

박벽 공간뼈대구조의 안정성 및 후좌굴 유한요소해석

Stability and Post-Buckling Analyses of Thin-Walled Space Frames Using Finite Element Method

김 문 영*
Kim, Moon-Young

안 성 원**
Ahn, Sung-Won

요 지

구속된 뒹(restrained warping) 효과를 고려하는 박벽 공간뼈대구조의 횡후좌굴거동을 조사하기 위하여 기하학적 비선형 유한요소이론 및 해석법을 제시한다. 가상일의 원리를 이용하여 대변형효과를 고려한 3차원 연속체의 평형방정식으로부터, 구속된 뒹효과를 고려하고 유한한 회전각의 2차항의 효과를 포함하는 변위장을 도입하여 초기응력을 받는 박벽 공간뼈대구조의 증분평형방정식을 유도한다. 박벽 공간뼈대구조를 유한요소로 나누고 변위장을 요소변위에 관한 Hermitian 다항식으로 나타내어 이를 평형방정식에 대입함으로써 접선강도행렬을 유도한다. 또한 updated Lagrangian formulation에 근거하여, 증분변위로부터 강제회전변위와 순수변형성분을 분리시켜서 강제회전은 요소의 방향변화를 결정하고, 순수변형은 부재력증분을 산정하는 불평형하중 산정법을 제시한다. 박벽 공간뼈대구조의 횡-비틀좌굴 및 후좌굴 거동에 대한 예제들을 통하여 본 연구에 대한 해석결과와 문헌의 결과를 비교 검토함으로써 본 연구에서 제시된 이론 및 해석방법의 정당성을 입증한다.

Abstract

In order to trace the lateral post-buckling behaviors of thin-walled space frames, a geometrically non-linear finite element formulation is presented by applying incremental equilibrium equations based on the updated Lagrangian formulation and introducing Vlasov's assumption. The improved displacement field for symmetric thin-walled cross sections is introduced based on inclusion of second order terms of finite rotations, and the potential energy corresponding to the semitangential rotations and moments is consistently derived. For finite element analysis, tangent stiffness matrices of the thin-walled space frame element with 7 degrees of freedom including the restrained warping for each node are derived by using the Hermitian polynomials as shape functions. A co-rotational formulation in order to evaluate the unbalanced loads is presented by separating the rigid body rotations and pure deformations from incremental displacements and evaluating the updated direction cosines of the frame element due to rigid body rotations and incremental member forces from pure deformations. Finite element solutions for the spatial buckling and post-buckling analysis of thin-walled space frames are presented and compared with available solutions and other researcher's results.

Keywords : thin-walled space frame element, geometrically non-linear analysis, semitangential rotation, semitangential moment, warping

* 성희원·성균관대학교 토목공학과, 부교수
** 성균관대학교 토목공학과, 석사과정

• 이 논문에 대한 토론을 1998년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1998년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

박벽 공간뼈대구조의 대변형, 후좌굴 및 탄소성거동을 추적하기 위한 비선형 유한요소이론 및 해석법은 토목, 건축, 기계, 항공 그리고 선체 구조공학의 여러분야에서 근간을 이루고 있는 연구주제이다. 박벽뼈대구조의 기하학적 비선형 유한요소해석에 관한 연구들은 대체로 Hermitian 다항식을 형상함수로 사용하여 강도행렬을 산정하는 직선요소와 isoparametric interpolation 함수를 형상함수로 사용하고 강도행렬을 산정할 때 가우스 수치적분법을 적용하는 곡선 보요소로 요약할 수 있다. 직선 보요소는 Wen과 Rahimzadeh¹⁾의 연구, 곡선보 요소는 Bathe와 Bolourchi²⁾의 논문에서 찾아볼 수 있다. Saafan³⁾이 보-기둥 이론을 이용하여 평면뼈대에 대한 강도행렬을 유도하였고 Oran⁴⁾은 이를 평면 및 공간뼈대로 확장시켜서 접선강도행렬을 제시하였다. Meek와 Tan⁵⁾ 그리고 Papadrakakis⁶⁾는 각각 arc-length method와 vector iteration method를 적용하여 공간뼈대구조의 후좌굴해석을 수행하였다. 김과 장^{7,8)}은 변위 및 하중증분 알고리즘을 사용하여 강결된 평면뼈대구조의 복잡한 평형경로(equilibrium path)를 추적하였다. 그리고 김과 안⁹⁾은 구속된 비틀을 무시한 공간뼈대구조의 기하학적인 비선형 유한요소해석법을 제시하였다. 유한요소법을 사용하여 박벽 공간뼈대의 안정성 및 기하학적 비선형해석을 수행하는 경우에 탄성 및 기하학적 강도행렬의 계산은 필수적이다. 이러한 강도행렬을 이용하여 박벽공간보의 좌굴해석 및 기하학적 비선형해석을 수행한 이계까지의 연구들은 문헌^{10,11)}에서 찾아볼 수 있다.

공간뼈대구조의 3차원 후좌굴해석시 각 절점은 세축방향으로 유한한 회전변위를 일으킨다. 이때 방향이 다른 고정된 축들에 대한 회전각(axial rotations)들이 non-commutativity의 성질을 나타낸다. Argyris는 고정된 축에서 정의된 회전각에 근거하여 유한한 각도로 만나는 공간뼈대구조의 횡좌굴해석을 수행하면 상당한 오류가 발생한다는 것을 처음으로 지적하였다. 이러한 문제를 해

결하기 위하여 Argyris^{12,13)}는 회전각은 commutativity의 성질을 갖는 semitangential rotation으로 정의하고 natural mode formulation을 이용하여 2축 대칭단면을 갖는 공간뼈대구조의 기하학적 비선형 유한요소해석법을 개발하였다.

본 논문에서는 박벽 공간뼈대구조에 대하여 기하학적인 비선형성이 고려될 수 있는 유한요소이론 및 해석방법을 제시하며, 이를 위하여 탄성 및 기하학적 강도행렬을 산정하고, updated Lagrangian co-rotational formulation에 근거한 구조물의 변형된 상태에서의 내력을 구하는 불평형하중 산정법을 제시한다. 가상일의 원리를 이용하여 초기응력을 받는 3차원 연속체의 평형방정식으로부터 구속된 횡-비틀좌굴효과를 고려하고 단면은 대칭이며 유한한 회전각의 2차항을 포함하는 개선된 변위장을 도입하여 박벽 공간뼈대에 대한 증분 평형방정식을 얻는다. 뼈대구조물을 유한요소로 분할하여 박벽 공간뼈대요소의 변위장을 요소변위벡터에 관한 Hermitian다항식으로 나타내고 이를 평형방정식에 대입함으로써 탄성 및 기하학적 강도행렬을 산정한다. 이때 축방향변위에 대해서는 1차, 횡방향 변위와 비틀각에 대해서는 3차 Hermitian 다항식을 사용한다. 박벽 공간뼈대구조의 횡-비틀좌굴 및 후좌굴 거동에 대한 예제들을 통하여 본 연구의 유한요소해석에 의한 결과와 문헌의 해석결과를 비교 검토함으로써 본 연구에서 제시된 이론 및 방법의 타당성과 유용성을 입증한다.

2. 박벽 공간뼈대구조의 기하학적 비선형 유한요소이론

본 장에서는 박벽 공간뼈대구조의 기하학적 비선형 해석법을 제시하기 위하여, 박벽 공간뼈대요소의 변위장을 도입하여 3차원 연속체의 증분평형방정식으로부터 뼈대요소의 증분방정식을 유도한다. 이때 Hermitian 다항식을 사용하여 구속된 뒹(restrained warping)효과를 고려하는 박벽 공간뼈대요소의 접선강도행렬을 산정하고, co-rotational formulation에 근거한 불평형하중 산정법을 제시한다.

2.1 회전자유도를 갖는 유한요소의 증분평형방정식

가상일의 원리를 이용한 3차원 연속체의 평형방정식¹⁵⁾은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{V'} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} d'V = {}^{t+\Delta t} R$$

$$= \int_{V'} {}^{t+\Delta t} T_i \delta {}^{t+\Delta t} U_i d'V \quad (1)$$

여기서 첨자표시는 Bathe¹⁵⁾의 규약을 따른다. ${}^{t+\Delta t} S_{ij}$ 는 2nd Piola-Kirchhoff stress, ${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}$ 는 Green-Lagrange strain이며, U_i 는 변위벡터성분이다. 오른쪽항은 표면력 ${}^{t+\Delta t} T_i$ 에 의한 가상일을 나타낸다. 식(1)을 증분평형방정식으로 변환시키기 위하여, 응력, 변형도 및 변위를 다음과 같은 증분관계식으로 나타낼 수 있다.

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}_t \tau_{ij} + {}_t S_{ij} \quad (2a)$$

$${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} = {}_t \epsilon_{ij} \quad (2b)$$

$${}^{t+\Delta t} U_i = {}_t U_i + U_i + U_i' \quad (2c)$$

여기서 윗첨자 't' 와 't+Δt'는 각각 시간 't' 와 't+Δt'상태에서의 크기를 나타내며, 식(2)와 이후의 식들에서 윗첨자가 표시되지 않는 물리량은 증분량을 의미하는 것으로 약속한다. ${}_t \tau_{ij}$ 는 시간 t에서의 Cauchy stress를 나타낸다. U_i 와 U_i' 는 증분변위¹⁶⁾를 구성하며, 이 두벡터는 각각 단면의 유한한 회전에 의한 변위파라미터의 1차 및 2차항을 나타낸다. 식(2c)를 식(2b)의 정의식에 대입하고, 변위파라미터의 2차항까지를 고려하면 증분변형도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}_{t+\Delta t} \epsilon_{ij} \cong {}_t \epsilon_{ij} + \eta_{ij} + {}_t e_{ij} \quad (3a)$$

여기서

$${}_t \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}_t U_{i,j} + {}_t U_{j,i}) \quad (3b)$$

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} ({}_t U_{k,i} \cdot {}_t U_{k,j}) \quad (3c)$$

$${}_t e_{ij} = \frac{1}{2} ({}_t U_{i,j} + {}_t U_{j,i}) \quad (3d)$$

식(3)에서 ${}_t e_{ij}$ 와 η_{ij} 는 U_i 에 의한 변형도의 선형성분과 비선형성분을, ${}_t e_{ij}$ 는 U_i 에 의한 선형성분을 나타낸다. 식(2)을 식(1)에 대입하고 비선형항을 무시하면, 다음과 같은 증분평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\int_{V'} {}_t C_{ijrs} {}_t e_{rs} \delta {}_t e_{ij} d'V + \int_{V'} {}_t \tau_{ij} \delta (\eta_{ij} + {}_t e_{ij}) d'V$$

$$= {}^{t+\Delta t} R - \int_{V'} {}_t \tau_{ij} \delta {}_t e_{ij} d'V \quad (4)$$

2.2 박막 공간뿔대요소의 변위파라미터와 단면력

그림 1a는 부재좌표계 (x_1, x_2, x_3) 에 대하여 대칭단면을 갖는 박막 공간뿔대요소의 변위장을 7개의 변위파라미터로 나타낸 것으로 x_1 은 도심축, x_2 와 x_3 는 주축을 나타낸다. U_1, U_v, U_s 는 각각 x_1, x_2, x_3 축방향의 강체이동변위 (rigid body translation)를 나타내며, $\theta, -U_s', U_s'$ 은 x_1, x_2, x_3 축에 대한 강체회전변위 (rigid body rotation)를 나타낸다. θ' 는 단면의 뒤틀변형에 의한 x_1 축방향으로의 변화율이며 구속된 뒤틀 (restrained warping) 거동을 무시하는 경우에 일정한 값을 갖는다.

부재내 임의의 한점이 휨과 비틀 그리고 축방향 변위가 결합하여 변형을 일으켰을 때 박막 공간뿔대요소의 임의의 단면에 대한 변위장은 다음과 같이 나타낼 수 있다

$$U_1(x_1, x_2, x_3) = U_1 - U_s' x_3 - U_v' x_2 - \theta' \phi \quad (5a)$$

$$U_2(x_1, x_2, x_3) = U_v - \theta x_3 \quad (5b)$$

$$U_3(x_1, x_2, x_3) = U_s + \theta x_2 \quad (5c)$$

$$U_1'(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} [-\theta U_s' x_2 + \theta U_v' x_3] \quad (6a)$$

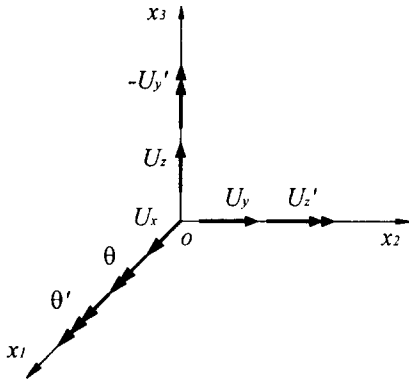
$$U_2'(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} [-(\theta^2 + U_v'^2) x_2 - U_s' U_v' x_3]$$

$$(6b)$$

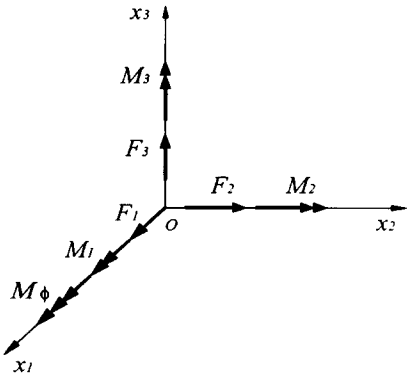
$$U_3'(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} [-(\theta^2 + U_s'^2) x_3 - U_s' U_v' x_2]$$

$$(6c)$$

식(5), (6)은 각각 변위파라미터의 1차항과 2차항을 나타내며, ϕ 는 뒤틀 (warping) 함수를 나타낸다.



(a) Displacement parameters



(b) Stress resultants

그림 1 Notation for displacement parameters and stress resultants

Vlasov의 가정에 따라 면내변형도 ($\epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{23}$)는 무시하고, 면내응력 ($\tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{23}$)은 영으로 가정한다. 그림 1a의 변위파라미터에 대응하는 단면력은 그림 1b와 같이 나타낼 수 있으며, 이들 단면력에 대한 정의식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \int_A \tau_{11} dA \\
 F_2 &= \int_A \tau_{12} dA \\
 F_3 &= \int_A \tau_{13} dA \\
 M_1 &= \int_A (\tau_{13}x_2 - \tau_{12}x_3) dA \\
 M_2 &= \int_A \tau_{11} \cdot x_3 dA
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_3 &= - \int_A \tau_{11} \cdot x_2 dA \\
 M_\phi &= \iint_A \tau_{11} \cdot \phi dA \\
 M_R &= \int_A (\tau_{12} \cdot \phi_{,2} + \tau_{13} \cdot \phi_{,3}) dA \\
 M_P &= \int_A \tau_{11} (x_2^2 + x_3^2) dA
 \end{aligned} \tag{7}$$

여기서 F_1 은 축력, F_2, F_3 는 전단력, M_2, M_3 는 x_2 와 x_3 축에 대한 휨모멘트, 그리고 M_1 은 비틀림모멘트, M_ϕ 는 Bimoment 이며, M_R 은 Restrained torsion을 나타낸다.

선형탄성재료로 가정하면 대칭단면의 단면력-변위관계식과 평형조건식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 F_1 &= EA U'_x \\
 F_2 &= M'_3 \\
 F_3 &= -M'_2 \\
 M_1 &= GJ \theta' \\
 M_2 &= -EI_2 U''_z \\
 M_3 &= EI_3 U''_y \\
 M_\phi &= -EI_\phi \theta''
 \end{aligned} \tag{8}$$

여기서, EA, EI_2, EI_3, GJ 는 각각 축방향강성, x_2 및 x_3 축방향의 휨강성, 그리고 비틀림강성을 의미하며, I_ϕ 는 뒹상수(warping constant)를 의미한다. 박벽 공간뿔대요소의 접선강도행렬을 유도하기 위하여 식 (4)를 생각한다. 변위장에 대한 식 (5)와 (6)을 식 (4)에 대입하고 식 (7)의 단면력에 대한 정의를 고려하면 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다¹⁶⁾.

$$\int C_{i r s t} e_{r s} \delta_{i e_j} d'V = \frac{1}{2} \delta \int (EA U_x'^2 + EI_3 U_y''^2 + EI_2 U_z''^2 + GJ \theta'^2 + EI_\phi \theta''^2) dx_1 \tag{9a}$$

$$\begin{aligned}
 \int \tau_{ij} \delta_{(m_j + i e_i)} d'V &= \frac{1}{2} \delta \int [F_1 (U_y''^2 + U_z''^2 + M_\phi \theta''^2 \\
 &+ F_2 U_z' \theta - F_3 U_y' \theta + M_1 (U_z U_y'' - U_z' U_y') \\
 &+ M_2 (U_y'' \theta - U_y' \theta') + M_3 (U_z'' \theta - U_z' \theta')] dx_1
 \end{aligned} \tag{9b}$$

$$\int \tau_{ij} \delta_{i e_j} d'V = \int [F_1 \delta U_x' - M_2 \delta U_z'' + M_3 \delta U_y'$$

$$v = -M_1^p/L$$

$$w = -M_1^p/2$$

$$x = [(M_2^p - 2M_2^q)]/5$$

여기서 $(c', e', f', g', h', i', ii', j', k', s', t', u', x')$ 은 $(c, e, f, g, h, I, ii, j, k, s, t, u, x)$ 의 (M_2^p, M_2^q) 를 (M_3^p, M_3^q) 으로 대체시킴으로써 얻을 수 있다.

2.4 박벽 공간뼈대구조의 불평형하중 산정

구조물의 비선형해석시 증분형식의 반복계산법을 적용하여야 하며, 이러한 계산에서 변형된 상태에 대응하는 부재력증분을 정확히 산정하는 것이 매우 중요하다. 이를 위하여 updated Lagrangian co-rotational formulation에서는 구조물 평형방정식으로부터 산정하는 부재의 증분변위 U_e 를 강체변위 (rigid body displacement) U_r 와 순수변형성분 (pure deformation) U_d 으로 분리시켜야 한다. 이를 식으로 나타내면 식 (12)와 같다.

$$U_i = \langle U_r ; U_d \rangle \quad (12a)$$

$$U_r = \langle U, V, W, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle,$$

$$U_d = \langle U, \theta_{13}, \theta_{23}, \theta_{12}, \theta_{22}, \omega, f^p, f^q \rangle \quad (12b)$$

여기서 $\langle U_r, V_r, W_r \rangle$ 과 $\langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \rangle$ 는 각각 강체이동 및 회전변위를 나타내며, 식 (12)의 각항들은 아래의 식으로 산정한다.

$$U_r = (U^p + U^q)/2$$

$$V_r = (V^p + V^q)/2$$

$$W_r = (W^p + W^q)/2 \quad (13a)$$

$$\gamma_1 = (\omega^q + \omega^p)/2$$

$$\gamma_2 = (W^q - W^p)/L$$

$$\gamma_3 = (V^q - V^p)/L \quad (13b)$$

$$U = U^q - U^p \quad \omega = \omega^q - \omega^p$$

$$f^p = f^p \quad f^q = f^q \quad (13c)$$

$$\theta_{12} = \omega^q - \gamma_2 \quad \theta_{22} = \omega^q - \gamma_2$$

$$\theta_{13} = \omega^q - \gamma_3 \quad \theta_{23} = \omega^q - \gamma_3 \quad (13d)$$

여기서 $\theta_{13}, \theta_{23}, \theta_{12}, \theta_{22}$ 는 그림 3에서 보는바와 같이 재단회전각증분이며 ω 는 부재양단의 상대적인 비틀림각증분을 나타낸다 그리고 U 는 상대적인 축방향변위증분을 나타내며 f^p 와 f^q 는 각각 Bimoment에 의한 부재양단의 비틀림각증분을 나타낸다.

부재좌표계에서 식 (13)을 정리하면 증분변위 U_e 와 U_i 의 관계식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_e = A_e \cdot U_i \quad (14)$$

여기서 A_e 는 적합행렬을 나타내며 자세한 결과식은 표 2에 제시하였다.

식 (14)를 식 (11a)에 대입하면 아래와 같이 증분변위 U_e 에 대응하는 접선강도행렬 ' K_e '를 얻는다.

$$\delta U_e^T 'K_e U_e = \delta U_i^T (A_e^T 'K_e A_e) U_i = \delta U_i^T 'K_i U_i \quad (15)$$

여기서 ' K_i '의 구체적인 계산 결과식은 표 3에 제시하였다.

$$a_1 = F_1^p L$$

$$a_2 = EA/L$$

$$b_1 = 2F_1^p L/15 + 4EI_3/L$$

$$b_2 = 2F_1^p L/15 + 4EI_2/L$$

$$c_1 = -F_1^p L/30 + 2EI_3/L$$

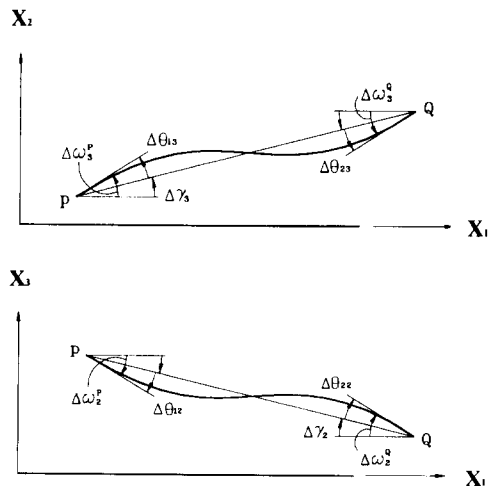


그림 3 Pure deformations of the beam projection on the x_1-x_2 and x_1-x_3 plane

우, 불평형하중은 다음의 반복계산에서는 하중으로 작용한다. updated co-rotational Lagrangian formulation에 근거한 불평형하중의 산정법을 요약하면 다음과 같다.

- 1) 구조물 전체의 증분방정식을 풀어서 증분 변위벡터를 구한다.
- 2) 각 부재에 대응하는 증분변위성분을 부재 좌표계로 좌표변환시킨다.
- 3) 부재좌표계에 대한 증분변위로부터 강제회전 변위와 순수변형성분을 계산한다.(그림 3 참조)
- 4) 단계 3)에서 계산된 강제회전변위를 전 단계까지의 강제회전변위에 더하여 새로운 좌표변환행렬을 구성한다.
- 5) 단계 3)에서 계산된 순수변형성분을 이용하여 각 부재의 재단력증분벡터를 식(16)과 같이 계산하고, 변형된 상태에 대응하는 재단력을 산정한다.
- 6) 단계 5)에서 계산된 각 부재의 재단력에 대응하는 절점력벡터와 각 절점에 작용하는 외력 벡터의 차이로 불평형하중을 산정한다.
- 7) 단계 6)에서 구해진 불평형하중 성분중에서 가장 큰값이 수렴허용치보다 작으면 다음 하중단계로 넘어가고, 그렇지 않으면 이 조건을 만족시킬 때까지 단계 1)부터 단계 6)까지 과정을 반복계산한다.

3. 수치해석 예

본 논문에서 제시된 비선형 유한요소이론을 적용하여 구속된 뒎효과를 고려하는 박벽 공간뿔대 구조에 대하여 기하학적 비선형해석을 수행한다. Snap-buckling과 같은 비선형 극한거동을 추적하기 위하여 변위 및 하중증분법⁸⁾을 적용한다. 대칭 단면을 갖는 박벽 공간뿔대구조에 대하여 안정성 해석(선형좌굴해석)과 기하학적 비선형해석(후좌굴해석)을 수행하기 위한 유한요소해석 프로그램을 개발하였다. 본 연구에서 개발된 프로그램의 타당성을 검증하기 위하여 박벽 공간뿔대구조의 좌굴하중에 대한 엄밀해 또는 문헌의 해석결과와 본 연구에 의한 수치해석 결과들을 비교 검토한다.

3.1 모멘트에 의한 직각 캔틸레버구조의 횡좌굴

그림 4는 semitangential moment에 의해서 횡좌굴을 일으키는 박벽 직각 캔틸레버구조를 나타낸 것이다. 20개의 뿔대요소로 모델링하였으며, 해석에 사용된 재료의 성질 및 단면제원은 아래와 같다.

$$L=100cm \quad A=1cm^2 \quad I_y=1000cm^4 \quad I_z=1cm^4$$

$$I_\phi=0.0cm^4 \quad E=10^4N/cm^2 \quad G=E/2 \quad J=2cm^4$$

구조물의 횡좌굴에 대한 임계하중값은 본 연구에 의한 해석결과와 Argyris^{12,13)}의 결과를 표 4에 함께 나타내었다. 표에서 보는 바와 같이 본 연구의 결과와 Argyris^{12,13)}의 결과에서는 모멘트를 작용 시키는 방향에 관계없이 크기가 동일한 값을 나타내며, 두 결과는 거의 일치하는데 이는 본 연구에서 유도한 점선강도행렬이 Argyris의 Natural mode formulation에 의한 행렬과 거의 일치하였기 때문이라고 판단된다.

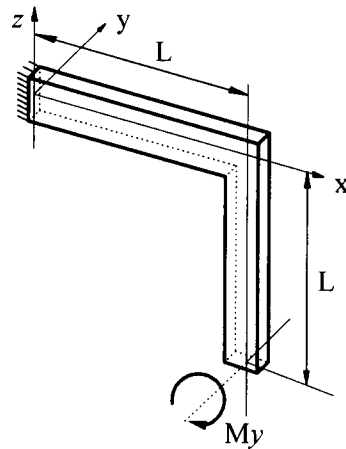
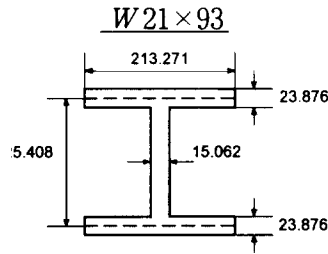


그림 4 Lateral buckling of right-angle frame under end moment

표 4 Lateral buckling load of right-angle frame under end moment (N-cm)

This study	Argyris's result ^{12,13)}
±0.986978	±0.986979

그림 5는 y 방향으로 $P_y/1000$ 와 semitangential moment M 를 받는 직각 캔틸레버의 후좌굴 해석결과(모멘트하중 M_y 와 y 방향의 횡변위의 관계 곡선)를 제시한 것이다. 선형좌굴하중 근처에서 과도한 횡변위가 발생하는 후좌굴거동을 관찰할 수 있다.



$L = 6096mm$	$A = 17612.868mm^2$
$I_y = 8.616 \times 10^8 mm^4$	$E = 199948MPa$
$I_z = 3.867 \times 10^7 mm^4$	$G = 76904.2MPa$
$I_\phi = 2.669 \times 10^{12} mm^4$	$J = 2.510 \times 10^6 mm^4$

(a) I-type cross section

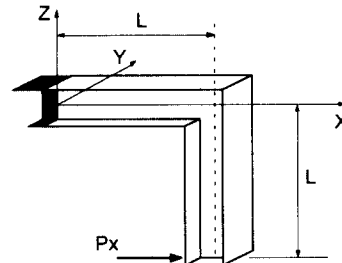
3.2 수평하중에 의한 I형 직각 캔틸레버구조의 횡좌굴

그림 6은 횡방향 집중하중에 의해서 횡좌굴을 일으키는 I형단면을 갖는 직각 캔틸레버구조를 나타낸 것이다. 20개의 뼈대요소로 모델링하였으며, 해석에 사용된 재료의 성질 및 단면제원은 아래와 같다.

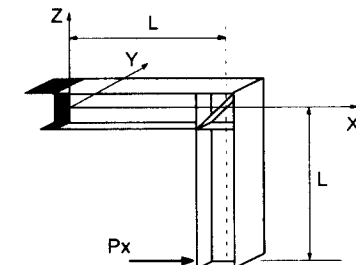
$L = 403.32cm$	$A = 14.4cm^2$
$I_y = 273cm^4$	$I_z = 93cm^4$
$I_\phi = 2,070cm^4$	$E = 29,000N/cm^2$
$G = 11,200N/cm^2$	$J = 1.414cm^4$

구조물의 횡좌굴에 대한 임계하중값은 횡방향 하중의 방향에 따라서 수평부재가 압축력 또는 인장력을 받는 경우에 대하여 본 연구에 의한 해석결과와 문헌의 결과¹⁹⁾를 표 5에 함께 나타내었다.

방법 1은 그림 6(b)의 A형태와 같은 직각 뼈대구조에 대하여 수평부재와 수직부재를 연결하



Type A



Type B

(b) Two connection types of cantilever frame with I-type cross section

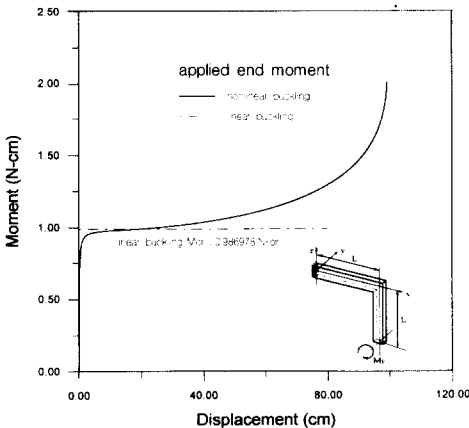


그림 5 Right-angle frame under end moment. Load-displacement diagram

그림 6 Cantilever right-angle frames with I-Type section under end load

는 절점부(joint connection)에서의 바이모멘트를 스칼라로 취급하여 바이모멘트에 대응하는 수

표 5 Critical load of I-type right-angle frames under end load(kN)

Method 1		Method 2		Method 3	
-52.367	59.042	-59.660	65.414 (66.234 ⁽⁹⁾)	-69.129	80.604 (81.366 ⁽⁹⁾)

평 및 수직부재의 강성을 단순히 더하여 선형 횡좌굴해석에 의해 얻은 임계하중값이며, 이를 수정한 것이 방법 2로써 수평부재와 수직부재를 연결하는 절점부에서의 뒹(warping) 자유도에 대응하는 양단 바이모멘트를 각각의 부재축방향으로의 강성으로 구분하여 한쪽 부재의 뒹강성만을 고려하여 얻은 임계하중값이다. 방법 3은 구속된 뒹을 고려함에 있어서 그림 6(b)의 B형태와 같이 수평부재와 수직부재를 연결하는 절점에 보강재를 대어 뒹에 대한 자유도를 구속시켜 좌굴하중을 산정하였다.

그림 7은 각각의 방법에 대해서 y방향으로 $P_x/1000$ 와 수평하중 P_x 를 받는 I형 직각 캔틸레버의 후좌굴 해석결과(수평하중 P_x 와 y방향의 횡변위의 관계곡선)를 제시한 것이다. 3.1절에서와 같이 수평하중의 방향변화에 따라 이에 대응하는 선형좌굴하중 근처에서 과도한 횡변위가 발생하는 후좌굴거동을 관찰할 수 있다.

3.3 곡선 캔틸레버의 횡좌굴

그림 8(a)와 그림 8(b)는 각각 캔틸레버 끝단의 수평하중과 수직하중에 의해 횡좌굴을 일으키는 곡선 캔틸레버구조를 나타낸 것이다. 50개의 직선유한요소로 분할하여 해석하였으며, 해석에 사용된 재료의 성질 및 단면재원은 아래와 같다.

그림 9는 횡방향으로 $P/1000$ 와 수평하중 P_x 를 받는 곡선 캔틸레버구조의 후좌굴거동을 추적한 해석결과(수평하중 P_x 와 횡변위 U_x 및 수직변위 U_y 의 관계곡선)와 선형 횡좌굴해석에 의해 얻은 임계하중값을 함께 나타낸 것이다. 곡선 캔틸레버부재가 압축력을 받으므로써 임계하중값 근처에서 좌굴이 발생하여 과도한 수평변위를 일으키며, 이 후에 하중이 급격히 증가하는 후좌굴 거동을 관찰할 수 있다.

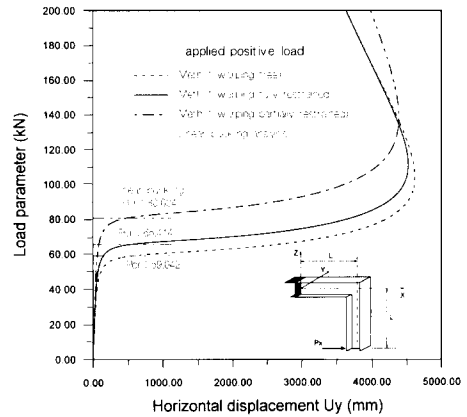


그림 7 (a) right-angle frames with I-Type section under positive load Load-displacement diagram.

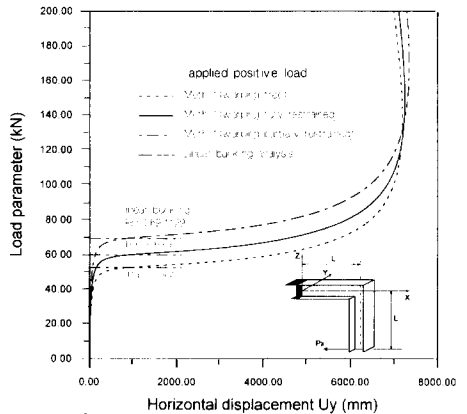


그림 7 (b) right-angle frame with I-Type section under negative load Load-displacement diagram

그림 10은 횡방향으로 $P/1000$ 와 수직하중 P_y 를 받는 곡선 캔틸레버구조의 후좌굴거동을 추적한 해석결과(수직하중 P_y 와 횡변위 U_x 및 수직변위 U_y 의 관계곡선)와 선형좌굴하중값을 함께 나타낸 것이다. 앞의 예와는 달리 곡선 캔틸레버구조에 수직하중을 가하므로, 변위가 발생하면서 부재가 압축력과 함께 인장력을 받기 때문에 선형좌굴하중값 보다 약간 큰 값에서 좌굴이 발생하여 과도한 횡변위가 발생하는 후좌굴거동을 나타낸다.

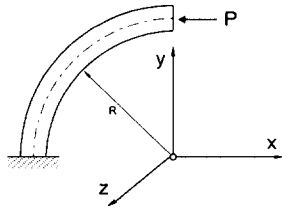


그림 8 (a) Lateral buckling of curved cantilever under horizontal end load

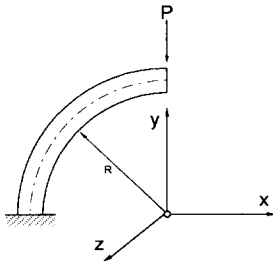


그림 8 (b) Lateral buckling of curved cantilever under vertical end load

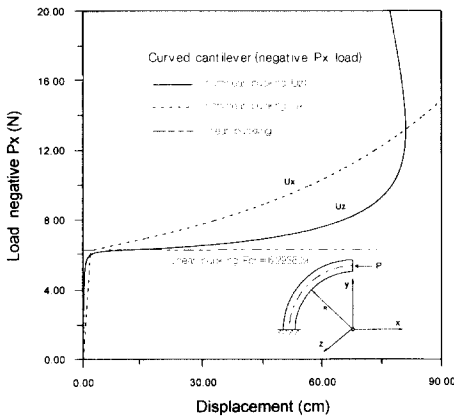


그림 9 Lateral buckling of curved cantilever under horizontal end load. Load-displacement diagram

5. 결 론

박벽 공간뼈대구조의 안정성 및 기하학적 비선형 해석을 수행하기 위하여 유한한 회전각의 2차항을 포함하는 개선된 변위장을 도입하여 구속된 뒤틀효과를 고려하는 박벽 공간뼈대구조에 대한 비

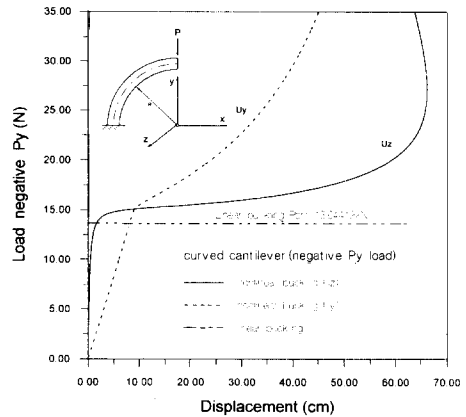


그림 10 Lateral buckling of curved cantilever under vertical end load. Load-displacement diagram

선형 유한요소법을 제시하였다. 그리고 제시된 이론 및 방법의 타당성을 입증하기 위하여, 박벽 공간뼈대구조의 횡방향 후좌굴거동을 해석하고 문헌의 해석결과와 비교, 검토하여 결과들이 서로 잘 일치함을 확인하였다. 본 연구를 통하여 얻은 결론은 다음과 같다.

1) 본 연구의 선형좌굴하중과 Argyris의 결과가 거의 일치하였는데, 이는 유한한 회전각의 2차항을 고려하여 산정한 본 연구의 기하학적 강도행렬과 semitangential moment와 semitangential rotation에 근거하여 natural mode formulation으로부터 유도한 Argyris의 강도행렬이 거의 동일한 값을 갖기 때문이라고 판단된다.

2) 본 연구의 기하학적 비선형해석법을 이용하여 부재가 유한한 각도로 만나는 박벽 공간뼈대구조의 횡방향 후좌굴해석이 가능하다.

3) 변위 및 하중중분법과 결합시킨 본 연구의 기하학적 비선형해석법을 적용하는 경우에 여러 개의 극한점(limit point)을 갖는 박벽 공간뼈대구조의 복잡한 기하학적 비선형 평형경로(equilibrium path)를 추적할 수 있다.

4) 본 연구에서 제시한 기하학적 비선형 유한요소법을 이용하여 임의의 곡선형상을 갖는 박벽 공간뼈대구조의 후좌굴해석이 가능하다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단의 1995년도 학술지원 (과제번호 951-1204-022-2) 하에 수행되었으며 저자는 이에 깊은 감사를 표합니다.

참고 문헌

1. R. K., Wen, and J., Rahimzadeh, "Nonlinear elastic frame analysis by finite element", J. Struct. Eng., ASCE, Vol. 109, 1983, pp1952-1971.
2. K. J., Bathe, and S., Bolourchi, "Large displacement analysis three-dimensional beam structures", Internat. J. Numer. Meths. Eng., Vol. 14, 1979, pp961-986.
3. S. A., Saafan, "Non-linear behavior of structural plane frames", J. Struct. Engrg., ASCE, Vol. 89 1963, pp557-579.
4. C., Oran, "Tangent stiffness in plane frames", J. Struct. Eng., ASCE, Vol. 99 1973, pp973-985.
5. J. L., Meek, and H. S., Tan, "Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. Vol. 47, 1984, pp261-282.
6. M., Papadrakakis, "Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration methods", Computers & Structures, Vol. 14, 1981, pp393-402.
7. 김문영, 장승필, "전단변형을 고려한 평면뼈대 구조물의 기하적인 비선형 해석", 대한토목학회 논문집, 제10권 제1호, 1990, pp27-36.
8. 김문영, 장승필, "보존력 및 비보존력을 받는 구조물의 기하적 비선형 유한요소해석을 위한 하중 및 변위증분 알고리즘의 개발", 대한토목학회 논문집, 제10권 제2호, 1990, pp11-22.
9. 김문영, 안성원, "공간뼈대구조의 기하학적 비선형 유한요소해석", 한국전산구조공학회 논문집, 제10권 제1호, 1997, pp201-211.
10. R.S. Barsoum and R. H. Gallagher, "Fi-

- nite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems", Internat. J. Number. Meths. Eng., Vol. 2, 1970, pp335-352.
11. W. F. Chen and T. Atsuta, "Theory of beam columns", Vol. 2, McGraw-Hill, Inc., NewYork, 1977, pp539-608.
12. J. H. Argyris, P. C. Dunne and D. W. Scharpf, "On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 14, 1979, pp401-451.
13. J. H. Argyris, P. C. Dunne and D. W. Scharpf, "On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 14, 1979, pp99-135.
14. H. Ziegler, "Principles of structural stability", 2nd ed., Birkhaser, Basel/Stuttgart, 1977, pp115-128.
15. K. J., Bathe, "Finite element procedures", Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1996, pp522-528.
16. M. Y. Kim, S. P. Chang and S. B. Kim, "Spatial stability analysis of thin-walled space frames", internat. J. Numer. Meths. Eng., Vol. 39, 1996, pp499-525.
17. S. P. Timoshenko and J. M. Gear, "Theory of elastic stability", 2nd. ed., McGraw-Hill, 1961, pp212-277.
18. J. H. Argyris, O. Hilpert, G. A. Malejannakis and D. W. Scharpf, "On the geometrical stiffness of a beam in space-a consistent v. w. approach", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. Vol. 20, 1979, pp105-131.
19. A. F. Saleeb, T. Y. P. Chang and A. S. Gendy, "Effective modeling of spatial buckling of beam assemblages accounting for warping constraints and rotation-dependency of moments, Int. j numer. methods eng., 36, 1189-1221 (1993).

(접수일자 : 1997. 6. 18)