

선형 근사화방법을 이용한 비대칭 복합 적층평판의 이산최적화

Discrete Optimization of Unsymmetric Composite Laminates Using Linear Approximation Method

이 상 근* 구 봉 근** 한 상 훈**
Lee, Sang-Keun Koo, Bong-Keun Han, Sang-Hoon

요 지

실제로 구조시스템들의 최적설계는 설계변수가 연속값이 아닌 이산값을 요하는 경우가 대부분이다. 본 논문은 이산형 설계변수를 갖는 비대칭 복합 적층평판에 대해 선형 근사화방법을 이용한 이산최적설계를 수행하였으며, 이 방법이 매우 효율적임을 보였다. 대상 문제는 축력, 전단력, 그리고 휨과 비틀림 모멘트의 평면 내하중들(in-plane loads)의 다중하중조건을 받는 것으로 고려하였으며, 복합 적층평판을 구성하는 플라이들에 대한 최대변형을 규준을 설계 제약조건으로 부과하였다. 이산최적화를 위한 초기 접근방법으로 단 한번의 연속변수 최적화 과정이 FDM(Feasible Direction Method)을 이용하여 수행되었으며, 차후 이산 및 연속변수를 포함하는 비선형 이산최적화문제를 SLDP(Sequential Linear Discrete Programming) 방법에 의해 선형 근사화된 혼합정수계획문제로 형성하여 풀었다. 수치예에서 6개의 플라이로 구성된 비대칭 복합 적층평판을 대상으로 회전식 적층배열 $[(90-\theta)/-(60+\theta)/-\theta/-(45+\theta)/(45-\theta)]_s$ 에 따른 이산최적해를 구하였다. 효율성 입증을 위해 똑같은 문제를 비선형 분기한계법을 이용하여 풀었으며, 그 결과를 비교 분석하였다.

Abstract

The optimum design of most structural systems used in practice requires considering design variables as discrete quantities. The present paper shows that the linear approximation method is very effective as a tool for the discrete optimum designs of unsymmetric composite laminates. The formulated design problem is subjected to a multiple in-plane loading condition due to shear and axial forces, bending and twisting moments, which is controlled by maximum strain criterion for each of the plies of a composite laminate. As an initial approach, the process of continuous variable optimization by FDM is required only once in operating discrete optimization. The nonlinear discrete optimization problem that has the discrete and continuous variables is transformed into the mixed integer programming problem by SLDP. In numerical examples, the discrete optimum solutions for the unsymmetric composite laminates consisted of six plies according to rotated stacking sequence were found, and then compared the results with the nonlinear branch and bound method to verify the efficiency of present method.

Keywords: discrete optimization, unsymmetric composite laminates, mixed integer programming, SLDP, branch and bound method

* 충북대학교 토목공학과 박사과정

** 정희원 · 충북대학교 토목공학과 교수, 공학박사

* 이 논문에 대한 토론을 1997년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1997년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

일반적으로 복합 적층평판은 플라이트들의 적층 배열 형태에 따라 중간면에 대해 대칭과 역대칭(antisymmetry), 그리고 비대칭(unsymmetry) 구조로 분류할 수 있다. 이 중 비대칭 구조는 고전적인 복합 적층평판 해석이론의 적용에 있어서 대칭 구조에 비해 휨 변형(flexural deformations)과 비틀림 변형(torsional deformations)의 영향이 더해지므로 그 해석이 매우 복잡해진다.

본 연구에서는 이같은 비대칭 구조의 복합 적층평판에 대한 이산최적설계 알고리즘을 제시하였으며, 이로 인해 설계자가 경제성 있는 설계를 손쉽게 도출할 수 있도록 함과 동시에 그 최적해가 제작 가능한 상용치수들 중에서 얻어지므로써 이론상 최적설계가 아닌 실질적인 최적설계가 될 수 있도록 하였다.

이산최적화는 지금까지 많은 연구가들에 의해 여러 방법들이 개발되었으며, 또한 발달되어왔다. 1960년 Land와 Doig¹⁾가 선형계획 영역에서 고전적인 분기한계(branch and bound) 방법을 개발하면서 이산최적화의 분기점을 마련하였고, 1965년에는 Dakin²⁾이 이를 한 차원 높여 비선형 계획 영역에서의 분기한계법을 제시하였다.

1980년 Schmit와 Fleury³⁾는 구조물 최적화의 원문제(primal problem)를 블록형의 축차 분리 근사화 부문제로 대치시킨 후 부문제를 라그랑즈 승수를 이용해 쌍대문제로 형성, 연속-이산변수 최적화를 수행하였으며 이때 근사해를 구하기 위한 도구로 명시적 열거법을 사용하였다. 1989년 Olsen과 Vanderplaats⁴⁾는 축차선형이산계획(SLDP)법을 개발, 적용하여 비선형 연속-이산변수 최적화문제를 선형 근사화된 문제로 형성한 후 분기한계알고리즘에 의해 풀므로써 근사화 방법에만 이산최적화를 선보였다. 1990년 Shin⁵⁾ 등은 기존의 무제약 최소화 알고리즘의 일종인 벌칙함수법을 이산최적화에 이용, 이산변수 이외의 설계변수들에 싸인(sine)함수의 형태로 벌칙을 가하여 이산해를 찾는 변형된 벌칙함수 접근 방법을 제시하였다. 본 논문은 비대칭 복합 적층

평판의 이산최적설계를 위해 Olsen과 Vanderplaats가 개발한 축차선형이산계획기법을 이용하여 비선형 이산최적화문제를 혼합정수계획문제로 재형성하여 풀었으며, 그 효율성 입증을 위해 비선형계획 영역에서의 분기한계방법⁶⁾에 의한 경우와 비교 분석하였다. 최적설계시 목적함수는 적층평판의 총 두께이고 설계변수는 적층평판을 구성하고 있는 플라이트의 두께이며 설계 제약조건으로는 플라이트의 최대변형을 균준을 부과하였다.

2. 비대칭 복합 적층평판의 해석이론

2.1 직교평판의 응력 변형률 관계⁷⁾

비대칭 복합 적층평판의 해석이론은 구성요소인 플라이트 즉, 직교평판의 해석이론을 토대로 유도된다. 그림 1은 구조물의 전체좌표계를 $x-y-z$ 좌표계로, 직교평에 관한 국부좌표계를 1-2-3좌표계로 나타낸 임의의 직교평판을 보여주고 있다. 여기서, θ 는 보강섬유의 방향각이다. 이 때 직교평판이 주축(1-2-3좌표계)에 관하여 평면응력 상태로 가정하면 다음과 같은 응력-변형률 관계식을 얻을 수 있다.

$$\bar{Q}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서,

$\bar{Q}_{ij}(i,j=1,2,6)$ 는 변환축약강성계수로서 직교평판의 축약강성계수 Q_{ij} 와 보강섬유방향각에 관한 함수이다⁷⁾.

2.2 비대칭 복합 적층평판의 전체 및 국부 변형률^{7), 8)}

본 절에서는 비대칭 복합 적층평판의 정역학적 해석이론을 전개하였으며, Whitney⁸⁾가 일반 복합 적층평판 해석을 위해 사용했던 기본 가정을 그대로 따랐다. 여기서, Whitney의 가정 중 적층평판의 변위 u, v, w 는 두께 t 에 비해 미소하고,

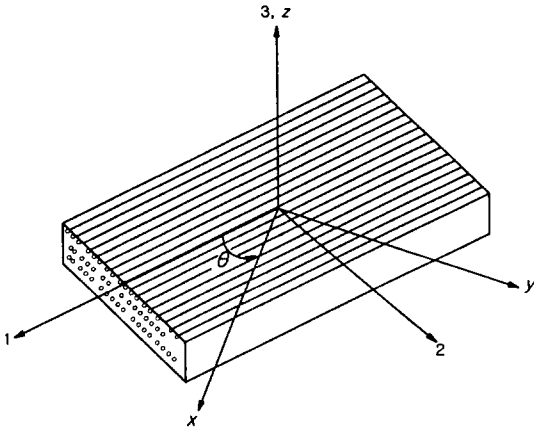


그림 1 적층평판의 전체 및 국부좌표계

수직변형률 ϵ_z 와 전단변형률 γ_{xz} , γ_{yz} 는 무시할 수 있는 양이며, 각각의 플라이들이 Hook의 법칙을 따른다는 가정에 기초하여 복합 적층평판의 변형률-변위 관계식은 식(2)와 같이 나타낼 수 있다.

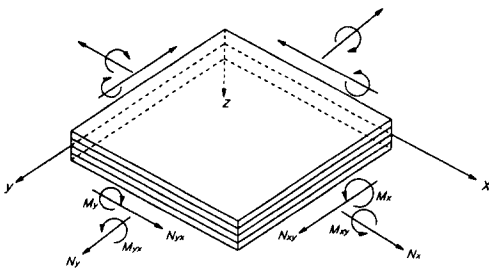


그림 2 적층평판의 좌표계 및 평면내하중들(in-plane loads)

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x^0 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z = \epsilon_x^0 + z\kappa_x \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y^0 - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z = \epsilon_y^0 + z\kappa_y \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}^0 - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z = \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, ϵ_x^0 , ϵ_y^0 , γ_{xy}^0 는 중간면에서의 변형률이고 κ_x , κ_y , κ_{xy} 는 중간면에서의 곡률이다.

결국, 이들 변형률 및 곡률벡터와 평면내 하중 벡터간의 관계는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\epsilon^0\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

식(3)에서, $\{N\} = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^T$, $\{M\} = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^T$ 이고, $[A]$ 는 신장 강성(extensional stiffness)매트릭스, $[B]$ 는 결합 강성(coupling stiffnesses)매트릭스이며, $[D]$ 는 휨 강성(bending stiffnesses)매트릭스이다. 이들 강성매트릭스는 그림 3과 같이 N 개의 플라이로 구성된 적층평판시스템에 대해 변환축약강성계수 \overline{Q}_{ij} 와 에 관한 함수로 표현된다⁷⁾.

만일 복합적층평판이 중간면에 대해 대칭이라면 $[B]$ 의 구성요소 $B_{ij}=0$ 이 되지만, 비대칭일 경우 $B_{ij} \neq 0$ 이고 평면내 하중하에서 휨과 비틀림 변형이 발생하게 된다.

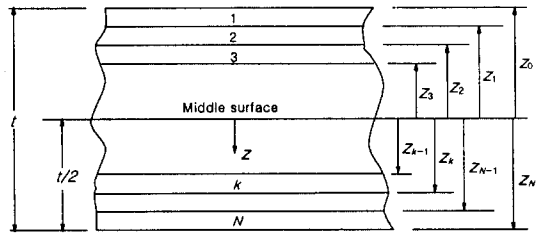


그림 3 적층평판의 기하 구조 및 층별 위치 정의

본 연구에서는 주어진 하중조건하에서 식(3)으로부터 LU분해법(LU decomposition)⁹⁾을 이용하여 $\{\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \gamma_{xy}^0, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}\}^T$ 를 도출하였으며, 이를 식(2)에 적용하므로써 비대칭 복합 적층평판의 중간면으로부터 z 위치에 발생하는 변형률 $\{\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$ 을 얻었다. 따라서 다중하중 조건 고려시 k 번째 하중조건에 대해 i 번째 플라이의 주축에 관한 변형률은 식(4)와 같이 얻어진다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{1ik} \\ \epsilon_{2ik} \\ \gamma_{12ik} \end{Bmatrix} = T_i \begin{Bmatrix} \epsilon_{xk} \\ \epsilon_{yk} \\ \gamma_{xyk} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서, T_i 는 전체좌표계를 국부좌표계로의 변환을 위한 변환매트릭스이며 다음과 같다.

$$T_i = \begin{bmatrix} \cos^2\theta_i & \sin^2\theta_i & \cos\theta_i\sin\theta_i \\ \sin^2\theta_i & \cos^2\theta_i & -\cos\theta_i\sin\theta_i \\ -2\cos\theta_i\sin\theta_i & 2\cos\theta_i\sin\theta_i & (\cos^2\theta_i - \sin^2\theta_i) \end{bmatrix} \quad (5)$$

2.3 최대 변형률 기준

1967년 Waddoups가 직교평판에 대해 제안한 최대 변형률 기준⁶⁾을 설계제약조건으로 사용하였으며 그 기준은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} e_L^{(-)} &\leq \epsilon_1 \leq e_L^{(+)} \\ e_T^{(-)} &\leq \epsilon_2 \leq e_T^{(+)} \\ |\gamma_{12}| &\leq e_{LT} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, 상첨자 (+)와 (-)는 각각 인장과 압축을 나타내고, e_L 과 e_T 는 각기 종방향과 횡방향 변형률 한계로써 압축인 경우 음의 한정값을 가지며, e_{LT} 는 전단변형률한계이다.

3. 최적화 문제의 정식화

3.1 비선형 연속변수 최적화 문제의 정식화

이산최적화의 초기 접근 방법으로써 이산변수를 연속변수로 가정하여 연속변수최적화가 선행되어야 한다. 비대칭 복합 적층평판에 대해 정식화한 연속변수최적화 문제의 목적함수식은 다음과 같이 형성하였다.

$$\text{Minimize } t = \sum_{i=1}^{N_{PLY}} x_i \quad (7)$$

여기서, t 는 적층평판의 총 두께이고 x_i 는 설계변수로 i 번째 플라이의 두께이며, N_{PLY} 는 적층평판을 구성하고 있는 플라이들의 총 수이다. 설계 제약조건은 식(9)의 최대변형률 기준을 적용하며, k 번째 하중조건에 대해 i 번째 플라이에 부과되는 제약조건식은 다음과 같이 형성된다.

$$g_{1ik} = \frac{\epsilon_{1ik}}{e_L^{(-)}} - 1.0 \leq 0$$

$$g_{2ik} = \frac{\epsilon_{2ik}}{e_T^{(-)}} - 1.0 \leq 0$$

$$g_{3ik} = \frac{\epsilon_{3ik}}{e_T^{(-)}} - 1.0 \leq 0$$

$$g_{4ik} = \frac{\epsilon_{4ik}}{e_T^{(+)}} - 1.0 \leq 0$$

$$g_{5ik} = \frac{|\gamma_{12ik}|}{e_{LT}} - 1.0 \leq 0,$$

$$(i=1, N_{PLY}, k=1, N_{LC}) \quad (8)$$

식(8)의 제약조건식은 설계변수에 대해 암시적이고 비선형이며, 제약조건식의 총 수는 플라이 수와 하중조건 수의 곱에 5배한 것이 됨을 알 수 있다. 식(7)과 (8)의 연속변수 최적화문제는 ADS¹⁰⁾의 FDM을 이용하여 풀었으며, 연속변수 최적화 과정동안 적층평판의 총 두께 t 가 변하더라도 xyz 좌표계 상의 원점은 항상 상 하 표면으로부터 $1/2$ 거리에 있는 xy 평면에 위치하게 된다. 따라서 최적두께의 중간면이 플라이와 플라이 사이의 접합면에 위치할 수도 있고 임의의 플라이 내에 위치할 수도 있지만 대부분 후자에 속하게 된다.

이산최적화 과정동안 연속변수 최적화는 초기 접근단계로 연속변수 최적화가 얻어지기까지 단 한번의 과정으로 종료되며, 이 때 얻은 연속변수 최적해는 설계변수가 지나는 매우 큰 이산집합을 작은 이산집합으로 단축시키는 역할을 한다. 이는 이산해가 연속해 부근에 존재하기 때문이며, 연속변수 최적해의 상향 이산값을 차후 축차선형 이산계획화 초기 단계에서 선형화 초기점(linearization point)으로 사용하였다.

3.2 축차선형이산계획화에 의한 혼합정수계획 문제의 정식화¹¹⁾

본 연구에서 비대칭 복합 적층평판의 최적설계를 위해 취하고 있는 설계변수는 모두 이산형 설계변수이지만 공학설계문제들 중에는 설계변수가 이산형과 연속형이 혼합된 경우도 있다. 따라서, 본 절에서는 설계변수가 이산형인 경우 뿐만 아니라 혼합형인 경우까지도 다룰 수 있는 연속

-이산변수최적화 알고리즘을 형성하였다.

1) 일반적인 연속-이산변수 문제의 정식화

연속변수와 이산변수를 동시에 갖는 공학설계 문제의 이산최적화를 위한 일반적인 수학적계획 문제는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\text{Minimize } F(\bar{X}) \tag{9}$$

$$\text{Subject to } g_j(\bar{X}) \leq 0, j=1, m. \tag{10}$$

$$h_e(\bar{X})=0, e=1, l. \tag{11}$$

여기서,

$$\bar{X}=(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)^T \tag{12}$$

$$x_i \in \{d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{ij}\}, i=1, p. \tag{13}$$

$$x_k^l \leq x_k \leq x_k^u, k = p+1, n. \tag{14}$$

여기서, p 는 이산설계변수의 수이고, 하부침자 q 는 이산집합이 포함하고 있는 이산값들의 수이다. n 은 설계변수의 총 수이며 d_{ij} 는 설계변수 i 에 대한 j 번째 이산값이다. 식(14)는 연속변수의 한계제약조건을 나타내고 x_k^l 과 x_k^u 는 각각 설계변수 x_k 에 대한 하한과 상한치이다.

2) 축차선형이산계획(SLDP)

본 연구는 이산최적해를 얻기위한 도구로 OR (Operation Research)분야에서 폭넓게 사용하고 있는 혼합정수계획법¹²⁾을 이용하였다. 혼합정수계획법은 선형계획영역내에서 분기한계알고리즘에 기초하여 단지 정수해만을 요하는 설계변수에 대해 분기하므로써 정수해와 연속해만을 도출하게 된다. 따라서 혼합정수계획기법을 이용할 경우, 만일 이산최적화 문제가 비선형계획영역에 있다면 이를 선형계획영역으로 전환시켜야하며, 또한 설계변수중 이산설계변수가 비정수형인 경우에는 정수형과 연속형변수만을 포함하는 혼합정수계획문제로 전환시켜야하는 일련의 반복과정을 필요로 한다. Vanderplaats(1989)⁴⁾는 이러한 반복과정에 필요한 알고리즘을 개발, 축차선

형이산계획(SLDP)이라 칭하였다. 축차선형이산계획화 단계에서 비선형 이산문제를 선형근사화하기위해선 설계변수에 대한 목적함수 및 제약조건경사(gradient)가 필요하다. 본 연구는 그들 경사정보를 얻기위해 다음의 전방향 유한차분법을 사용하였다.

$$\nabla \phi(\bar{X}) = \frac{\phi(\bar{X} + \Delta\bar{X}) - \phi(\bar{X})}{\Delta\bar{X}} \tag{15}$$

식(15)에서 $\Delta\bar{X}$ 는 이동거리이고, 본 연구에서는 설계변수에 대한 0.01%의 변동량을 취하였다. 이제 식(9)~(14)의 비선형 이산최적화문제를 선형화 초기점 즉, 연속변수 최적해의 상향이산값 \bar{X}^0 에 대해 1차 Taylor급수 전개하면 다음과 같은 선형근사화된 최적화 문제를 형성할 수 있다.

$$\text{Minimize } F(\bar{X}) \cong F(\bar{X}^0) + \nabla F(\bar{X}^0) \delta\bar{X} \tag{16}$$

Subject to

$$g_j(\bar{X}) \cong g_j(\bar{X}^0) + \nabla g_j(\bar{X}^0) \delta\bar{X} \leq 0, j=1, m. \tag{17}$$

$$h_e(\bar{X}) \cong h_e(\bar{X}^0) + \nabla h_e(\bar{X}^0) \delta\bar{X} \leq 0, e=1, l. \tag{18}$$

여기서,

$$\delta\bar{X} = \bar{X} - \bar{X}^0 \tag{19}$$

$$\bar{X} = (x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)^T \tag{20}$$

$$x_i^0 + \delta x_i \in \{d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{ij}\}, i=1, p. \tag{21}$$

$$x_k^l \leq x_k^l + \delta x_k \leq x_k^u, k=p+1, n. \tag{22}$$

위의 선형계획 이산최적화문제의 설계변수중 이산변수이면서 비정수형인 설계변수가 존재할 경우 혼합정수계획방법에 의해 풀 수 없는 난해한 문제로 된다. 그러나, 그 설계변수의 이산값들에 0과 1의 정수값만을 갖는 가상 정수형변수 z_{ji} 를 다음과 같이 부여하게 되면 충분히 풀 수

있는 문제로 전환시킬 수 있다.

$$x_i = z_{i1}d_{i1} + z_{i2}d_{i2} + \dots + z_{iq}d_{iq}, \quad i=1, p. \quad (23)$$

$$z_{i1} + z_{i2} + \dots + z_{iq} = 1 \quad (24)$$

$$z_{ij} = 0 \text{ 또는 } 1, \quad j=1, q \quad (25)$$

결국, 식(23)에서 가상 정수형변수 z_{ij} 중 1의 정보를 갖게되는 것과 결합된 이산값이 최적이산해로 선택되어진다.

3) 혼합정수계획문제의 정식화

이제 식(23)~(25)를 식(16)~(22)에 적용하여 정수형과 연속형 설계변수만을 갖는 혼합정수계획문제로 다음과 같이 표현될 수 있다.

Minimize

$$F(\bar{X}) \cong F(\bar{X}^0) + \sum_{i=1}^p \nabla F(x_i) \left[\sum_{j=1}^q z_{ij} (d_{ij} - x_i^0) \right] + \sum_{k=p+1}^n \nabla F(x_k) [(x_k - x_k^0)] \quad (26)$$

Subject to

$$g_j(\bar{X}) \cong g_j(\bar{X}^0) + \sum_{i=1}^p \nabla g_j(x_i) \left[\sum_{m=1}^q z_{im} (d_{im} - x_i^0) \right] + \sum_{k=p+1}^n \nabla g_j(x_k) [(x_k - x_k^0)] \leq 0 \quad (27)$$

$$h_c(\bar{X}) \cong h_c(\bar{X}^0) + \sum_{i=1}^p \nabla h_c(x_i) \left[\sum_{m=1}^q z_{im} (d_{im} - x_i^0) \right] + \sum_{k=p+1}^n \nabla h_c(x_k) [(x_k - x_k^0)] = 0 \quad (28)$$

여기서,

$$\sum_{i=1}^q z_{ij} = 1, \quad i = 1, p \quad (29)$$

$$z_{ij} = 0 \text{ 또는 } 1, \text{ all } i \text{ and } j \quad (30)$$

$$x_k^l \leq x_k^0 + \delta x_k \leq x_k^U, \quad k = p + 1, n. \quad (31)$$

윗 식에서 z_{ij} 는 정수형변수이고 x_k 는 연속형변수이다.

3.3 선형 근사화방법에 의한 이산최적화 절차

프로그램상에서 선형 근사화방법을 이용한 비대칭 복합적층평판의 이산최적설계는 다음과 같은 절차를 거친다.

- a) 초기값과 매개변수값의 입력,
 - b) 대상 구조물의 해석,
 - c) 비선형 연속변수 최적화문제를 푼다. -ADS의 FDM적용
 - d) 단계 c)에서 얻은 연속변수 최적해의 상하이산값을 선형화 초기점으로 정하고, 그 값을 기준으로 가능 이산값들을 선택하여 단축된 이산집합을 구성한다.
 - e) 경사계산을 통해 혼합정수계획문제를 형성한다.
 - f) 혼합정수계획문제를 푼다. -OR분야의 MIP-SSM¹²⁾ 프로그램 이용
 - g) 수렴검사 -단계 f)에서 얻은 이산해가 전 단계와 동일할 경우 현재값을 기록하고 종료
 - h) 단계 g)를 만족하지 않으면 현재값을 초기값으로 하여 단계 e)로 되돌아가 반복한다.
- 단계 f)의 과정에서 설계변수의 이산값 중 현재값 (\bar{X}^0), 인접 상한값, 인접 하한값의 세가지 가능치를 반복적으로 선택하면서 탐색과정을 거치도록 하였다.

3.4 비선형 분기한계법⁶⁾

선형 근사화방법에 의한 이산최적화의 효율성 및 신뢰성 검증을 위해 똑같은 이산최적화 문제를 비선형 분기한계법(nonlinear branch and bound method)을 이용하여 풀었으며, 그 결과를 비교 분석하였다. 비선형 분기한계법은 설계공간을 더 작은 부분공간으로 체계적으로 분할하여 최적해를 탐색하는 방법이다. 여기서, 탐색과정은 축소된 설계공간에서 비선형 연속최적화문제로 고려되어 해를 구하게 된다. 비선형 분기한계알고리즘의 전체적인 흐름도는 그림 4와 같다.

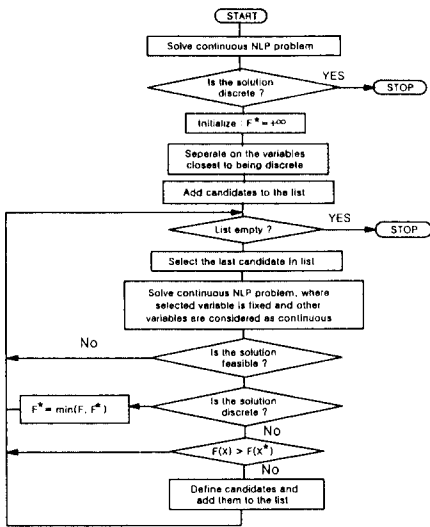


그림 4 비선형 분기한계법

4. 수치예

대상 구조물인 비대칭 복합 적층평판의 재료는 고강도 Graphite-Epoxy(T300/5208)이며, 플라이의 재료 성질은 보강섬유 체적비(volume fraction)가 0.6인 것에 해당한다. 여기서, 설계 시 사용된 플라이의 한계변형률은 다음과 같다.

$$e_L^{(+)} = .00857, \quad e_L^{(-)} = -.00857$$

$$e_T^{(+)} = .00471, \quad e_T^{(-)} = -.01760, \quad e_{LT} = .01840$$

각 설계변수들의 이산집합은 가능 이산값들간의 간격을 0.001 in로 가정하였고, 선형화 초기점 \bar{X}^0 를 포함해서 상향값 5개, 하향값 5개의 단축 이산집합을 구성하였다. 예를들어 임의 설계변수의 선형화 초기점값이 0.014일 경우 그 설계변수의 이산집합은 {0.009, .010, .011, .012, .013, .014, .015, .016, .017, .018, .019}이 된다. 한편, 적층배열은 중간면에 대해 비대칭이면서 임의의 회전식 적층배열 형태를 따랐으며 표 1과 같이 12개의 적층형태가 고려되었다.

표 1에서 보여주고 있는 12개의 비대칭 복합 적층평판에 대한 최적설계시 설계변수인 플라이

두께의 하한치는 0.001in로 하였으며, 이 때 표 2의 다중하중조건 하에서 선형근사화 방법에 의해 수행한 이산최적설계 결과와, 비선형 분기한계법에 의해 얻은 결과를 표 3-1, 3-2에 나타내었다.

표 1 회전식 적층 배열

Layup No.	Degree θ (°)	Layup: $[(90 - \theta)/-(60 + \theta)/(60 - \theta)/-\theta/-(45 + \theta)/(45 - \theta)]_s$					
		ply 1	ply 2	ply 3	ply 4	ply 5	ply 6
1	0	90	-60	60	0	-45	45
2	15	75	-75	45	-15	-60	30
3	-15	-75	-45	75	15	-30	60
4	30	60	90	30	-30	-75	15
5	-30	-60	-30	90	30	-15	75
6	45	45	75	15	-45	90	0
7	-45	-45	-15	-75	45	0	90
8	60	30	60	0	-60	75	-15
9	-60	-30	0	-60	60	15	-75
10	75	15	45	-15	-75	60	-30
11	-75	-15	15	-45	75	30	-60
12	90	0	30	-30	90	45	-45

표 2 본 연구에 적용한 다중하중조건

Loading Condition	1	2	3	4
N_x (lb/in)	10000.	0.	-8000.	-9000.
N_y (lb/in)	0.	10000.	8000.	-9000.
N_{xy} (lb/in)	-5000.	0.	0.	7000.
M_x (lb·in/in)	-150.	100.	0.	0.
M_y (lb·in/in)	150.	-250	-200.	0.
M_{xy} (lb·in/in)	0.	-150.	0.	150

5. 결 론

공학구조물의 최적설계에 있어서 일반적으로 얻게 되는 연속최적해는 대부분 실무에 적용하기 힘든 이론적인 값에 불과한 경우가 많다. 따라서, 보다 실질적인 설계, 즉 제작이 가능하고 상용성을 지닌 최적설계가 요구되고 있다. 본 연구에서는 비대칭 복합 적층평판을 대상으로 선형 근사화방법에 의한 이산최적화를 수행함으로써 해석이 복잡한 비대칭 복합 적층평판의 설계업무에 실질적인 도움이 되도록 하였으며, 이는 경제성 있는 설계일 뿐만아니라 비선형 영역에서의 이산최적화에 비해 보다 효율적임을 알수 있었

표 3-1 적층배열에 따른 최적 두께 비교(Layup 1~6)

Design variables		x_1 (in)	x_2 (in)	x_3 (in)	x_4 (in)	x_5 (in)	x_6 (in)	Objective values(in)	(N)
Layup No.	Initial values	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.6	
Layup 1	(A)	.028078	.050624	.043109	.172260	.065856	.046495	.406430	
	(B)	0.026	0.048	0.047	0.175	0.065	0.047	0.408	183
	(C)	0.030	0.052	0.042	0.170	0.067	0.047	0.408	212
Layup 2	(A)	.052578	.017677	.001040	.102580	.080931	.019872	.274680	
	(B)	0.053	0.018	0.001	0.102	0.080	0.022	0.276	176
	(C)	0.053	0.018	0.001	0.102	0.078	0.023	0.275	545
Layup 3	(A)	.007462	.034486	.067595	.098660	.061414	.111380	.381000	
	(B)	0.008	0.032	0.069	0.098	0.062	0.113	0.382	173
	(C)	0.006	0.032	0.068	0.101	0.062	0.112	0.381	616
Layup 4	(A)	.001000	.032979	.026836	.110930	.044937	.049412	.266100	
	(B)	0.001	0.032	0.030	0.110	0.047	0.049	0.269	233
	(C)	0.001	0.035	0.025	0.112	0.046	0.049	0.268	1347
Layup 5	(A)	.028546	.069389	.145030	.041715	.062067	.026541	.373290	
	(B)	0.028	0.071	0.145	0.042	0.062	0.027	0.375	134
	(C)	0.030	0.069	0.146	0.041	0.063	0.026	0.375	252
Layup 6	(A)	.001058	.030056	.048555	.126920	.057623	.065166	.329380	
	(B)	0.001	0.030	0.048	0.128	0.057	0.067	0.331	160
	(C)	0.001	0.029	0.052	0.124	0.055	0.069	0.330	244

(A) : Continuous optimum solutions.
 (B) : Discrete optimum solution by **linear approximation method**.
 (C) : Discrete optimum solution by **nonlinear branch & bound method**.
 (N) : Number of function calls to analysis structure.

표 3-2 적층배열에 따른 최적 두께 비교(Layup 7~12)

Design variables		x_1 (in)	x_2 (in)	x_3 (in)	x_4 (in)	x_5 (in)	x_6 (in)	Objective values(in)	(N)
Layup No.	Initial values	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.6	
Layup 7	(A)	.001000	.076030	.067228	.221370	.073814	.027208	.466760	
	(B)	0.001	0.077	0.067	0.222	0.074	0.027	0.468	241
	(C)	0.001	0.074	0.066	0.225	0.074	0.029	0.469	384
Layup 8	(A)	.001000	.029187	.066374	.090614	.073545	.061363	.322080	
	(B)	0.001	0.029	0.067	0.091	0.074	0.062	0.324	133
	(C)	0.001	0.030	0.067	0.090	0.076	0.059	0.323	355
Layup 9	(A)	.025226	.078149	.064755	.166890	.123730	.062076	.520830	
	(B)	0.024	0.081	0.065	0.170	0.125	0.059	0.524	143
	(C)	0.028	0.076	0.066	0.164	0.126	0.063	0.523	260
Layup 10	(A)	.001000	.028422	.042796	.086578	.016141	.123910	.298840	
	(B)	0.001	0.029	0.043	0.087	0.017	0.124	0.301	212
	(C)	0.001	0.027	0.046	0.087	0.020	0.121	0.302	390
Layup 11	(A)	.104130	.001000	.001000	.038162	.010653	.284110	.439050	
	(B)	0.104	0.001	0.001	0.038	0.012	0.284	0.440	247
	(C)	0.104	0.001	0.001	0.039	0.013	0.282	0.440	403
Layup 12	(A)	.034531	.001000	.042570	.131540	.032829	.100860	.343330	
	(B)	0.036	0.001	0.042	0.131	0.035	0.100	0.345	210
	(C)	0.037	0.001	0.041	0.131	0.031	0.103	0.344	694

다. 즉, 선형근사화방법과 비선형 분기한계법에 의한 이산최적화 결과를 비교 분석하므로써 다음의 결론을 얻었다.

1) 본 연구의 선형 근사화방법에 의한 이산최적화 알고리즘이 이산형 또는 이산형과 연속형 설계변수를 갖는 공학설계 문제에 충분히 적용 가능함을 알았다.

2) 비대칭 복합 적층평판의 이산최적설계를 위해 본 연구에서 이용한 선형 근사화 방법이 비선형 분기한계법에 비해 목적함수 값의 양질성 면에서 약간 불리한 경우가 나타나기는 하지만 구조해석 수에 따른 계산비용 면에서 훨씬 경제 적임을 보였다.

3) 임의의 회전식 적층배열에 따른 12개의 적층평판 중 4번째 적층평판(Layup 4)이 최소 두께를 나타냈으며, 이것은 주어진 다중 하중조건 하에서 4번째 적층배열이 가장 효과적인 배열형태임을 말해준다.

4) 본 연구에서는 플라이의 두께만을 설계변수로 취하였지만, 두께 뿐만아니라 적층배열과 보강섬유방향각 모두를 설계변수로 고려했을 때의 광범위한 이산 최적설계가 앞으로 연구되어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

1. Land, A. H., and Doig, A., "An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems", *Econometrica*, Vol. 28, No. 4, pp. 297~520, 1960.
2. Dakin, R. J., "A Tree Search Algorithm for Mixed Integer Programming Problems", *Computer Journal*, Vol. 8, No. 1, pp. 250~255, 1965.
3. Schmit, L., and Fleury, C., "Discrete - Continuous Variable Structural Synthesis Using Dual Methods, *AIAA*, Vol. 18, pp. 1515~1524, 1980.
4. Olsen, G. R., and Vanderplaats, G. N., "Method for Nonlinear Optimization with Discrete Design Variables," *AIAA*, Vol. 27, pp. 1584~1589, 1989.
5. Shin, D. K., Gurdal, Z., and Griffin, O. H., "A Penalty Approach for Nonlinear Optimization with Discrete Design Variables", *Engineering Optimization*, Vol. 6, No. 1, pp. 29~42, 1990.
6. Ringertz, U. T., "On Method for Discrete Structural Optimization", *Engineering Optimization*, Vol. 13, pp. 47~64, 1988.
7. Gibson, R. F., "Principles of Composite Material Mechanics", McGraw-Hill, Inc., New York, pp. 34~269, 1994.
8. Whitney, J. M., "Structural Analysis of Laminated Plates", Technomic Publishing Co., Inc., Lancaster, PA, 1987.
9. Press, W. H., Flannery, B. P., and Teukalsky, S. A., "Numerical Recipes- The Art of Scientific Computing", Cambridge University Press, pp. 31~38, 1986.
10. Vanderplaats, G. N., "ADS-A Fortran Program for Automated Design Synthesis", Engineering Design Optimization, Inc., 1987.
11. 이상근, 한상훈, "복합적층평판의 이산최적설계", 대한토목학회논문집, 제15권, 제3호, pp. 563~570, 1995.
12. 박문달, "OR프로그램집 II", 대영사, pp. 104~145, 1983.

(접수일자 : 1997. 3. 28)