비적합 변위모드를 이용한 4절점 평판휨요소의 개발

Development of 4-node Plate Bending Element using Nonconforming Displacement Modes

박 용 명* 최 창 근**
Park, Yong- Myung Choi, Chang-Koon

요 약

본 논문에서는 평판 구조물의 효율적인 해석을 위한 4절점 평판휨 요소를 개발하였다. 이 요소는 전단변형을 고려하기 위해 Mindlin 평판이론에 의하여 유도하였다. 평판휨 문제에서 4절점요소와 같은 저차의 등매개변수 Mindlin 평판요소는 전단강성을 실제보다 강하게 평가하기 때문에 얇은 평판에서는 요소의 기능을 발휘하지 못한다. 이러한 문제점을 극복하기 위해 4절점 요소에 5개의 비적합변위모드를 추가함으로써 개선된 결과를 얻을 수 있었으며, 개발된 요소는 유사영에너지모드를 발생시키지 않는다. 아주 얇은 평판에서도 요소의 형상과 무관하게 전단구속현상을 극복하였으며, 예제 해석으로부터 변위의 신속한 수렴성과 단면력의 분포가 양호한 결과를 얻을 수 있었다. 또한 요소 형상비가 매우 큰 경우에도 좋은 결과를 얻을 수 있었다.

Abstract

A 4-node element for efficient finite element analysis of plate bending is presented in this paper. This element is formulated based on Mindlin plate theory to take account of shear deformation. To overcome the overestimation of shear stiffness in thin Mindlin plate element, especially in the lower order element, five nonconforming displacement modes are added to the original displacement fields. The proposed nonconforming element does not possess spurious zero-energy mode and does not show shear locking phenomena in very thin plate even for distorted mesh shapes. It was recognized from benchmark numerical tests that the displacement converges to the analytical solutions rapidly and the stress distributions are very smooth. The element also provides good results for the case of high aspect ratio.

Keywords : 4-node Mindlin plate bending element, nonconforming displacement modes, shear locking

1. 서 론

Mindin 판이론에 의한 평판휨요소는 Ahmad 등에 의해 8절점 등매개변수 요소(isoparametric element)로 제안되어 두꺼운 평판구조물의 해석에 비교적 우수한 결과를 얻었다[1]. 그러나 이 요소의 강성행렬 계산시 3×3 Gauss 적분에 의한 정상적분(normal integration)시 휨강성에 비해

* 포항산업과학연구원 강재이용기술부문, 공학박사
** 정회원·한국과학기술원 토목공학과, 교수

· 이 논문에 대한 토론을 1997년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1997년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

전단강성이 과다하게 평가되어 얇은 판구조에서는 느린 수렴성을 보이며[1], 매우 얇은 평판에서는 요소망을 아무리 세분화하더라도 정확해에 도달하지 않는 이른바 전단구속(shear locking)현상을 보인다[11]. 이러한 현상은 4절점 등매개변수 평판휨요소와 같이 저차요소(lower order element)에서 더욱 심하여, 개선 과정을 거치지 않고서는 두꺼운 평판외에는 요소로서의 기능을 할 수 없다.

Mindlin 판요소에서 발생하는 상기 문제점의 해결을 위해 몇 가지 해결책이 지속적으로 연구되어 오고 있는데, 그 대표적인 방법으로는 1) 비적합 변위모드(nonconforming displacement mode)의 추가[3), 4)], 2) 감차적분(reduced integration)[9), 11), 13)], 3) 대체전단변형률장(substitute shear strain fields)의 구성[6), 7)]에 의한 기법 등이 있다. 먼저, 비적합 변위모드의 추가에 의한 개선 방법은 요소의 거동을 요소를 구성하는 절점수에 따라 유한 차수의 다항식으로 표현할 수 밖에 없는 점을 인위의 고차모드를 추가함으로써 요소의 거동을 개선하는 개념이다. 감차적분에 의한 요소는 해석 결과를 현저히 개선하지만 몇가지 문제점을 안고 있다. 즉, Serendipity Family 요소중에서 널리 사용되는 8절점 평판휨요소의 경우 일률적 감차적분한 균일한 요소망에서도 전단구속현상이 발생하며[11], 동시에 유사영에너지모드(spurious zero energy mode)가 발생하여 해석 결과에 신뢰성에 문제가 발생한다. 이 때 유사영에너지모드의 발생을 억제하기 위해 선택적 감차적분이 적용되기도 한다[9]. 선택적 감차적분에 의한 4절점 평판휨요소 역시 유사영에너지모드의 발생 및 찌그러진 요소망에 대해 나쁜 결과를 초래한다. 마지막으로 대체전단변형률장의 구성에 의한 방법은 전단변형률을 요소 영역내에서 평균화하는 기법 등을 도입하여 전단변형률의 표현을 위한 새로운 장(field)을 구성하고 요소행렬을 정상차수로 적분함으로써 감차적분요소에서 발생하는 문제점을 극복하고자 하였다[6), 7)]. 현재까지 발표된 Mindlin 평판휨요소 중에 주목할 만한 요소로는 4절점 요소에는 Donea 등이 제안한 요소[6)]가 있고, 8절점 요소로는 Heterosis 요소[8)] 등이 있다.

일반적으로 평판구조물의 효율적인 해석을 위해서는 요소망의 자동화구성이 용이하고 계산시간을 최소화할 수 있어야 하므로 8절점(또는 9절점 요소)보다는 4절점 요소가 절대적으로 유리하다. 앞에서 언급한 대체전단변형률장의 구성에 의한 4절점 요소[6)]는 거동은 우수하나 요소의 변위장 가정에 사용된 형상함수의 차수가 1차에 불과하므로 응력(휨모멘트 및 연직 전단력)은 요소 내의 Gauss 적분점에서 거의 상수(constant)에 가까운 분포를 보인다. 따라서 이러한 요소는 Gauss 적분점에서의 응력을 외삽(extrapolation)하여 절점에서의 응력으로 구하더라도 응력집중이 존재하는 구조물의 해석에서 응력집중점의 실제 응력과는 큰 차이를 보이는 문제가 있다.

본 연구에서는 유사영에너지모드 및 전단구속현상이 발생하지 않고 응력 분포가 원활하여 범용 해석에 적용이 가능한 효율적인 4절점 평판휨요소를 개발하였다. 앞에서도 언급한 바와 같이 저차의 Mindlin 평판휨요소의 치명적인 단점인 전단강성을 실제보다 지나치게 과다하게 평가하는 문제점의 해결을 위해 절점 자유도별로 비적합 변위모드를 선택적으로 추가함으로써 개선하였다. 개발된 요소의 타당성 검증을 위한 기본적인 수치검증작업과 대표적인 예제에 대한 구조해석을 수행하였으며, 대체전단변형률장의 구성에 의한 4절점 요소[6)] 및 얇은 평판휨요소[2)]와 해석 결과를 비교하였다.

2. Mindlin 평판휨요소의 수식화 과정

전단변형을 고려하는 Mindlin 평판요소에서 전단변형률은 평판 처짐량의 미분치와 회전변위량의 차이로 정의되며, 그림 1에 나타난 연직변위 ω와 두 개의 회전변위성분 α, β는 동일 차수의 형상함수(shape function)으로 다음과 같이 가정된다.

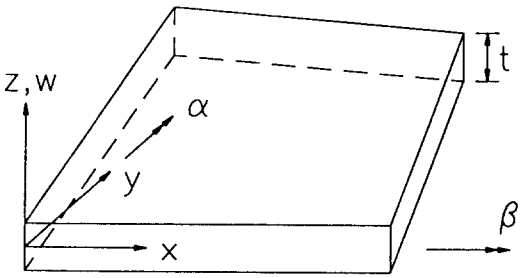


그림 1 Mindlin 평판의 변위 성분

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} N_i \begin{pmatrix} \omega_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} \tag{1}$$

식(1)에서 n은 요소당 절점수이고 N_i는 형상함수이다. 휨곡률 및 전단변형률은 다음 식과 같이 정의된다.

$$\begin{pmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial\alpha/\partial x \\ -\partial\beta/\partial y \\ -(\partial\alpha/\partial y + \partial\beta/\partial x) \end{pmatrix} = [B_b]\{u\} \tag{2a}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial w/\partial x - \alpha \\ \partial w/\partial y - \beta \end{pmatrix} = [B_s]\{u\} \tag{2b}$$

여기서, $[B_b]$는 휨변형률 행렬, $[B_s]$는 전단변형률 행렬이며 {u}는 절점변위벡터이다. Mindlin 평판휨요소의 강성행렬은 휨강성 및 전단강성으로 구성되며 다음 식과 같다.

$$[k_e] = \int_V [B_b]^T [D_b] [B_b] \, dV + \int_V [B_s]^T [D_s] [B_s] \, dV \tag{3}$$

여기서, $[D_b]$ 및 $[D_s]$는 각각 휨 및 전단변형과 관련된 재료강도행렬이다.

3. 비적합 4절점 Mindlin 평판휨요소의 수식화

4절점 등매개변수 평판 휨요소의 개선을 위해 본 연구에서는 비적합 변위모드를 사용하였다. 비적합 변위모드의 추가는 요소의 거동을 표현하기 위한 형상함수의 차수를 인위적으로 향상시켜 줌으로써 요소의 거동을 현저히 향상시킬 수 있을 뿐만 아니라, 전단구속현상의 극복을 기대할 수 있다[3]

개선을 위해 사용한 비적합 변위모드의 형상은 그림 2에 나타난 바와 같으며, 비적합 변위모드는 각 자유도에 선택적으로 추가하였다. 즉, 앞의 식(2a) 및 (2b)로부터 휨변형률은 두 개의 회전변위 자유도에만 관계가 있고 전단변형률은 연직변위 및 회전변위에 관계되는 것을 알 수 있다. 따라서, 비적합 변위모드 $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$, $\overline{N}_3$, $\overline{N}_4$는 연직변위 w자유도에, $\overline{N}_5$(bubble mode)는 두 개의 회전변위 α, β 자유도에만 선택적으로 추가하였다.

비적합 변위모드의 추가에 의한 요소의 변위장은 다음 형태로 확장된다.

$$u = \sum_{i=1} N_i u_i + \sum_{j=1} \overline{N}_j \overline{u}_j \tag{4}$$

여기서,

$$\begin{aligned} N_i &= (1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta), \text{ for } i=1, 2, 3, 4 \\ \overline{N}_1 &= (1-\xi^2)(1-\eta)/2 \\ \overline{N}_2 &= (1+\xi)(1-\eta^2)/2 \end{aligned} \tag{5}$$

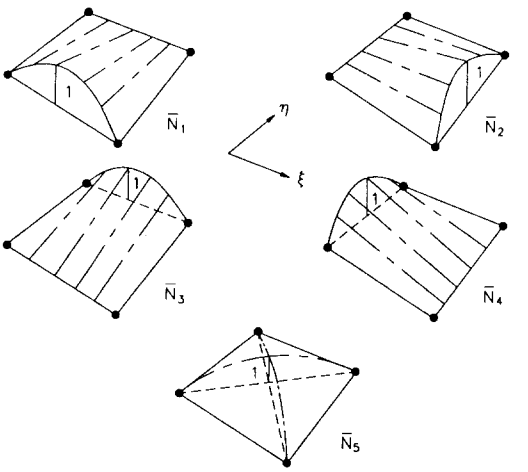


그림 2 비적합 변위모드의 형상

$$\overline{N}_3 = (1-\xi^2)(1+\eta)/2$$
$$\overline{N}_4 = (1-\xi)(1-\eta^2)/2$$
$$\overline{N}_5 = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \quad (6)$$

식(4)에서 N_i는 형상함수, u_i는 절점변위 성분이고 $\overline{u_i}$는 비적합 변위모드의 자유도로서 외력을 고려하지 않는 가상변위 성분이다. 비적합 변위모드의 추가로 변위장이 식(4)와 같이 확장되므로 원래의 힘-변위 방정식은 다음과 같이 확대된 형태로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} K_{cc} & K_{cn} \\ K_{cn}^T & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \overline{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

여기서, 부행렬(sub-matrix)은 각각 다음과 같다.

$$[K_{cc}] = \int_V [B_c]^T [D] [B_c] \, dV$$
$$[K_{cn}] = \int_V [B_c]^T [D] [B_n] \, dV$$
$$[K_{nn}] = \int_V [B_n]^T [D] [B_n] \, dV \quad (7a)$$

식(7a)에서 $[B_c]$는 원래의 형상함수, $[B_n]$은 비적합 변위모드에 의한 변형률행렬이다.

비적합 변위모드의 추가로 식(7)로 확대된 강성행렬은 정적압축(static condensation)과정을 통해 원래의 평판휨요소의 자유도 수와 같은 차수의 강성행렬로 압축된다.

$$[k_e]' = [K_{cc}] - [K_{cn}] \cdot [K_{nn}]^{-1} \cdot [K_{cn}]^T \quad (8)$$

식(7a)의 부행렬은 다시 휨강성부분과 전단강성부분으로 분리할 수 있는데, 본 연구에서 제안한 비적합 평판휨요소는 각 부행렬의 휨 및 전단 강성행렬 모두 2×2 Gauss 적분을 적용하였다. 본 요소의 강성행렬 구성 방법을 요약하면 표 1과 같다.

한편, 응력의 계산 역시 변위장이 확장됨으로 인해 다음 식으로 표현된다.

표 1 제안한 비적합 4절점 평판요소의 강성행렬 구성

Nonoconforming displ. modes		Order of Gauss integration					
w	α, β	$[K_{cc}]$		$[K_{cn}]$		$[K_{nn}]$	
$\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$	$\overline{N}_5$	Bending	Shear	Bending	Shear	Bending	Shear
$\overline{N}_3$, $\overline{N}_4$		2×2	2×2	2×2	2×2	2×2	2×2

$$\{\sigma\} = [D][B_c]\{u\} + [D][B_n]\{\overline{u}\} \quad (9)$$

식(7)의 두번째 방정식에서 $\{\overline{u}\}$를 $\{u\}$의 항으로 표현하여 식(9)에 대입하면 응력 벡터는 다음과 같이 구해진다.

$$\{\sigma\} = [D]([B_c] - [B_n][K_m]^{-1}[K_{cn}]^T)\{u\} \quad (9a)$$

4. 수치 해석

본 연구에서 제안한 4절점 Mindlin 평판휨요소의 타당성 검증하기 위해 먼저 기본적인 수치해석을 수행하였다. 아울러 요소의 성능을 확인하기 위해 대표적인 예제에 대한 변위 수렴도 해석을 수행하였으며, 대체전단변형률장 구성에 의한 4절점요소[6] 및 얇은 평판휨요소[2]와 응력분포도를 비교하였다. 편의를 위해 본 연구에서 제안한 요소를 NC4B-H로 명명한다.

4.1 기본 해석

4.1.1 고유치해석

NC4B-H가 유사영에너지모드를 보유하고 있는지의 여부를 판정하기 위해 불구속 상태의 한 요소의 강성행렬에 대해 고유치해석을 수행하였다. 수행 결과 평판휨요소의 강체운동에 해당하는 세 개의 영 고유치(zero-eigenvalue)가 산출되어 유사영에너지모드는 존재하지 않는 것으로 밝혀졌다.

4.1.2 patch 테스트

본 테스트는 요소가 일정변형률상태(constant strain state)를 표현할 수 있는가의 여부를 판정하

기 위한 기법으로 해의 수렴 보장을 위한 조건이다. 그림 3에 나타난 바와 같이 5개의 NC4B-H 요소로 구성된 찌그러진 요소망에 대해 세가지 순수응력 상태, 즉 순수휨, 순수전단 및 순수비틀림 조건에 대해 patch 테스트를 실시하였다. patch 테스트를 위한 경계조건 및 하중조건은 참고문헌에서 발견할 수 있다[7]. 수행 결과 본 요소는 순수휨 상태 및 순수비틀림 상태에 대해서는 patch 테스트를 통과하나, 순수전단 상태는 통과하지 못하였다. 이는 그림 2의 비적합 변위모드, $\overline{N}_1\,\overline{N}_2\,\overline{N}_3\,\overline{N}_4$가 요소의 경계인 절선(nodal line)을 따라 변형을 가지고 있고, 이 모드들이 연직변위성분에만 추가됨으로써 식(2b)의 전단변형률의 보정에 관계되기 때문이다. 그러나 찌그러짐이 없는 3×3 균일한 요소망에 대해서는 순수전단 상태의 표현이 가능하였다.

patch 테스트는 요소의 수렴을 위한 필요한 조건이지만 충분조건은 아니며, 적합 요소(compatible element)의 경우도 patch 테스트를 모두 통과하지는 않는다. 또한, 비적합 요소에서 요소간의 불연속성은 요소가 세분화됨에 따라 감소하므로 대부분의 경우 해의 수렴은 보장된다.

4. 1. 3 전단구속현상 테스트

NC4B-H가 두꺼운 평판에서 극히 얇은 평판에 이르기까지 적용이 가능한지의 여부를 판정하기 위해 중앙에 집중하중이 작용하는 4변 고정지지의 정사각형 평판구조물에 대한 해석을 수행하였다. 구조물의 대칭조건을 고려하여 1/4 부분만을 모델링한 균일한 요소망 및 4(a)의 찌그러진 요소망에 대해 평판폭/두께비(L/t)를 10^1에서 10^6까지 변화시켜 가며 해석을 수행하고 얇은 평판의 이론해[12]에 대해 정규화한(normalized) 중앙점에서의 처짐은 그림 4(b)에 나타난 바와 같다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 NC4B-H 요소는 균일한 요소망 및 찌그러진 요소망에 대해서도 전단구속현상이 발생하지 않음을 알 수 있어 평판의 L/t 비에 관계없이 두꺼운 평판에서 극히 얇은 평판의 해석에 적용이 가능함을 알 수 있다.

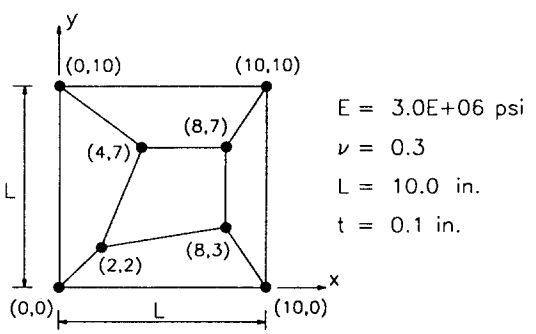
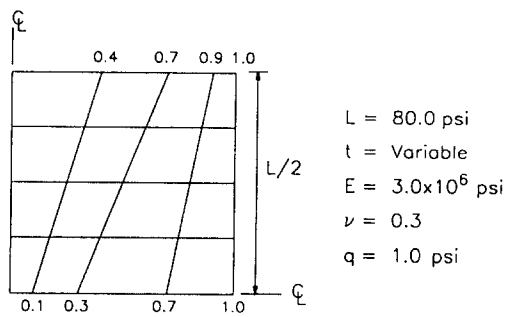


그림 3 patch 테스트를 위한 요소망 형상

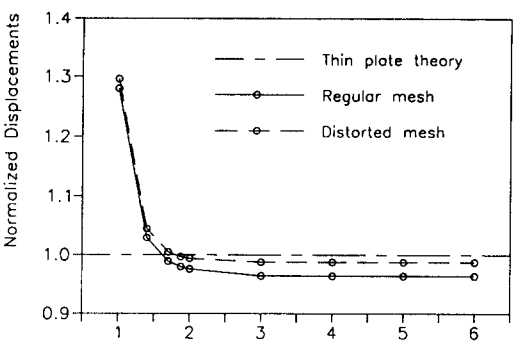
4. 2 예제 해석

4. 2. 1 캔티레버 평판

본 연구에서 제안한 NC4B-H 요소의 성능을 테스트하기 위한 첫 번째 예제로서 간단한 캔티레버 판에 대한 해석을 수행하였다. 하중 경우는 그림 5(a)와 같이 단부에 연직방향 선하중이 작



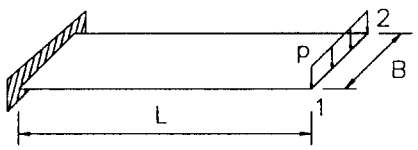
(a)찌그러진 요소망(distorted mesh)



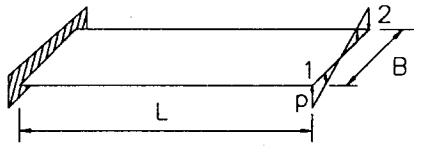
(b)중앙점에서의 처짐

그림 4 전단구속현상 테스트 모델

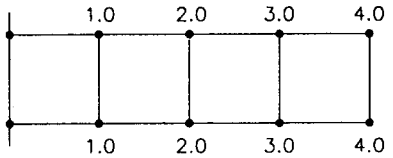
용하는 경우와 그림 5(b)의 단부 비틀림 하중이 작용하는 두 가지 경우를 고려하였다. 그림 5(c)의 균일한 요소망과 그림 5(d)의 찌그러진 요소망에 대해 해석을 수행한 결과는 표 2에 수록하였다. 첫 번째 하중 경우에 대한 정확해는 얇은 보이론으로부터(Poisson 비= 0.0), 두 번째 하중 경우는 NC4B-H 요소로 구성한 40×10 요소망으로부터 구한 값을 참고값으로 하였다. 본 연구의 NC4B-H 요소와의 비교를 위해 Donea의 4절점 요소[6]에 의한 해석도 동시에 수행하였으며, 두 요소 모두 두 가지의 하중 경우에 대해



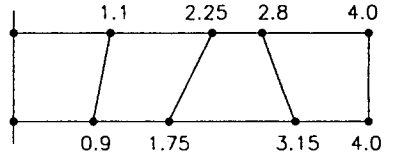
(a)단부 연직하중



(b단부 비틀림 하중



(c)균일한 요소망



(d)찌그러진 요소망

L : 4.0in　　E : 3.0×10^6 psi
B : 1.10in　　ν : 0.0
t : 0.01in　　P : 1.0 lb

그림 5 캔티레버 평판 테스트 모델

표 2 캔티레버 평판 처짐 결과 (Normalized displacement)

Mesh		Regular Mesh		Distorted mesh	
Losding	Element	w_1	w_2	w_1	w_2
Transverse	NC4B-H	0.9965	0.9965	0.9910	0.9917
	Donea[6]	0.9843	0.9843	0.9819	0.9818
Twisting	NC4B-H	0.9438	-0.9438	0.9455	-0.9741
	Donea[6]	0.9867	-0.9867	0.9896	-0.9837

균일한 요소망 및 찌그러진 요소망에서 양호한 처짐 결과를 얻을 수 있었다.

4.2.2 사각형 평판의 해석

NC4B-H 요소의 수렴도를 검증하기 위해 각형 평판구조물에 대한 수치해석을 수행하였다. 정사각형 평판구조물의 경계조건은 4변 단순지지조건과 고정지지조건을 각각 고려하고, 하중상태는 분포하중과 집중하중을 각각 고려하였다.

해석하고자 하는 평판의 대칭성을 고려하여 1/4 부분만을 모델링하였으며, 구조물의 형상 및 재료 특성치는 그림 6에 나타난 바와 같다. 2×2, 4×4, 8×8 요소망으로 점차 세분화한 요소망에 대해 NC4B-H 요소와 Donea의 4절점 요소[6]로 해석을 수행하고 얇은 평판의 이론해[12]에 대해 정규화한 중앙점 처짐의 수렴도 결과는 그림 7에 나타난 바와 같다. 그림 7(a) 및 7(b)로부터 지지조건 및 하중조건에 관계없이 모두 빠른 수렴결과를 보여줌을 알 수 있다.

한편, 단면력 결과는 고정지지조건의 분포하중 및 집중하중 상태에 대해서 그림 8에 제시하였

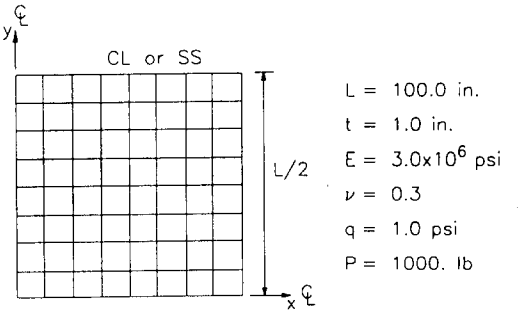
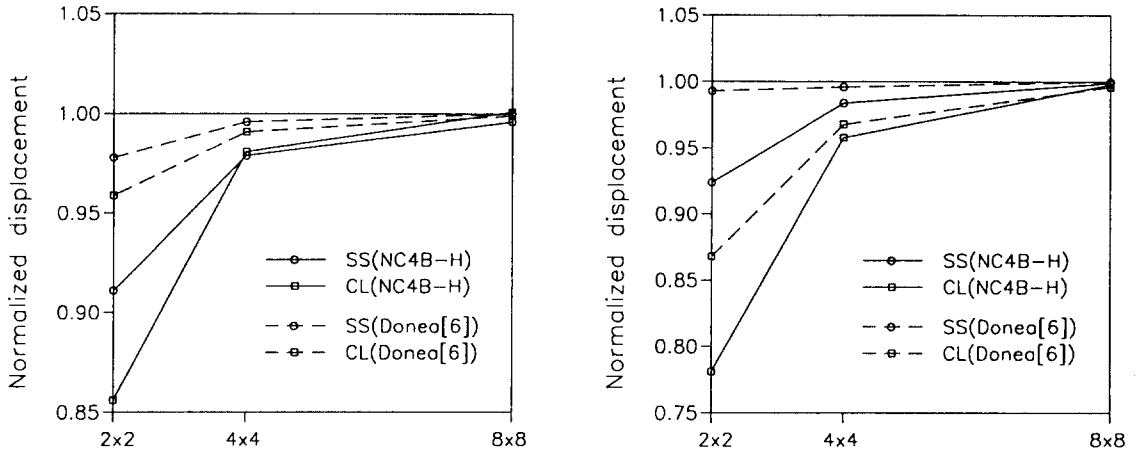


그림 6 정사각형 평판의 형상과 유한요소망 (8x8 mesh)



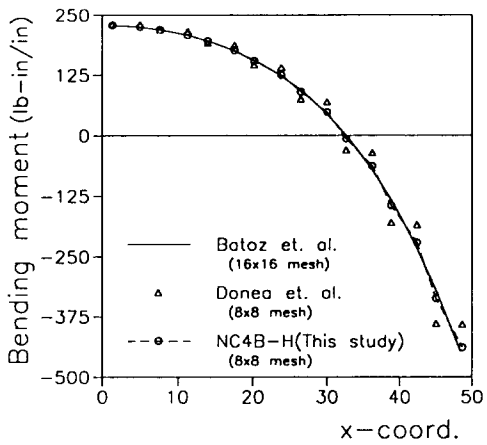
(a) 등분포하중 (b) 집중하중

그림 7 정사각형 평판의 처짐 수렴도

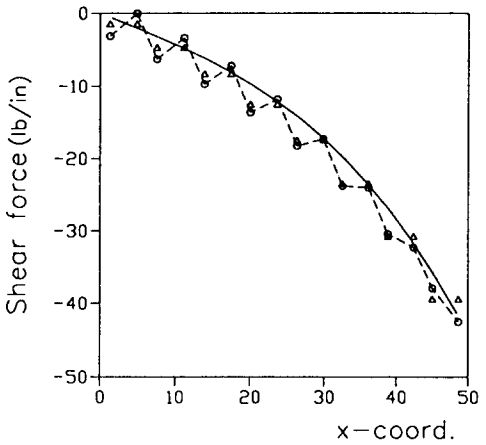
다. 제시한 휨모멘트 및 전단력은 8×8 요소망에서 x-축상에 가장 인접한 Gauss 적분점(요소당 두 점)에서의 값으로 Donea의 요소에 의한 해석결과와 함께 제시하였으며, 단면력 분포의 비교를 위해 범용구조해석 프로그램 SAP90에서 채택하고 있는 얇은 평판휨요소[2]로 16×16 요소망을 구성하고 요소 중앙점의 단면력을 참고값으로 함께 도시하였다. 휨모멘트 분포의 경우 하중조건에 무관하게 NC4B-H 요소에 의한 휨모멘트는 매우 매끈하게(smooth) 얻어진 것을 알수 있으나, 대체전단변형률장의 구성에 의한 요소는 계단식으로 제시되고 있어 고정지지-집중하중 경우와 같이 응력특이점(stress singularity)이 존재하거나 응력 집중이 존재하는 판구조물의 경우에는 휨모멘트가 최대인 Gauss 적분점, 즉 중앙점에 가장 인접한 수치적분점에서 큰 차이를 보이고 있어 실제 적용시 세분화된 요소를 사용하거나 별도의 보간(interpolation)작업에 의한 응력의 파악 과정이 필요하다. 한편, 전단력의 경우, NC4B-H는 전단력의 크기가 작은 지점에서는 계단 형상의 다소 불안한 분포를 보이나, 전단력의 기울기가 큰 지역에서는 실제 현상에 가까운 분포를 보이고 있어 실제 구조물에의 적용시에는 문제는 없을 것으로 판단된다. 이에 비해 대체전단변형률장의 구성에 의한 Donea 4절점 요소는 전단력의 크기나 기울기에 무관하게 일률적으로 계단 형상의 분포를 보이고 있어, 전단력의 경사가 심한 집중하중 경우에는 하중작용점에 가장 인접한 Gauss 적분점에서 역시 큰 차이를 보이고 있어 주의를 요한다.

4.2.3 요소형상비 변화에 대한 사각형 평판 해석

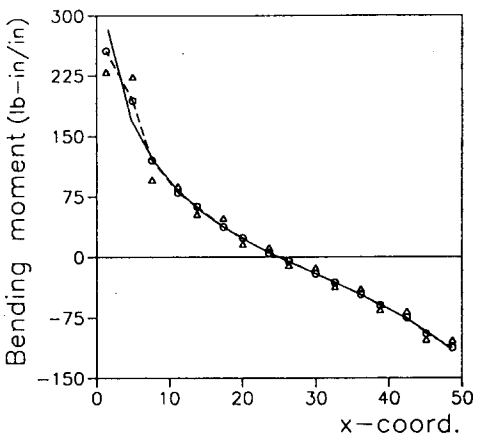
유한요소가 적절한 성능을 보유하기 위한 또 하나의 조건은 비교적 큰 요소형상비(aspect ratio)에 대해서도 제 기능을 발휘할 수 있어야 한다. NC4B-H의 요소형상비에 따른 성능 파악을 위해 앞의 그림 6의 정사각형 평판 구조물을 다음 그림 9와 같이 형상비를 변화시켜 가며 중앙점의 처짐을 검토하였다. 최대 형상비(b/a)를 8:1까지 변화시켜 가며 해석을 수행한 후 얇은 평판의 이론해에 대해 정규화한 중앙점 처짐 결과는 표 3과 같다. 해석 결과로부터 고정지지의 경우에는 형상비 8:1에서 처짐값이 미세하게 떨어지지만, 경계조건 및 하중조건에 무관하게 형상비 8:1까지도 거의 정확한 값이 얻어지고 있으므로 요소 형상비가 비교적 큰 경우에도 아무런 문제가 없을 것으로 판단된다.



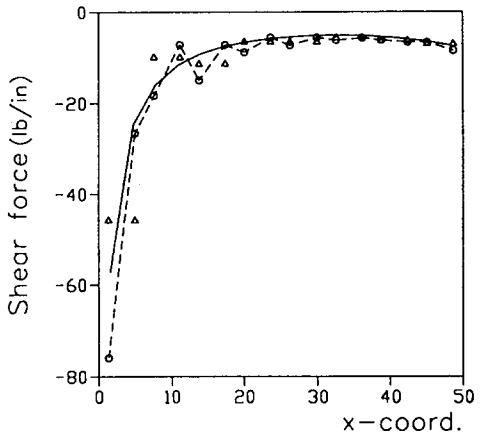
(a) 휨모멘트(등분포하중)



(c) 전단력(등분포하중)



(b) 휨모멘트(집중하중)



(d) 전단력(집중하중)

그림 8 고정지지된 정사각형 평판의 휨모멘트 및 전단력 분포 형상(8×8 mesh)

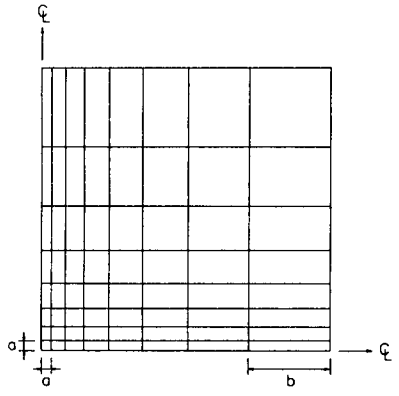


그림 9 형상비를 변화시킨 정사각형 평판 모델링
(8×8 mesh; b/a=8/1)

표 3 형상비의 변화에 따른 정사각형 평판의 처짐량 변화

Aspect ratio(b/a)	Boundary condition/Load			
	SS/q	SS/P	CL/q	CL/P
1 : 1	0.99664	0.99937	1.00485	0.99847
2 : 1	0.99797	1.00181	1.00416	0.99903
4 : 1	0.99755	1.00298	0.99625	0.99283
8 : 1	0.99563	1.00333	0.98196	0.98103

4. 2. 4 원형 평판의 해석

NC4B-H 요소의 성능을 검증하기 위한 마지막 예제로 원형 평판 구조물에 대한 해석을 수행하

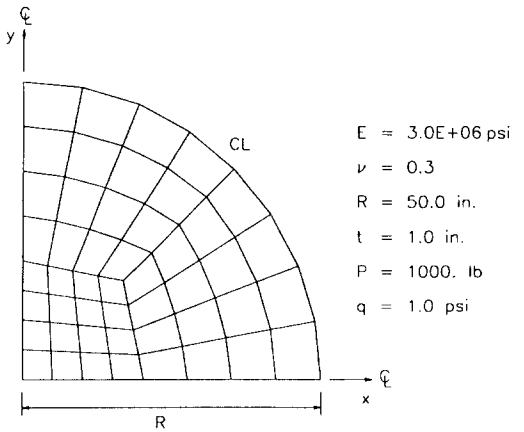


그림 10 고정지지된 원형 평판의 형상과 유한요소망 (48 요소 모델)

였다. 경계조건은 고정지지 상태로 하고 하중조건은 분포하중 및 집중하중을 각각 고려하였다.

구조물의 대칭성을 고려하여 1/4 부분만을 모델링하였으며, 구조물의 형상 및 재료 특성치는 그림 10에 나타난 바와 같다. 12 요소, 27 요소, 48 요소로 점차 세분화한 요소망에 대해 본 연구의 NC4B-H 요소와 Donea의 4절점 요소[6]로 해석을 수행하고 얇은 평판의 이론해[12]에 대해 정규화한 중앙점 처짐의 수렴도 결과는 그림 11과 같다. 그림에서 알 수 있듯이 원형 평판의 모델링을 위해 찌그러진 요소로 구성된 요소망에서도 매우 빠른 수렴결과를 보여 줌을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 Mindlin 판이론에 의한 4절점 평판휨요소에서 발생하는 문제점인 전단강성의 과다 평가 및 전단구속현상을 제거함으로써 실제 평판구조물의 해석에 효율적으로 적용할 수 있는 요소를 제시하였다. 본 요소는 원래의 등매개변수 4절점요소에 연직 처짐변위 자유도 및 회전변위 자유도에 비적합 변위모드를 선택적으로 추가함으로써 그 거동을 현저히 개선하였다. 강성행렬의 구성은 2×2 정상적분을 일률적으로 적용하므로 선택적 감차적분에 의한 계산상의 불편도 발생하지 않는다.

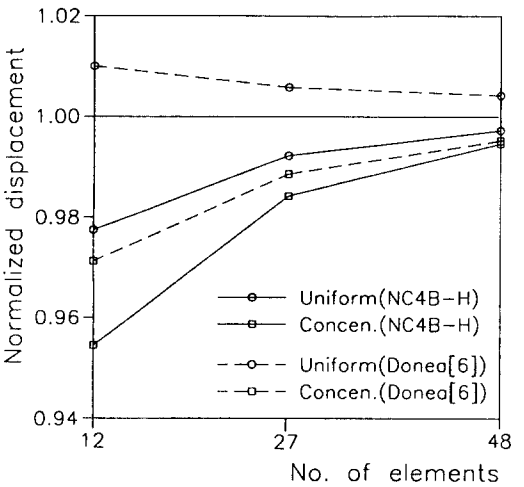


그림 11 고정지지된 원형 평판의 처짐 수렴도

개발된 요소는 유사영에너지모드가 발생하지 않고, 두꺼운 평판에서 극히 얇은 평판에 이르기까지 전단구속현상이 발생하지 않았다. 요소의 수렴성 검증을 위한 patch 테스트 결과, 순수휨 및 순수비틀림 상태는 통과하였으나 순수전단 상태에 대해서는 찌그러진 요소망에서는 통과하지 못하고 균일한 요소망에서는 통과하였다. 그러나 찌그러진 요소로 구성된 원형 평판의 해석에서 해는 정확해에 수렴함을 알 수 있어 해의 수렴은 보장되는 것으로 밝혀 졌다. 한편, 사각형평판의 수렴도 해석 및 찌그러진 요소망을 갖는 캔티레버 평판의 해석에서도 변위 및 단면력 모두 매우 좋은 결과를 얻었으며, 대체전단변형률장의 구성에 의한 4절점 평판휨요소에 비해 휨모멘트 및 전단력 모두 우수한 것으로 밝혀 졌다.

참 고 문 헌

1. Ahmad, S., Iron, B. M., and Zienkiewicz, O. C., "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements", Int. J. Numer. Methods Eng. Vol. 2 pp 419-451 (1970)
2. Batoz, J. L. and Tahar, M. B., "Evaluatio-

n of a new qudrilateral thin plate bending element", Int. J. Numer. Methods Eng. Vol. 18 (1982)
3. Choi, C. K. and Kim, S. H., "Coupled use of reduced integration and nonconforming modes in quadratic Mindlin plate element", Int. J. Numer. Methods Eng. Vol. 28 pp 1909-1928 (1989)
4. Choi, C. K. and Schnobrich, W. C., "Nonconforming finite element analysis of shells", J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 101 pp 447-464 (1975)
5. Cook, R. D., 'Concepts and Applications of Finite Element Analysis', 2nd eds., John Wiley & Sons, New York, N.Y. (1981)
6. Donea, J., and Lamain, L. G., "A modified representation of transverse shear in C-o quadrilateral plate elements", Comput. Meth. in Appl. Mech. and Engrg., 63, pp 183-207 (1987)
7. Hinton, E., and Huang, H. C., "A family of quadrilateral Mindlin plate elements with substitute shear strain fields." Comput. Struct., Vol. 23, pp 409-431 (1986)
8. Hughes, T. J. R. and Cohen, M., "The heterosis finite element for plate bending", Comput. Struct., Vol. 9, pp 445-45 (1978)
9. Hughes, T. J. R., Cohen, M., and Haroun, M., "Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis", Nuclear Engrg. and Design, Vol. 46, pp 203-222 (1978)
10. Mindlin, R. D., "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates", J. Appl. Mech., Vol. 18, pp 31-38 (1951)
11. Pugh, E. D. L., Hinton, E., and Zienkiewicz, O. C., "A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration", Int. J. Numer. Methods Engrg., Vol. 12, pp 1059-1079 (1978)
12. Timoshenko, S. P., and Woinowsky-Krieger, S., 'Theory of Plates and Shells', 2nd edn., McGraw-Hill, London, U. K. (1959)
13. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., and Too, J. M., "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells", Int. J. Numer. Methods Engrg., Vol. 3, pp 275-290 (1971)

(접수일자 : 1997. 1. 22)