}$ 로 표시하면 식 (7)과 같다.

$$\begin{aligned} \{X\} &= \begin{bmatrix} [U_m] \\ [U_s] \end{bmatrix} \{q\} \\ &= \begin{bmatrix} [U_m] \\ [U_s] \end{bmatrix} [[U_m]^T [U_m]]^{-1} [U_m]^T \{X_m\} \\ &= [T] \{X_m\} \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)은 관심 있는 주파수 영역내의 r 개의 모우드를 고려하여 전체 좌표계 $\{X\}$ 를 축약된 좌표 $\{X_m\}$ 로 표시하는 식으로 변환 행렬($[T]$)이 r 개의 모우드 벡터로만 표시가 되며 고려하는 모우드 갯수(r 개)와 축약된 좌표계의 수(m 개)가 같은 경우에는 변환 행렬이 아래와 같이 표시된다.

$$[T] = \begin{bmatrix} [I] \\ [U_s][U_m]^{-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

식 (8)의 변환 행렬과 초기의 유한요소모델로부터 에너지 등가를 적용하여 축약된 좌표계에 대한 질량, 강성, 감쇠 행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K.E = \frac{1}{2} \{\dot{X}\}^T [M] \{\dot{X}\} = \frac{1}{2} \{[T]\{\dot{X}_m\}\}^T [M] \{[T]\{\dot{X}_m\}\}$$

$$P.E = \frac{1}{2} \{X\}^T [K] \{X\} = \frac{1}{2} \{[T]\{X_m\}\}^T [K] \{[T]\{X_m\}\}$$

$$Loss \text{ fn} = \frac{1}{2} \{\dot{X}\}^T [C] \{\dot{X}\} = \frac{1}{2} \{[T]\{\dot{X}_m\}\}^T [C] \{[T]\{\dot{X}_m\}\}$$

$$[m_c] = [T]^T [M] [T]$$

$$\text{즉 } [c_c] = [T]^T [C] [T] \quad (9)$$

$$[k_c] = [T]^T [K] [T]$$

이렇게 구한 축약된 모델은 고려한 r 개의 모우드를 포함하는 주파수 영역에서 축약 이전의 유한요소모델과 잘 일치한다. 식 (9)와 같은 축약된 유한요소모델에 연결 부위의 계수를 결합하여 운동 방정식을 세우면 식 (1)은 축약된 좌표계에서 아래와 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} [m_c]\{\ddot{X}_m\} + ([c_c] + [c_i])\{\dot{X}_m\} \\ + ([k_c] + [k_i])\{X_m\} = \{f\} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 $[C_i]$ 와 $[k_i]$ 는 경계부 및 연결 부위의 동적 계수 행렬이다.

2.2 상태 방정식

식 (10)은 가진 위치 및 측정점과 연결 부위의 자유도를 고려하여 축약된 좌표계에 대한 식으로 연결 부위 및 경계부의 계수를 고려하여 상태 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{X}_m \\ \ddot{X}_m \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[m_c]^{-1}([k_c] + [k_i]) - [m_c]^{-1}([c_c] + [c_i]) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_m \\ \dot{X}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{0\} \\ [m_c]^{-1}\{f\} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 $[m_c]$, $[c_c]$, $[k_c]$ 는 유한요소모델로부터 축약된 행렬이고 $[k_i]$ 와 $[c_i]$ 는 경계 및 연결 부위의 동적 계수 행렬로서 i 와 j 자유도 사이에 있는 연결 부위에 대해서는 (i, i) , (i, j) , (j, i) , (j, j) 의 위치에만 값이 있고 나머지는 영이며

경계부의 한쪽 자유도가 고정된 경우에는 고정되지 않은 자유도에 대한 대각 위치에만 값이 있고 나머지는 영인 행렬이다. 물리 상태(physical state)인 변위 $\{X_m\}$ 와 속도 $\{\dot{X}_m\}$ 에 변수 상태(parameter state)인 연결 부위의 계수를 결합하여 새로운 상태 방정식(augmented state equation)을 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\{X\}}_{aug} &= \begin{pmatrix} \{\dot{X}\}_{physical} \\ \{\dot{X}\}_{parameter} \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [0] & [I] & [0] \\ -[m_c]^{-1}([k_c] + [k]) & -[m_c]^{-1}([C_c] + [C]) & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \{X\}_{aug} \\ &\quad + \begin{pmatrix} [0] \\ [m_c]^{-1}\{f\} \\ [0] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서

$$\{X\}_{physical} = \begin{pmatrix} \{X_m\} \\ \{\dot{X}_m\} \end{pmatrix}$$

$$\{X\}_{parameter} = [k_1, k_2, \dots, k_j, c_1, c_2, \dots, c_j]^T$$

연결 부위가 j 개 있는 경우, 상태 벡터의 차수가 $2m$ 에서 연결 부위의 강성 및 감쇠 계수의 수 $(2j)$ 만큼 늘어나 $(2m+2j)$ 가 되고 식(12)에서 보듯이 변수 상태와 물리 상태가 곱해지므로 비선형 상태 방정식이 된다. 이러한 상태(augmented state)중에서 측정이 용이한 몇 개의 상태를 선정해 측정식(measurement equation)을 구성하면 식 (13)과 같다.

$$\{y\} = [c] \{X\}_{aug} \quad (13)$$

이처럼 시간 영역에서 구조계의 연결 부위나 경계부의 동적 계수를 추정하는 문제는 식 (13)의 불완전한 측정 데이터를 이용하여 식 (12)와 같은 비선형 상태 방정식의 상태를 추정하는 문제로 귀착된다.

3. 계수 규명 알고리즘

비선형 상태방정식의 상태를 추정하는 방법에는 Gauss-Newton¹¹⁾, quasi-linearization⁵⁾, 순차적 최소자승법¹²⁾등이 있는데 앞의 두 가지 방법은 많은 측정 데이터에 대해 반복적(iterative)으로 연산을 수행하여야 하므로 본 연구에서는 최소자승법을 이용하여 순차적으로 구조계의 동적 계수를 추정하는 비선형 필터^{13), 14)}를 사용하였다. 이 방법은 식 (12)와 같은 비선형 상태 방정식에 대하여 식 (13)과 같이 몇 개의 상태를 측정하고 측정하지 않은 상태(물리 상태와 변수 상태)를 순차적으로 예측하는 필터의 개념으로 상태에 대한 공분산행렬(covariance matrix)를 동시에 계산해야 하므로 자유도가 많아지면 계산량이 상당히 많아지게 된다. 따라서 유한요소 모델의 자유도를 적절히 줄인 후, 축약된 좌표계에서 연결 부위의 계수를 결합하여 식 (12)와 같이 운동 방정식을 구성하고 이를 수학적 모델로 선정하였다.

식 (12)의 비선형 상태 방정식과 식 (13)의 측정식을 아래와 같이 표시하고

$$\dot{X}_{aug} = f(t, X_{aug}) + k(t, X_{aug})u \quad (12)$$

$$y = cX_{aug} + \text{measurement noise} \quad (13)$$

여기서 $k(t, X_{aug})u$ 는 구조계를 모델링 할 때 고려하지 못한 입력항이고 측정 오차에 대한 통계적 가정은 없다. 오차 벡터를 다음과 같이 정의한 뒤,

$$e_1(t) = y - cX_{aug}$$

$$e_2(t) = X_{aug} - f(t, X_{aug}) \quad (14)$$

최소자승법으로 측정하지 못한 상태 $(X_{aug}(t), 0 < t < T)$ 를 추정하는 문제는 다음과 같다.

$$\text{Min} \int_0^T [\|e_1(t)\|_0^2 + \|e_2(t)\|_0^2] dt \quad (15a)$$

여기서 Q 와 W 는 가중 행렬이다.

식 (14)를 식 (15a)에 대입하면 식 (15b)의 Lagrange problem이 된다.

$$\begin{aligned} & \text{Min} \int_0^T \text{in} [\|y - cX_{aug}\|_0^2 + \|ku\|_w^2] dt \\ & \text{constraint } \dot{X}_{aug} = f(t, X_{aug}) + k(t, X_{aug})u \quad (15b) \\ & w. r. t \ X_{aug}, u \end{aligned}$$

식 (15b)의 필요조건인 Euler-Lagrange equation 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{X}_{aug} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} \\ \dot{\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial X_{aug}} \end{aligned} \quad (16)$$

$$B. C \ \lambda(0) = \lambda(T) = 0$$

$$X_{aug}(0), X_{aug}(T) : \text{free} \quad (17)$$

여기서 H 는 Hamiltonian으로 아래와 같다.

$$H = \|y - cX_{aug}\| + \langle \lambda, f(t, X_{aug}) \rangle - \frac{1}{4} \langle \lambda, W^{-1}\lambda \rangle \quad (18)$$

식 (17)과 같은 경계 조건을 갖는 TPBVP(two point boundary value problem)은 Invariant Imbedding equation을 적용하면 식 (19) 및 식 (20)과 같은 순차적 예측식으로 바꾸어 지며¹³⁾ 이로부터 연결 부위의 동적 계수를 추정할 수 있다.

우선 상태의 추정식은 Predictor-Corrector 형태의 미분 방정식으로 주어진다.

$$\frac{d\hat{X}_{aug}}{dT} = f(\hat{X}_{aug}, T) + 2P(T)hQ\{y(T) - c\hat{X}_{aug}(T)\} \quad (19)$$

여기서

$$h = \frac{\partial}{\partial X_{aug}} (c \hat{X}_{aug})$$

Q : weighting matrix

윗 식의 첫째항은 X_{aug} 의 미분치의 추정된 값이고 두 번째 항은 측정치와 예측치의 차이를 이용하여 보정하여 주는 항이다. 응답에 대한 오차는 P, h, Q 의 세 개의 행렬로 가중치를 주게 되는데 Q 와 h 는 측정 위치에 결정되는 상수 행렬이고 P 는 다음의 미분 방정식 형태로 주어진다.

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dT} &= \frac{\partial f(\hat{X}_{aug}, T)}{\partial \hat{X}_{aug}} P \\ &+ P \frac{\partial f^T(\hat{X}_{aug}, T)}{\partial \hat{X}_{aug}} + 2P \frac{\partial}{\partial \hat{X}_{aug}} \\ &\{hQ\{y(T) - c \hat{X}_{aug}(T)\}\} P \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 P 는 공분산 행렬(covariance matrix)의 의미를 지니며 Jacobian에 X_{aug} 를 포함하고 있어 식 (19)와 식 (20)을 연립하여 풀어야 한다. 이와 같은 추정식들은 연속 시간영역(continuous time domain)에서 수립된 식이므로 상태의 추정치로부터 연결 부위나 경계부의 강성과 감쇠에 대한 물리적 값을 직접 구할 수 있다.

4. 시뮬레이션 및 고찰

부구조와 연결부 및 경계부로 구성된 구조계에 대해 연결부 및 경계부에 불확실성이 많다는 가정하에 전체 구조계에 대한 유한요소모델의 신뢰도를 제고하고 본 논문에서 제시한 방법의 적용성을 검증하기 위하여 두 가지 예제에 대하여 시뮬레이션을 수행하였다. 첫번째는 5개의 자유도를 지니는 현가계의 집중 질량 모델에 대하여 좌표계의 축약 없이 연결 부위의 동적 계수를 규명하여 해석적 모델의 신뢰도를 제고하였으며 두번째는 경계부를 지니는 보를 유한요소법으로 모델링하고 좌표계를 축약한 뒤, 축약된 해석적 모델을 이용하여 연결부의 계수를 규명하였다. 또한

각 경우에 대하여 현장측정시 발생할 수 있는 측정 잡음의 영향을 검토하였다.

4.1 현가계

Fig. 3과 같이 5개의 자유도 가지는 현가계의 집중 질량 모델을 세계의 부구조로 구분하고 각각의 부구조에 대한 해석적 모델을 알고 있으나 연결 부위의 물리량을 모른다는 가정하에 자유도 2와 자유도3의 속도 성분을 측정하여 연결 부위의 동적계수 (k_2, k_3, d_2, d_3)를 규명하고 해석적 모델을 수립하였다.

전체계의 운동 방정식을 상태 방정식으로 변환하고

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{f\} \quad (21a)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \ddot{X} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \dot{X} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [I] \\ [M]^{-1}\{f\} \end{pmatrix} \quad (21b)$$

상태 방정식에 연결 부위의 계수를 변수 상태로 결합하여 새로운 상태 방정식을 구성하면 다음과 같다.

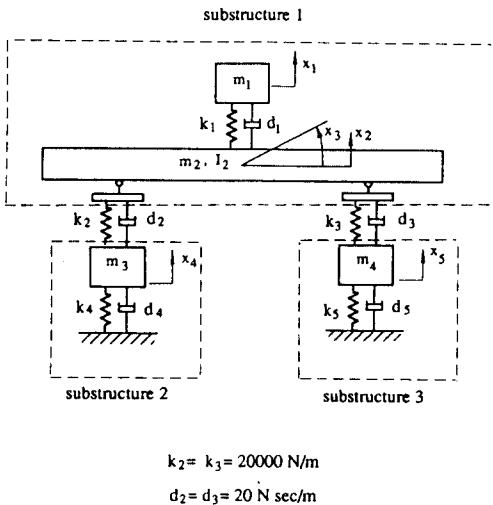


Fig. 3 Lumped mass model of a suspension system

$$\frac{dX_{aug}}{dT} = \begin{bmatrix} [0] & [I] & [0] \\ -[K]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} X_{aug} + \begin{pmatrix} 0 \\ [M]^{-1}\{f\} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

여기서

$$X_{aug} = [x_1, x_2, \dots, x_5, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_5, k_2, k_3, d_2, d_3]^T$$

$$y = [\dot{x}_2, \dot{x}_3]^T$$

연결 부위의 계수를 추정하는 문제는 위와 같은 비선형 상태 방정식의 상태를 추정하는 문제인데 이를 위해 자유도5에서 정현파 가진을 하여 정상 상태(steady state)에 이르게 한 뒤, 전체계의 응답을 구하여 두 지점의 속도 성분(\dot{X}_2, \dot{X}_3)을 측정치로 하였다. 계의 응답을 구하는 데는 Runge-Kutta 방법을 사용하였다. 가진점과 측정점간의 주파수 응답 함수는 Fig. 4와 같고 가진력은 세계의 주파수 성분(70, 110, 250, rad/sec)을 갖는 정현파의 합으로 하였다. 이와 같이 하나의 입력과 두지점의 측정치를 가지고 앞절에서 언급한 비선형 필터를 적용하여 연결 부위의 계수를 추정하면 Fig. 5와 같이 참값의 50%를 초기치로 했을 경우, 시간이 지남에 따라 추정된 계수들은 참값에 수렴하고 있고 800step(dt=0.002)에서의 추정된 값을 Table 1에 정리하였다. Fig. 5에서 처럼 초기에는 측정 데이터와 수학적 모델의 초기 조건이 틀려 연결 부위 계수 추정에 많은 오차가 생기나 시간이 지남에 따라 참값에 수렴되어 가고 있음을 알 수 있다.

실험시 발생할 수 있는 측정 잡음의 영향을 고려하기 위하여 측정된 시간 영역의 신호에 5%의 잡음을 인위적으로 첨가하여 규명된 연결 부위의 동적 계수는 Table 2와 같고 잡음비 (N/S ratio)는 아래와 같이 정의하였다.

잡음비(N/S ratio) =

$$\sqrt{\frac{\sum (x_N(t) - x_0(t))^2}{\sum x_0^2(t)}} \times 100\% \quad (23)$$

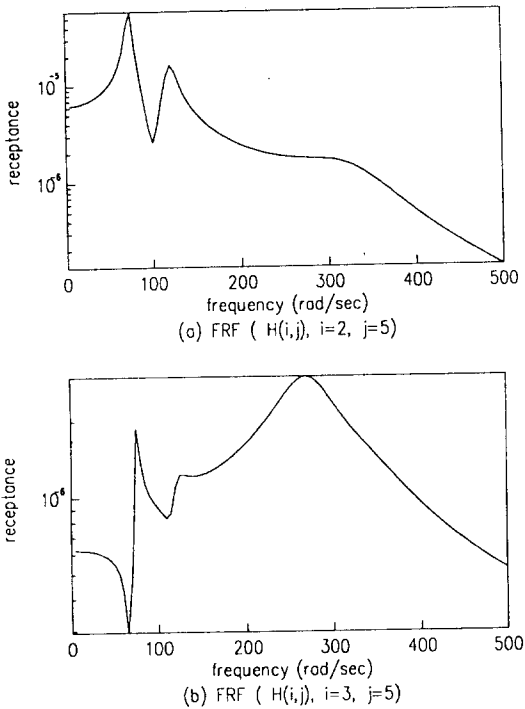


Fig. 4 Frequency response functions.

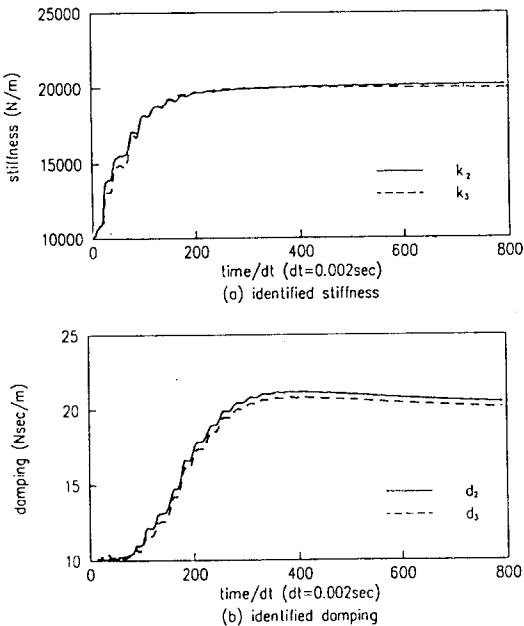


Fig. 5 Identified joint parameters.

Table 1 Identified results of example structure 1.

Propertise		Exact values	Identified values	Erro(%)
Stiffness (N/m)	k_2	2.0×10^4	2.010×10^4	0.50
	k_3	2.0×10^4	1.991×10^4	0.45
Damping (Ns/m)	d_2	20	20.231	1.15
	d_3	20	20.180	0.90

Table 2 Identified results of example structure 1 with 5% measurment noise.

Propertise		Exact values	Identified values	Erro(%)
Stiffness (N/m)	k_2	2.0×10^4	2.031×10^4	1.66
	k_3	2.0×10^4	1.969×10^4	1.54
Damping (Ns/m)	d_2	20	22.614	13.07
	d_3	20	19.436	2.82

여기서 $x_0(t)$ 는 잡음이 없는 신호이며 $x_n(t)$ 는 백색 잡음이 포함된 신호이다. Table 2에서 보듯이 추정된 연결 부위의 강성계수는 측정잡음에 민감하지 않으나 감쇠계수는 측정잡음에 많은 영향을 받고 있으며 이는 대부분의 S. I.기법에서처럼 강성보다 감쇠가 규명하기 더욱 어렵다는 것을 알 수 있다.

이상과 같이 해석적 모델의 신뢰도를 제고하기 위하여 연결 부위의 계수 규명을 비선형 상태 방정식의 상태 추정식으로 바꾸어 문제를 해결하면 비교적 좋은 결과를 얻을 수 있으나 식 (19)와 식 (20)처럼 많은 미분방정식을 풀어야 하는 단점이 있다.

현가계와 같은 5자유도의 예제에서 식 (19)와 관련하여 14개(물리 상태 10개, 변수 상태 4개)의 미분방정식이 생기고 식 (20)에서 공분산 행렬 $[P]$ 가 대칭 행렬이어도 105개 ($14 \times 15/2$)의 미분방정식이 구성되어 총 119개의 연립 미분방정식을 풀어야 한다.

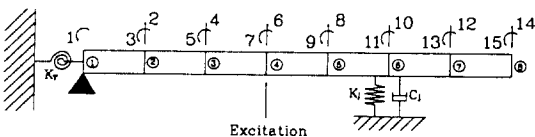
대부분의 경우 연결 부위를 제외한 부구조를 정확히 모델링하기 위하여는 많은 자유도가 필요하게 되므로 이와 같은 방법을 유한요소모델과 같은 다 자유도계에 적용하기 위하여는 필연적으로 좌표계의 축약이 필요하게 되고 다음 예에서 이를 고려하였다.

4.2 스프링과 감쇠기에 의해 지지되는 보

Fig. 6과 같이 회전 방향의 강성 K_r 및 병진 방향의 강성 K ,과 감쇠 C ,를 지닌 보 구조물을 유한요소법으로 모델링하는 경우에 연속체인 보 는 쉽게 모델링이 가능하나 경계부의 물성치는 일반적으로 가정된 값으로 입력되므로 전체 구조 계에 대한 해석적모델의 신뢰도를 저하시키게 된 다. 본 예제에서는 간단하게 측정할 수 있는 구 조계의 입출력 데이터를 축약된 유한요소모델과 결합한 뒤, 경계부의 동적 계수를 규명하여 전체 구조계에 대한 유한요소모델의 신뢰도를 제고하 였다. 연결 부위가 제외된 보만을 비례 감쇠를 가정하여 8개의 절점 (15 개의 자유도)을 가 지는 유한요소 모델로 모델링 하고 경계부와 관련 된 자유도(자유도 1, 10)와 가진점 과 관련된 자유도(자유도 6)만으로 좌표계를 축약한 뒤, 세 개의 자유도를 지닌 운동 방정식을 유도하였다.

좌표계의 축약에 사용된 변환 행렬은 보의 강 체운동을 제외한 세 개의 모드 벡터를 이용하 였으며 축약 전후의 주파수 응답함수는 Fig. 7과 같다. 세 개의 모드를 이용하였으므로 고려된 모드의 고유진동수 근처에서는 축약 전후의 주파수 응답함수가 일치하고 그 이외의 영역(특 히 반 공진 영역)에서는 오차가 발생하나 일반적 으로 구조계의 응답은 고유 진동수 부근의 주파 수가 우세하므로 이와 같은 오차는 응답의 관점 에서 큰 영향을 미치지 못한다.

축약된 좌표계에서 연결 부위를 고려하여 운동 방정식을 세우면



$E = 20.68E+6N/M^2$ $K_r = 5.0E+3N$
 $A = 1.0E-4M^2$ $K_t = 1.0E+4N/M$
 $\rho = 1.0E+3Kg/M^3$ $C_t = 20Nsec/M$
 $L = 7 \times 1M$

Fig. 6 Beam model with joints.

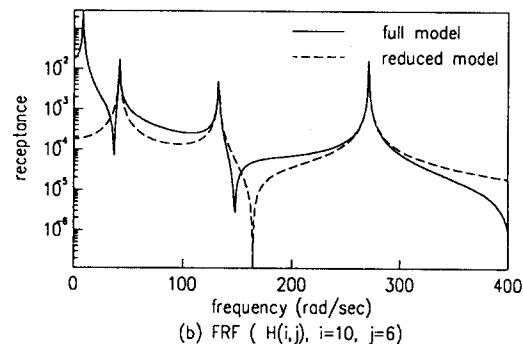
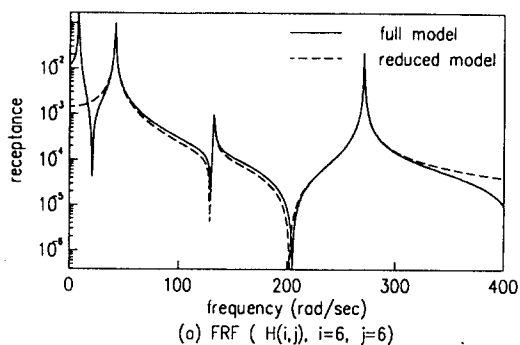


Fig. 7 Comparison of frequency response functions.

$$[m_c]\{\ddot{X}_m\} + ([c_c] + [c_j])\{\dot{X}_m\} + ([k_c] + [k_j])\{X_m\} = \{f\} \quad (24)$$

여기서

$$\{X_m\} = [X_1, X_6, X_{10}]^T$$

축약된 좌표계에서 질량과 강성 행렬은 아래와 같고 감쇠는 질량과 비례하는 비례감쇠로 설정하 였다.

$$[m_c] = \begin{bmatrix} 0.0569 & -0.0228 & 0.0931 \\ -0.0228 & 0.6041 & -0.6186 \\ 0.0931 & -0.6186 & 1.1973 \end{bmatrix} Kg$$

$$[k_c] = \begin{bmatrix} 0.2425 & -0.2275 & 0.2017 \\ -0.2275 & 0.7355 & -11.0029 \\ 0.2017 & -11.0029 & 1.5588 \end{bmatrix} \times 10^4 N/m$$

$$[c_c] = 0.1 \times [m_c] \text{ N sec/m} \quad (25)$$

경계부의 계수 행렬은 경계부의 한쪽 자유도가 고정되었으므로 고정되지 않은 부분의 자유도에 대한 대각 위치에만 값이 있고 나머지는 영인 행렬이 된다.

$$[K_j] = \begin{bmatrix} K_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_j \end{bmatrix} \quad [C_j] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_j \end{bmatrix} \quad (26)$$

보의 유한요소모델과 경계부의 특성을 결합한 구조계의 운동 방정식을 상태 방정식으로 변환하고 측정이 가능한 몇 개의 측정 데이터를 이용하여 나머지 상태를 추정하였다. 가진 자유도 6에서 측약 전후의 주파수 응답함수가 일치하는 주파수(41, 132, 271, rad/sec)성분을 지니는 정현파로 하였다. 측정점의 선택은 회전 방향의 자유도는 측정하기 힘들므로 자유도 6과 자유도 10의 병진 속도 성분으로 하였다. 규명할 변수들의 초기치를 참값의 50%로 하고 순차적 필터의 개념을 이용하여 경계부의 강성과 감쇠 계수를 추정하여 보면 Fig. 8과 같이 참값에 수렴하고 있고 결과를 Table 3에 정리하였다. 또한 측정하지 못한 절점 1의 회전 방향 속도 성분의 추정 오차는 Fig. 9와 같이 시간이 지남에 따라 영으로 수렴하고 있다.

측정 잡음의 영향을 고려하기 위하여 잡음비 8%의 백색 잡음이 포함된 측정 신호를 이용하여 연결 부위의 계수를 추정하면 Fig. 10과 같고 Table 4에 결과를 정리하였다. 현가계의 예에서 처럼 규명된 연결 부위의 계수는 측정 잡음에 크게 영향을 받지 않으며 감쇠 계수가 강성 계수보다 규명하기 어렵다는 것을 알 수 있다.

유한요소모델의 측약에 의해 발생하는 오차가 연결 부위의 계수 규명에 미치는 영향을 검토해보기 위하여 측약 전후의 주파수 응답이 일치하지 않은 주파수 성분(45, 250, 300 rad/sec)으로 구조계를 가진하여 연결부의 계수를 추정하였다.

추정된 결과는 Table 5와 같이 측정 잡음이 없는 경우에도 상당한 오차를 보이고 있는 반면,

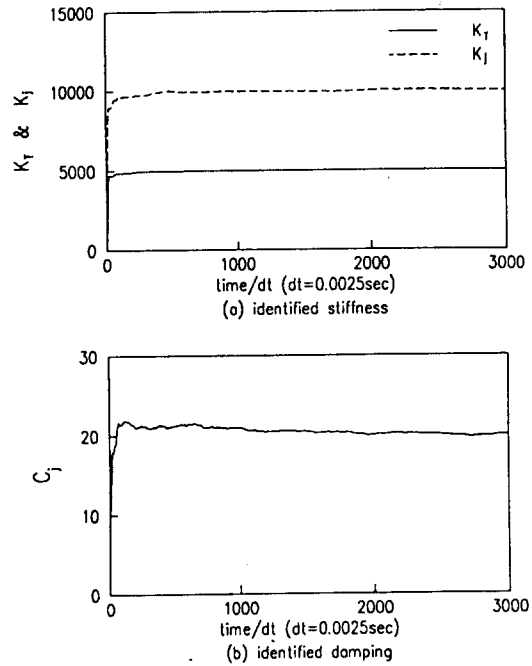


Fig. 8 Identified joint parameters.

Table 3 Identified results of example structure 2.

Propertise	Exact values	Identified values	Erro(%)
Stiffness (N/m)	K_T 5×10^3	4.999×10^3	0.2
	K_j 1×10^3	0.997×10^3	0.3
Damping(Ns/m)	C_j 20	19.79	1.05

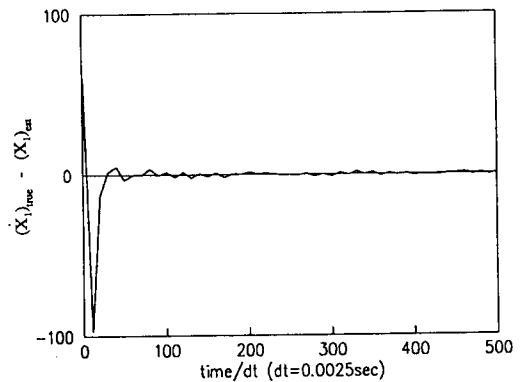


Fig. 9 State estimation error.

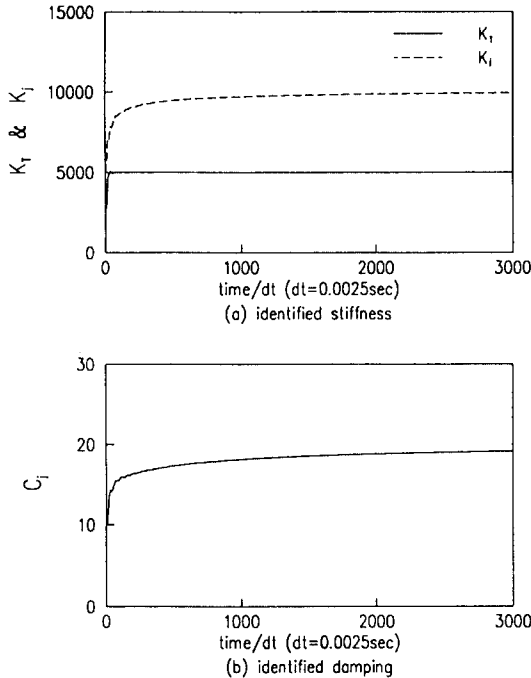


Fig. 10 Identified joint parameters with 8% measurement noise.

Table 4 Identified results of example structure 2 with 8% measurement noise.

Propertise	Exact values	Identified values	Erro(%)	
Stiffness (N/m)	K_T	5×10^3	4.994×10^3	0.1
	K_J	1×10^4	0.997×10^4	0.3
Damping(Ns/m)	C_J	20	20.40	2.0

가진력을 정현파 대신 랜덤한 하중으로 할 경우에는 수렴 속도도 빠르고 Table 6의 결과에서 보듯이 축약에 의한 해석적 모델의 오차가 있음에도 불구하고 규명된 값은 비교적 정확하다. 이는 본 연구에서 제시된 S.I.기법이 응답오차방법(output error method)에 그 바탕을 두고 있으므로 상대적 크기가 큰 고유 진동수 근처의 응답만이 중요하게 되어 공진 영역 이외에서 발생하는 축약에 따른 오차에는 큰 영향을 받지 않는다고 판단된다.

Table 5 Identified results of example structure 2 with model mismatch

Propertise	Exact values	Identified values	Erro(%)	
Stiffness (N/m)	K_T	5×10^3	4.125×10^3	17.5
	K_J	1×10^4	0.654×10^4	34.6
Damping(Ns/m)	C_J	20	11.70	41.5

Table 6 Identified results of example structure 2 when random excitation is applied.

Propertise	Exact values	Identified values	Erro(%)	
Stiffness (N/m)	K_T	5×10^3	5.054×10^3	1.08
	K_J	1×10^4	5.054×10^4	1.40
Damping(Ns/m)	C_J	20	19.61	1.95

5. 결 론

본 연구는 연결 부위 및 경계부를 지닌 기계구조계에 대하여 각각의 부 구조는 유한요소법으로 잘 표현되나 연결 부위 및 경계부에 상대적으로 불확실성이 크다는 가정하에 전체 구조계에 대한 해석적 모델의 신뢰도를 제고하는데 그 목적을 두고 현장에서 간단히 측정할 수 있는 실측 데이터를 이용하여 연결부의 동적 계수를 정확히 규명하는 S.I.기법을 유한요소모델과 결합하는 방법을 제시하였다.

제시된 방법은 응답 오차를 최소화하는 비선형 알고리즘으로 유한요소모델과 같은 다 자유도의 계와 결합시 엄청난 연산량이 문제시 되는데 이를 해결하기 위하여 관심있는 주파수 영역내의 모드 벡터를 이용하여 좌표계를 축약하였으며 축약된 좌표계에서 최소자승법의 순차적 형태인 비선형 필터를 적용하였다.

수치해석의 결과에서처럼 제시된 방법은 측정 잡음하에도 연결부 및 경계부의 동적 계수를 정확히 규명하고 있으며, 특히 실험적으로도 규명하기 어려운 연결부의 회전방향강성 및 감쇠계수를 병진방향의 측정치와 유한요소모델을 결합하여 규명하였으며 이로부터 상대적으로 불확실성이 큰 연결부의 물성치를 정량화하여 전체 구조계에

대한 유한요소모델의 신뢰도를 제고할 수 있었다. 연결 부위 및 경계부의 강성과 감쇠는 그 위치에 따라 각 모드에 대한 민감도가 서로 다르므로 제시된 방법을 좀 더 효율적으로 적용하기 위하여는 민감도의 정보가 계수 추정 알고리즘에 반영될 필요성이 있으며 이에 대한 추가 연구가 진행 중이다.

참 고 문 헌

1. J. G. Beliveau and M. Massoud, "Statistical Identification of an Astromast From Finite Element And Test Results Using Bayesian Sensitivity Analysis", *2nd International Modal Analysis Conference*, vol. 1, 1983, pp. 1121-1129.
2. Jon D. Collins and Gary C. Hart, "The Treatment of Randomness in Finite Element Modelling", *Transactions of The SAE*, Vol. 81, Part4, 1970, pp. 2408.
3. P. Davies and J. K. Hammon "A Comparison of Fourier and parametric Methods for Structural System Identification", *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, Vol. 106, 1984, pp. 40-48.
4. Ito. Y. and Masuko, M. "Study on the bending stiffness of bolted joint". *Bulletin of JSME*, Vol. 14, pp. 9-16.
5. S. R. Ibrahim, "Time domain quasi-linear identification of nonlinear dynamic systems", *AIAA Journal*, Vol. 22(6), 1984, pp. 817-823.
6. Robert J. Guyan, "Reduction of stiffness and Mass Matrices", *AIAA Journal*, Vol. 3(2), 1965, pp. 380.
7. Bruce, IRons, "Structural Eigenvalue Problems : Elimination of Unwanted Variables" *AIAA Journal*, Vol. 3(5), 1965, pp. 961 : 962.
8. A. J. Fricker, "A New Approach to the Dynamic Analysis of Structures usings Fixed Frequency Dynamic Stiffness Matrices", *Inter. J. of Num. Meth. in Engineering*, Vol. 19, 1983, pp. 1111 : 1129.
9. 양경택, 최계식, "직교 다항식을 이용한 구조계의 축약된 동강성 행렬 표현", *전산 구조공학*, Vol. 6(2), 1993, pp. 95 : 102.
10. Pieter Eykhoff, *SYSTEM IDENTIFICATION*, chapter 13, JOHN WILEY & SONS, 1974.
11. J. E. Mottershead and R. Stanway, "Identification of Nth Power Velocity Damping" , *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 105(2), 1986, pp. 309-319.
12. S. R. Ibrahim, "A Method for the Direct Identification of Vibration Parameters from the Free Responses", *Shock and Vibration Bulletin*, Vol. 47, 1977, pp. 183-198.
13. Detchmندی, D. M., and Sridhar, r., "Sequential Estimation of States and Parameters in Noisy Nonlinear Dynamic Systems", *ASME Journal of Basic Engineering*, Vol. 88, 1966, pp. 362-368.
14. 양경택, "부분적 측정 데이터를 이용한 구조계의 연결부 동적 계수구명", 박사학위논문, 한국과학기술원, 1993.

(접수일자 : 96. 11. 22)