

목조 돔 구조물의 해석을 위한 보-데크 연결 모델의 정식화

Simulation for the Analysis of the Beam-Decking Connector Model for the Wood Dome Structure



김 재 열*

1. 서 론

본 연구의 주 목적은 목조 돔형 구조물의 해석에 있어서 보-데크 연결(Beam-Decking Connector, BDC) 모델을 정식화하는데 있다.

목조 돔 구조물의 데크지붕 효과는 Wu(1991), Telang(1992) 등에 의해 제안되었으며, 데크지붕 효과를 설명하기 위해 트러스 브레이싱(truss bracing)법을 도입 하였다. 그러나 이 TB법은 좁은 간격으로 박혀있는 못 들의 효과를 적절히 설명해 내지 못했다.

다른 한편으로는 Tsang(1991), Kavi(1992) 등이 Dolan(1989)의 이론을 응용한 보-데크 연결법(BDC)을 도입하여 해석 하였다.

이 BDC 모델(그림 1)은 보 요소의 이 보 요

소에 강체링크로 연결되어 있는 스프링 요소가 보 요소의 각 절점을 공유하게 되므로, 아무리 많은 스프링을 가정하더라도 자유도수는 증가하지 않는다는 것이다. 그러므로 돔 구조와 같은

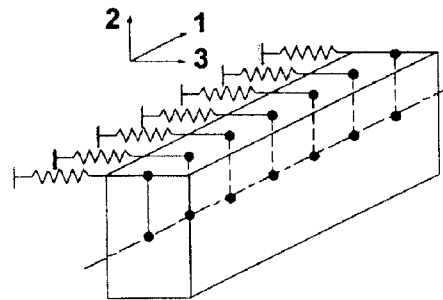


그림 1 BDC 모델

* 정회원·버지니아 공과대학, 박사후과정

대형 구조물을 해석할 때 컴퓨터 용량과 계산시간을 절약할 수 있다.

2. 2차원 BDC 강성매트릭스의 정식화

2차원 보 요소에 연결된 스프링 모델을 그림 2. (a)와 같이 나타낼 수 있다. 이 보는 d_1 - d_4 의 4 자유도를 갖는다. 스프링의 신장(伸張)은 보 요소의 절점변위로부터 보간함수(interpolation function)를 통해 결정된다. 그러므로 스프링에 대한 자유도는 강성 매트릭스 조합시 더해지지 않는다.

보의 변형전 요소는 그림 2. (b)와 같다.

연결 요소는 강성 $\gamma(v_s)$ 를 갖는 비선형 스프링이고, 여기서 v_s 는 스프링의 변위이다. 본 연구에서 채택한 스프링에 대한 상수는 비선형의 경우 기존의 실험치를 이용하여 0.056까지를 이용했다(그림 3. (a)). 상수 강성의 경우 γ 에 대한 스프링에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다(그림 3. (b)).

$$U_s = \frac{1}{2} \gamma v_s = \frac{1}{2} v_s^T \gamma v_s \quad (1)$$

연결 요소와 보 요소는 같은 자유도를 공유하

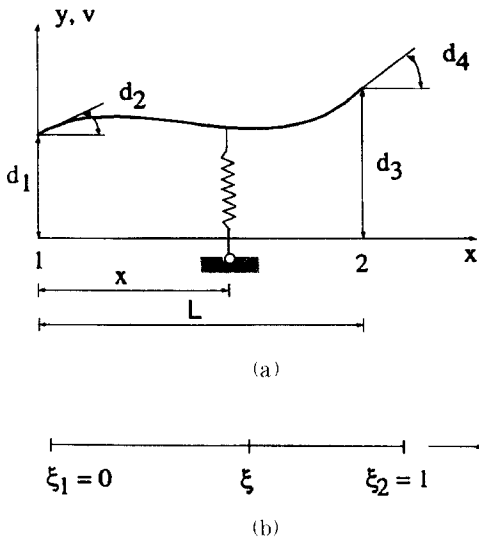
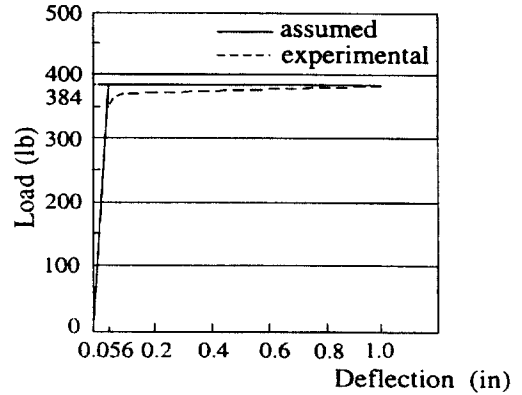
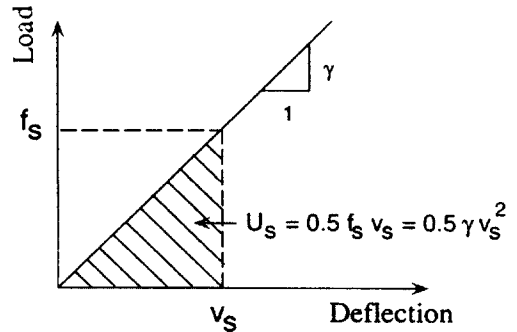


그림 2 이산화 연결스프링을 가진 2차원 보요소



(a) 선형 스프링



(b) 비선형 스프링

그림 3 하중-변위 곡선

기 때문에 스프링의 변형은 보의 보간함수에 의해 다음과 같이 구해 질 수 있다.

$$v_s = N_1(\xi) d_1 + N_2(\xi) d_2 + N_3(\xi) d_3 + N_4(\xi) d_4 = N_s d \quad (2)$$

여기서,

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ N_2(\xi) &= (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) L \\ N_3(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ N_4(\xi) &= (-\xi^2 + \xi^3) L \\ \xi &= x/L \end{aligned} \quad (3)$$

또한,

$$N_s = [N_1 N_2 N_3 N_4]$$

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

식 (1) 과 식 (2) 로부터 스프링에너지는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_s = \frac{1}{2} d^T N_s^T \gamma N_s d = \frac{1}{2} d^T k_s d$$

여기에서 스프링 강성 매트릭스는 다음과 같이 주어진다.

$$k_s = N_s^T \gamma N_s$$

$$= \gamma \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$$

$$= \gamma \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_4 & g_7 \\ & g_3 & g_5 & g_8 \\ & & g_6 & g_9 \\ & & & g_{10} \end{bmatrix}$$

(4)

또한

γ =spring stiffnes

$$g_1 = N_1 N_2$$

$$g_2 = N_1 N_2$$

$$g_3 = N_1 N_2$$

$$g_4 = N_1 N_2$$

$$g_5 = N_1 N_2$$

$$g_6 = N_1 N_2$$

$$g_7 = N_1 N_2$$

$$g_8 = N_1 N_2$$

$$g_9 = N_1 N_2$$

$$g_{10} = N_1 N_2$$

(5)

식 (5) 의 N_s 는 식 (3) 에서 정의된다.

BDC 요소 (보와 스프링) 의 토탈에너지는 보의 내부에너지 (U_b) 와 스프링에너지 (U_s) 의 합이다.

$$U_s = U_b + U_s$$

$$= \frac{1}{2} d^T k_b d + \frac{1}{2} d^T k_s d$$

$$= \frac{1}{2} d^T k d$$

(6)

여기서,

k_b = 2차원 보 강성 매트릭스

$k = k_b + k_s$ = BDC 강성 매트릭스

다수의 스프링이 보에 연결되어 있는 경우 BDC 요소의 토탈에너지는 다음과 같다.

$$U = U_b + \sum_{i=0}^n U'_i$$

$$= \frac{1}{2} d^T (k_b + \sum_{i=0}^n k'_i) d$$

(7)

여기서,

U'_i = i 번째 스프링의 에너지

k'_i = i 번째 스프링의 강성

n = 스프링의 총수

그리고,

$$k = k_b + \sum_{i=0}^n k'_i$$

= 다수의 스프링을 갖는 BDC 요소의 강성 매트릭스

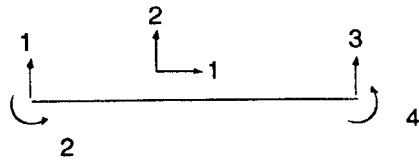


그림 4 2차원 보 요소의 자유도

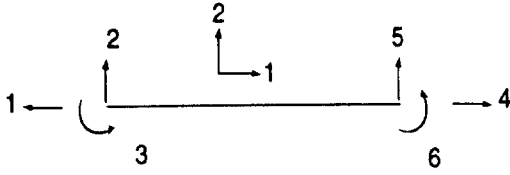


그림 5 2차원 프레임 요소의 자유도

2차원 보에 대한 BDC 강성 매트릭스는 Ho-ler에 의해 개발된 요소코드(M코드)를 이용하여 2차원 프레임요소를 전환시킬 수 있다.

그림 4와 그림 5는 2차원 보 요소와 2차원 프레임 요소를 각각 나타내고 있다.

그림 4와 그림 5에서 알 수 있듯이, 2차원 보 요소로부터 2차원 프레임 요소로의 전환을 위한 M코드는 다음과 같다.

$$M = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (8)$$

이 M코드는 식(4)의 보에 대한 BDC 강성 매트릭스를 프레임 요소에 대한 BDC 강성 매트릭스로 나타내는 데 쓰인다.

이 M코드는 식(4)에 도입하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$k_s = \gamma \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_4 & g_7 \\ & g_3 & g_5 & g_8 \\ & & g_6 & g_9 \\ & & & g_{10} \end{bmatrix}_{2 \ 3 \ 5 \ 6}^2 \ 3 \ 5 \ 6$$

그리고 2차원 프레임 요소에 대한 k_s 매트릭스는 다음과 같다.

$$k_s = \gamma \begin{bmatrix} & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & g_1 & g_2 & 0 & g_4 & g_7 \\ & & g_3 & 0 & g_5 & g_8 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \text{sym.} & & & & \\ & & & & & & & g_6 & g_9 & & \\ & & & & & & & & & g_{10} & \end{bmatrix}_{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6}^1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \quad (9)$$

g_i 는 식(5)에서 정의된다.

2차원 프레임 요소에 대한 국부 강성 매트릭스는 다음과 같이 주어진다.

$$k_b = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 \\ & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ & & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ & & & \beta & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & 12 & -6L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서,

$$\alpha = \frac{EI}{L^3}, \quad \beta = \frac{AL^3}{I}, \quad \gamma = \alpha\beta = \frac{EA}{L}$$

E = 탄성계수

I = 단면 2차 모멘트

L = 요소 길이

A = 단면적

3. 3차원 BDC 강성 매트릭스의 정식화

3차원 프레임 요소는 그림 5에서 보는 바와 같이 각 절점에서 6개씩 총 12개의 DOF를 갖는다. 동 모델의 경우 3차원 보 요소로 해석되기 때문에 BDC 요소에 대해서도 3차원 강성 매트릭스를 정식화할 필요가 있다.

그림 7은 이산화된 연결 스프링을 갖는 3차원

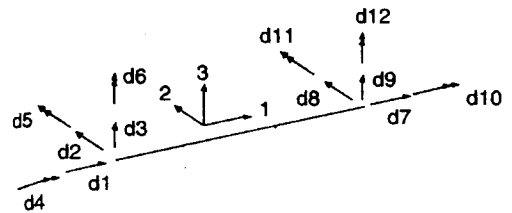


그림 6 프레임 요소의 자유도

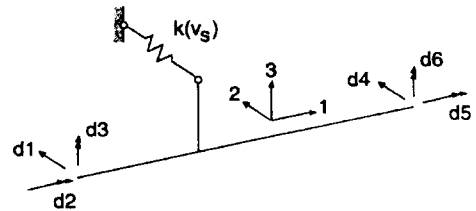


그림 7 연결스프링을 갖는 3차원 보요소

보를 나타내고 있다.

프레임 요소에 있어서 축방향 및 면외방향의 DOF (DOF 1, 3, 7, 9)는 BDC 조합에서는 고려되지 않았다. BDC 요소는 보 요소에 대해 측면 변형에 대한 저항만을 하고 있기 때문이다.

즉, 스페이스 프레임 요소에 대한 DOF 중 BDC 요소와 함께 공유되는 것은 2, 4, 6, 8, 10, 12이며 이들은 그림 7에서 d_1-d_6 로 표기되어 있다.

데크가 보에게 부여하는 측면 저항력을 모델화하기 위해 보의 상부와 직각으로 비선형 스프링을 설치하였다.

고정용 핀(nail)은 보의 변형에 대해 측면저항력을 제공한다. 스프링의 한쪽 단부는 길이가 h 인 강체 링크로 연결되어 있으며, 다른 한쪽 단부는 데크가 면내응력에 대해 매우 견고하다는 가정하에 고정된 모델을 사용하였다.

데크의 면내변위는 보 요소의 측면 변위, 회전 및 스프링의 신장에 비해 매우 작기 때문에 무시된다.

그림 8은 데크와 보의 고정핀에 의한 연결을 나타내고 있고, 그림 9는 스프링 변위(v_s)와 보

의 절점 변위(w 와 ϕ)사이의 관계를 나타낸다.

일반적으로 보에 위치한 모든 스프링에 대한 변위는 다음과 같이 주어진다.

$$v_s(\xi) = w(\xi) - h\phi(\xi) \quad (11)$$

여기서,

$w(\xi)$: 2방향에 있어서 면외 변위 및 3축에 있어서 휨에 대응하는 보의 변위이다.

h : 강체 링크 길이

$\phi(\xi)$: 1축에 대한 보의 회전

$$\xi = x/L$$

보의 처짐 및 회전은 독립된 변위이고, 다음과 같이 각각 다른 보간함수를 나타낸다.

$$\phi(\xi) = [N_1^{\phi} \ N_2^{\phi}] \begin{bmatrix} d_2^{\phi} \\ d_3^{\phi} \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서,

$$\begin{aligned} N_1^{\phi} &= (1 - \xi) \\ N_2^{\phi} &= \xi \end{aligned} \quad (13)$$

$$w(\xi) = [N_1^w \ N_2^w \ N_3^w \ N_4^w] \begin{bmatrix} d_1^w \\ d_2^w \\ d_3^w \\ d_4^w \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서,

$$\begin{aligned} N_1^w &= N_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ N_2^w &= N_2(\xi) = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L \\ N_3^w &= N_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ N_4^w &= N_4(\xi) = (-\xi + \xi^3)L \end{aligned}$$

식 (11), 식 (12), 식 (13)으로부터, 스프링 변위 v_s 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} v_s &= N_1^w d_1 - h N_1^{\phi} d_2 + N_2^w d_3 \\ &+ N_3^w d_4 - h N_2^{\phi} d_5 + N_4^w d_6 = Sd \end{aligned} \quad (15)$$

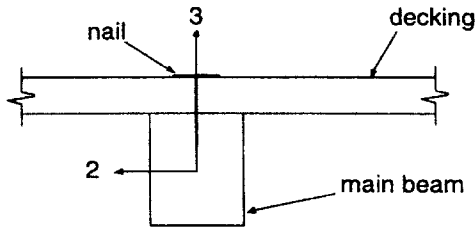


그림 8 보-데크 연결

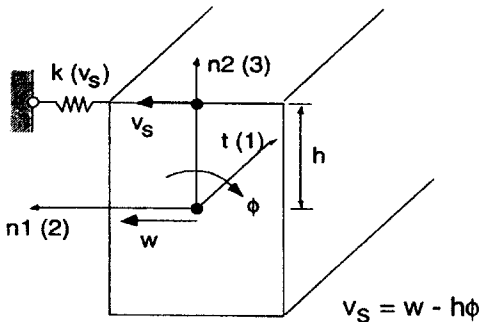


그림 9 스프링 변위와 보의 절점 변위와의 관계

여기서,

$$S = [S(1) \ S(2) \ S(3) \ S(4) \ S(5) \ S(6)]$$

$$= [N_1^T \ -hN_1^T \ N_2^T \ N_3^T \ -hN_2^T \ N_4^T]$$

$$v_s = N_1^T d_1 - hN_1^T d_2 + N_2^T d_3$$

$$+ N_3^T d_4 - hN_2^T d_5 + N_4^T d_6 = Sd \quad (16)$$

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix} \quad (17)$$

식 (15)는 3D BDC요소의 보간함수이다.

이러한 함수를 이용하여 삼차원 BDC 요소에 대한 강성 매트릭스를 구할 수 있고, 스프링 강성 매트릭스는 다음과 같다.

$$k_s = S^T \gamma S$$

$$k_s = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ g_1 & g_2 & g_4 & g_7 & g_{11} & g_{16} \\ g_3 & g_5 & g_8 & g_{12} & g_{17} \\ g_6 & g_9 & g_{13} & g_{18} \\ g_{10} & g_{14} & g_{19} \\ \text{sym.} & g_{15} & g_{20} \\ g_{21} \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기서,

$$\begin{aligned} g_3 &= S(2)S(2), & g_4 &= S(1)S(3) \\ g_1 &= S(1)S(1), & g_2 &= S(1)S(2) \\ g_5 &= S(2)S(3), & g_6 &= S(3)S(3) \\ g_7 &= S(1)S(4), & g_8 &= S(2)S(4) \\ g_9 &= S(3)S(4), & g_{10} &= S(4)S(4) \\ g_{11} &= S(1)S(5), & g_{12} &= S(2)S(5) \\ g_{13} &= S(3)S(5), & g_{14} &= S(4)S(5) \\ g_{15} &= S(5)S(5), & g_{16} &= S(1)S(6) \\ g_{17} &= S(2)S(6), & g_{18} &= S(3)S(6) \\ g_{19} &= S(4)S(6), & g_{20} &= S(5)S(6) \\ g_{21} &= S(6)S(6) \end{aligned} \quad (19)$$

S(1)과 S(6)는 식10에서 주어진다.

2차원의 경우와 유사하게, 위의 강성 매트릭스는 12 DOF를 가진 프레임 요소에 대한 강성 매트릭스에 맞추기 위해 12×12 매트릭스로 변환시킨다.

이 변환을 위한 M코드는 다음과 같다.

$$M = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (20)$$

스프링 강성 매트릭스를 나타내는 식 (18)을 12×12 매트릭스로 나타내면 다음과 같다.

$$k_s = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & g_1 & 0 & g_2 & 0 & g_4 & 0 & g_7 & 0 & g_{11} & 0 & g_{16} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & g_3 & 0 & g_5 & 0 & g_8 & 0 & g_{12} & 0 & g_{17} \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & g_6 & 0 & g_9 & 0 & g_{13} & 0 & g_{18} \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & g_{10} & 0 & g_{14} & 0 & g_{19} \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \text{sym.} & & \\ & & & & & & & & & & g_{15} & 0 & g_{20} \\ & & & & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & g_{21} \end{bmatrix} \quad (21)$$

식 (21)은 12DOF 형태로 전환된 BDC 요소에 대한 국부 강성 매트릭스이다.

이 매트릭스는 상수 스프링 강성을 도입한 경우이지만, 그림 3과 같은 비선형의 경우는 실제 강성이 변화함을 알 수 있다.

그러므로 비선형 해석시는 이 세분화된 하중-변위 곡선을 따로 정의해야만 한다.

또한 공간구조와 경우 보들이 다양하게 각도지어 짜여져 있기 때문에 BDC 요소가 조합되기전 각 국부 강성 매트릭스는 전체 강성 매트릭스에 맞게 방향여현을 도입해야 한다.

3차원 스페이스 프레임에 대한 국부 강성 매트릭스는 다음과 같이 주어진다.

$$k_b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 12\beta & 0 & 0 & 0 & -6L\beta & 0 & -12\alpha & 0 & 0 & 0 & -6L\beta \\ & & 12\alpha & 0 & 6L\alpha & 0 & 0 & 0 & -12\alpha & 0 & 6L\alpha & 0 \\ & & & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta & 0 & 0 \\ & & & & 4L^2\alpha & 0 & 0 & 0 & -6L\alpha & 0 & 2L^2\alpha & 0 \\ & & & & & 4L^2\beta & 0 & 6L\beta & 0 & 0 & 0 & 2L^2\beta \\ & & & & & & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 12\beta & 0 & 0 & 0 & 6L\beta \\ & & & & & & & & 12\alpha & 0 & -6L\alpha & 0 \\ & & & & & & & & & \delta & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 4L^2\alpha & 0 \\ & & & & & & & & & & & 4L^2\beta \\ \text{sym.} & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\alpha = \frac{EI_2}{L^3}, \quad \beta = \frac{EI_3}{L^3}$$

$$\gamma = \frac{EA}{L}, \quad \delta = \frac{GJ}{L}$$

E = 탄성계수

I_2 = 2축에 대한 관성 모멘트

I_3 = 3축에 대한 관성 모멘트

L = 요소 길이

J = 비틀림 상수

G = 전단계수

A = 단면적

발 취 문 헌

1. Samruan Tongtoe, Failure Prediction of Spatial Wood Structures ; Geometric and Material Nonlinear finite Element Analysis, Ph.D Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1996, pp. 1-46