

# 증분소성이론에 의한 $p$ -Version 탄소성 유한요소해석

## $p$ -Version Elasto-Plastic Finite Element Analysis by Incremental Theory of Plasticity

정 우 성\*      홍 증 현\*\*      우 광 성\*\*\*  
Jung, Woo-Sung    Hong, Chong-Hyun    Woo, Kwang-Sung

### 요 지

$p$ -version 유한요소법에 의한 고정밀해석은 응력특이기가 발생하는 선형탄성 문제에 매우 적합한 방법으로 인식되고 있다. 해석 결과의 정확도, 모델링의 단순성, 입력자료에 대한 통용성 및 사용자와 CPU 시간의 절감 등 여러 장점이 선형탄성 문제에 적용되어 우수성이 입증 되었지만, 탄소성 해석분야는 아직 적용이 이루어지지 않고 있다. 그러므로 본 논문에서는 일-경화재료에 대한 구성방정식을 이용하여 정식화된 증분소성이론과 소성유동법칙에 근거한 재료비선형  $p$ -version 유한요소모델이 제안되었다. 비선형방정식을 풀기위해 Newton-Raphson법과 초기강성도법 등의 반복법이 모색되었다. 제안된 모델을 이용하여 개구부를 가진 사각형 평판과 내압을 받는 두꺼운 실린더, 그리고 등분포하중을 받는 원판해석등의 수치실험이 수행되었다. 한편,  $p$ -version 모델에 의한 해석 결과는 문헌의 이론값과 상용유한요소프로그램인 ADINA의 해석결과와 비교 검증되었다.

### Abstract

The high precision analysis by the  $p$ -version of the finite element method are fairly well established as highly efficient method for linear elastic problems, especially in the presence of stress singularity. It has been noted that the merits of the  $p$ -version are accuracy, modeling simplicity, robustness, and savings in user's and CPU time. However, little has been done to exploit their benefits in elasto-plastic analysis. In this paper, the  $p$ -version finite element model is proposed for the materially nonlinear analysis that is based on the incremental theory of plasticity using the constitutive equation for work-hardening materials, and the associated flow rule. To obtain the solution of nonlinear equation, the Newton-Raphson method and initial stiffness method, etc are used. Several numerical examples are tested with the help of the square plates with cutout, the thick-walled cylinder under internal pressure, and the circular plate with uniformly distributed load. Those results are compared with the theoretical solutions and the numerical solutions of ADINA

**Keywords** : incremental theory of plasticity, work-hardening materials, material nonlinearity,  $p$ -version of F. E. M., associated flow rule, von-Mises yield criteria,  $h$ -adaptive mesh refinement, Newton-Rapson method

\* 한국수자원공사 수자원 연구소 구조재료팀, 연구원  
\*\* 영남대학교 토목공학과, 박사과정  
\*\* 성희원·영남대학교 토목공학과, 교수

• 이 논문에 대한 토론을 1998년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1998년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

## 1. 서 론

구조물의 정적 및 동적하중이 작용시 파괴기준은 다음 세가지로 요약해 볼 수 있다. 첫째는, 구조물의 항복지배 파괴(yielding dominant failure)이다. 예를들면, 강구조물에서 응력수준이 항복강도를 넘게 되면 재료는 항복되어 본래의 재료강도를 발휘하지 못하고 최종단계에서 소성흐름(plastic flow)에 저항하지 못하면 구조물의 파괴를 초래한다. 둘째는, 균열 및 피로에 의한 균열지배 파괴(fracture dominant failure)이다. 강재의 경우 공장에서 제품화되어 현장에서 실제 시공될 때는 강재내부의 기포, 표면흡집, 용접부의 공극 및 이탈 등을 포함하는 초기흡집(initial flaws)을 갖게 된다. 구조역학의 특성상 이러한 취약부에는 심한 응력집중이 발생되어 균열을 발생하며, 균열성장곡선에 따라 시간이 경과함에 따라 급속한 불안정 균열파괴를 유발한다. 셋째는, 안전성지배 파괴(stability dominant failure)이다. 즉, 기둥과 같은 압축재에서 발생하는 좌굴(buckling)에 의한 파괴를 말할 수 있으며 구조적 불안전성(instability)에 기인한다고 할 수 있다. 둘째와 셋째의 경우는 재료가 항복점에 도달하기 전인 탄성영역에서도 발생하는 것이 첫째와 다른 점이라 할 수 있겠다.

일반적으로 구조물의 붕괴는 위의 3가지 복합적 요인에 의하여 발생될 수 있으므로 각각의 경우에 대한 구조적 검토가 수반되어야 할 것이다. 본 연구에서는 앞에서 열거한 파괴기준중 첫째의 경우, 즉 구조물의 항복후 거동인 탄소성거동에 대해 살펴보고자 한다. 그러나, 탄소성해석은 재료적 비선형(material nonlinearity)을 고려하게 되므로 비선형방정식을 푸는 어려움과 소성이론을 적용하는 관계로 비교적 어려운 정식화과정이 요구된다. 아울러, 하중증분에 따른 반복연산을 수행하게 되므로 많은 컴퓨터 CPU시간과 사용자의 시간이 필요하게 되는 이유로 실제 설계에서는 간단한 경험식에 의존하게 된다.

그러나, 실제 구조물은 복잡한 기하학적 형상과 사용하중 및 경계조건을 갖게 되므로

시방서의 단순화된 경험식으로는 구조해석 및 설계의 한계성을 갖게 된다. 따라서, 통상 유한요소법 등의 수치해석법이 모색되고 있다. 물론, 취성재료의 경우는 응력특이점 부근의 소성영역이 상대적으로 작은 소항복영역(small scale yielding) 이론을 사용하므로 선형탄성이론으로 해석하여도 해의 오차가 크지 않다. 그러나, 연성재료의 경우는 응력특이점을 중심으로 비교적 크게 소성영역이 형성되므로 대항복영역(large scale yielding) 이론을 사용하여야 한다. 즉, 소성영역이 큰 구조물의 경우는 힘-하중의 관계가 비선형이 되므로 종래의 선형탄성이론에 의한 변위값과 탄소성해석에 의한 변위는 판이할 뿐만 아니라 변형을 계산도 선형탄성일 경우는 단순히 Hooke의 법칙을 사용하여 비례적으로 구할 수 있었으나, 탄소성일 경우는 증분소성이론(Incremental theory of plasticity)에 의해 하중이력(loading history)을 고려한 후 소성변형을 증분량을 산정하며 이때 Prandtl-Reuss 방정식을 사용하는 등 선형탄성의 경우에 비해 많은 차이점을 보여준다.

한편, 최근에 제안되고 있는 p-version 유한요소법은 종래의 표준 해석법인 h-version 유한요소법과 비교하여 이미 선형탄성문제에서 해의 정확도, 모델링의 단순성, 입력자료에 대한 통용성(robustness), 빠른 수렴성과 아울러, 오차추정(error prediction)을 통해 요소분할의 최적체눈 설계를 할 수 있는 모니터기능(monitors)과 제어기능(controlling)을 갖는 적응적 체눈설계(adaptive mesh refinement)에 적합한 방법으로 각광을 받고 있다<sup>1)</sup>. 특히, 응력특이가 발생하는 균열문제에서는 균등요소분할을 통해 체눈설계된 종래의 h-version 유한요소결과에 비해 수렴속도가 2배가량 빠르다는 것이 Babuska<sup>2)</sup>에 의해 수학적으로 증명되었으며, 실제 유한요소해석을 통해서는 Szabo<sup>3)</sup>, Zienkiewicz<sup>4)</sup>, Basu<sup>5)</sup> 등에 의해 밝혀져 왔다. 그러한 까닭에 보, 평면응력/변형, 축대칭<sup>6)</sup>, 평판<sup>7)</sup>, 셸구조<sup>8)</sup> 등의 응력해석은 물론이고 좌굴문제<sup>9)</sup>, 파괴역학<sup>10)</sup>, 민감도해석을 통한 최적화문제<sup>11)</sup>, 그리고 동적해석<sup>12)</sup> 등

에 이미 적용하여 h-version에 비해 효율성이 높음을 입증하고 있다. 그러므로, 차세대 유한요소법의 방향은 hp-적용적 체분설계의 기능을 프로그래밍에 내장한 유한요소 소프트웨어가 최종목표가 될 수 있을 것이다.

그러나, 지난 20년간 탄소성 구조해석에 관한 h-version 유한요소 논문들이 상당수 발표되었으나 p-version 유한요소법에 의한 연구논문은 거의 시작 단계라 할 수 있다. 최근까지의 문헌 조사에 의하면 기하학적 비선형 문제에 대한 p-version 유한요소해석은 Surana<sup>[3]</sup>의 적층 평판과 쉘의 기하학적 비선형 문제 해석과 Schiermeier<sup>[4]</sup>의 원형 아치(circular arch)와 압축력을 받는 실린더형 패널(cylindrical panel)해석에 대한 논문을 꼽을 수 있다. 이에 비하여 재료적 비선형문제에 대한 p-version 유한요소해석은 Holzer<sup>[5]</sup>에 의한 내압을 받는 실린더 문제의 해석 뿐이다. 그러므로, 본 연구의 목적은 계층적 성질을 갖는 적분형 르장드르 다항식(integrals of Legendre polynomials)에 기초를 둔 2차원 탄소성 평면응력/변형요소와 탄소성 축대칭요소를 개발하여 응력특이가 발생하는 균열문제, 손상단면 및 개구부를 갖는 문제에 적용하여 선형탄성해석에서 보인 효율성을 다시 입증시키고자 한다. 그리고, 제안된 탄소성 p-version 유한요소 해의 정확도와 우월성을 보이기 위해 h-version 소프트웨어인 ADINA의 수치해석 결과와 비교하고자 한다. 탄소성이론은 증분소성이론을 근거로 소성유동법칙(associated flow rule)과 von Mises 항복기준을 사용한  $J_2$ -이론에 의한 유한요소 정식화가 수행되며, 항복후의 구성방정식은 일-경화 재료(work-hardening materials)에 기초를 두고 정식화 되었으나 해석대상을 SWS400 강재를 사용하기 때문에 실제로는 강재의 응력-변형률 그래프의 특성상 변형경화에 대한 영향이 무시되므로 탄성-완전소성 재료(elastic-perfectly plastic materials)로 단순화 될 수 있다. 비선형방정식을 풀기 위해 Newton-Raphson 계열의 알고리즘과 초기강성도법 등의 반복법이 적용되었다.

## 2. 연구내용, 범위 및 방법

### 2.1 고전적 소성이론

소성이론은 먼저 재료의 항복특성에 따라 분류될 수 있다 즉, 탄성-완전소성 재료와 일-경화 또는 변형경화재료로 나누어 볼 수 있다. 완전소성 재료의 경우는 일-경화 재료에 비해 일정 소성흐름(constant plastic flow) 상태로 가정되므로 알고리즘이 간단한 형태를 취한다. 한편, 일반적으로 소성이론은 소성변형률을 어떻게 정의하느냐에 따라 다음 두 가지로 분류될 수 있다.

- (가) 변형소성이론(deformation theory of plasticity)
- (나) 증분소성이론(incremental theory of plasticity)

변형소성이론에 의하면 하중경로에 무관하게 전체 응력-변형률관계(total stress-strain relation)로 소성변형률을 정의하는데 아래 식과 같다.

$$\epsilon_{ii}^p = \epsilon_{ii} - \epsilon_{ii}^e = f(\sigma_{ii}) \quad (1)$$

여기서,  $\epsilon_{ii}^p$ 는 소성변형률,  $\epsilon_{ii}$ 는 전체변형률,  $\epsilon_{ii}^e$ 는 탄성변형률을 나타내며  $f(\sigma_{ii})$ 는 하중함수(load function)이다. 일반적으로 일-경화재료의 항복면은 다음과 같이 정의 된다.

$$f(\sigma_{ii}, \chi) = 0 \quad (2)$$

여기서,  $\chi$ 는 등방성 경화매개변수(isotropic hardening parameter)이다. 전체변형률  $d\epsilon_{ii}$ 의 미소증분량이 발생되면 일-경화재료의 경우 새로운 항복면이 형성되며, 이를 수학적으로 표현하면 다음과 같다.

$$f(\sigma_{ii} + d\sigma_{ii}, \chi + d\chi) = f(\sigma_{ii}, \chi) + df = 0 \quad (3)$$

또는,

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ii}} d\sigma_{ii} + \frac{\partial f}{\partial \chi} d\chi = 0 \quad (4)$$

식 (4)는 일-경화재료에 대한 일관성조건 (consistency condition)이라 한다. 완전소성재료에서는 경화매개변수  $\chi$ 의 함수가 아니므로 식 (4)의 두 번째 항은 소거된다.

따라서, 본 연구에서 고려하고자 하는 증분소성이론은 하중경로를 고려하여 소성변형률을 정의하는데 소성유동법칙 (associated flow rule) 즉, 소성이 발생되는 소성포텐셜 함수 (plastic potential function)  $g(\sigma_{ij})$ 와 하중함수  $f(\sigma_{ij})$ 가 동일하다는 가정과 von Mises 항복규준을 따른다. 즉, von Mises 하중함수는 다음과 같다.

$$f(\sigma_{ij}, \chi) = J_2 - k(\chi)^2 = 0 \tag{5}$$

여기서,  $J_2$ 는 축차응력텐서의 제 2불변량(The second invariant of stress deviator tensor),  $k(\chi)$ 는 일축 인장시험으로부터 얻어지는 재료상수로, 보통 일축응력시의 항복강도가 사용된다. 따라서, 소성유동법칙에 의한 소성변형률은 다음과 같이 정의될 수 있다. 따라서,  $f=J_2$ 인 경우 소성유동법칙에 의한 직교조건 (normality condition)으로 부터 다음 관계를 쉽게 증명할 수 있다.

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij} \tag{6}$$

한편, 소성변형률 증분량은 소성포텐셜  $g(\sigma_{ij})$ 의 응력경사(stress gradient)에 비례하므로 다음과 같다.

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \tag{7}$$

소성유동법칙에 의해  $g=f$ 이므로 식 (6)을 식 (7)에 대입하면 아래 식을 얻는다.

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda s_{ij} \tag{8}$$

여기서,  $d\lambda$ 는 비례상수,  $s_{ij}$ 는 축차응력텐서를 나타낸다. 소성변형률 증분량을 축차응력텐서로

표현되는 식을 일컬어 Prandtl-Reuss 방정식이라 한다. 또한, 전체변형률 증분량  $d\epsilon_{ij}$ 는 아래와 같이 나타낼 수 있다<sup>16,17)</sup>.

$$d\epsilon_{ij} = D_{ijkl} d\sigma_{kl} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{9}$$

여기서,  $D_{ijkl}$ 는 컴플라이언스 텐서 (compliance tensor)이다. 그러므로, 식 (9)의 첫 번째 항은 탄성변형률 증분량이고, 두 번째 항은 소성변형률 증분량을 나타낸다.

하중함수  $f$ 를 어떻게 가정하느냐에 따라 항복규준이 달라지게 된다. 일반적으로 하중함수  $f(\sigma_{ij})$ 는 항복함수 (yield function) 또는 변형경화함수 (strain hardening function)  $k(\chi)$ 와 동치로 둔다. 즉,

$$f(\sigma_{ij}) = k(\chi) \tag{10}$$

본 연구에서는 항복함수를 Tresca (1864년)에 의해 식 (11)과 같이 최대전단응력으로, von Mises (1913년)는 식 (12)와 같이 축차응력텐서의 제 2불변량  $J_2$ 로 나타내며  $\sigma_c$ 는 일축응력시 항복응력을 말한다. 즉,

$$k(x) = \frac{\sigma_c}{2} = \frac{1}{2} \max[|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|] \tag{11}$$

$$k(x) = \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} = \sqrt{J_2} \tag{12}$$

### 2.2 비선형 방정식 풀이를 위한 알고리즘

비선형 연립방정식을 푸는 알고리즘은 이미 여러 가지가 제안되어 있다. 일반적으로 탄소성재료의 비선형 매트릭스방정식은 다음과 같다<sup>18)</sup>.

$$\Psi^{(m+1)}\{U\} = {}^{m+1}\{F^{(m+1)}\{U\}\} - {}^{m+1}\{R\} \tag{13}$$

여기서,  ${}^{m+1}\{U\}$ 는 변위,  ${}^{m+1}\{F\}$ 는 내력, 그리고  ${}^{m+1}\{R\}$ 는 외력을 나타내며 내력과 외력이 같아질 때까지 반복수행된다. 즉, 증분해석에서 구조물에 작

용하는 전체 하중  $\{R\}$ 은  $(m+1)$  반복단계에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^{m+1}\{R\} = {}^m\{R\} + \{\Delta R\} \quad (14)$$

여기서, 뒷첨자  $m$ 은  $m$ 중분단계를 나타낸다. 한편, 변위와 응력도 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$${}^{m+1}\{U\} = {}^m\{U\} + \{\Delta U\} \quad (15)$$

$${}^{m+1}\{\sigma\} = {}^m\{\sigma\} + \{\Delta \sigma\} \quad (16)$$

그러므로, 응력에 의해 계산되는 내력  ${}^{m+1}\{F\}$ 는 다음과 같다.

$${}^{m+1}\{F\} = \int_V [B]^T {}^{m+1}\{\sigma\} dV \quad (17)$$

식 (14)와 식 (17)가 충분한 허용오차내로 같아지면 반복수행은 완료된다. 본 연구에서는 다음과 같은 비선형 방정식을 풀기 위한 알고리즘을 사용하고자 한다.

- (가) Newton-Raphson Method
- (나) Initial Stiffness Method
- (다) Tangential Stiffness Method
- (라) Direct Iteration Method

여기서 제안된 알고리즘은 수렴속도와 해의 안정성등에서 서로 장단점을 갖고 있으므로 가급적 모두 고려하는 것이 바람직할 것이다.

### 2.3 p-Version 유한요소법

해석하고자 하는 연속체의 기하학적 형상을 표현하는데 필요한 최소갯수의 요소만을 사용하여 체분설계를 한 후 더 이상 요소분할을 하는 대신에 초기체분을 고정시키고 보간함수의 차수  $p$ 를 점차 증가시켜 나가면서 정해에 수렴시키는 방식을  $p$ -확장( $p$ -extension)이라 하면 이에 따른 컴퓨터수행을  $p$ -version 유한요소법이라 한다. 통상, 보간함수로는 Legendre Family를 사용하는데 Zi-

enkiewicz<sup>4)</sup>에 의하면 Legendre Family는 계층적 성질(hierarchical nature)을 갖고, 직교성에 의한 반올림 오차의 감소, 정적응축(static condensation) 등의 장점을 수치결과로 입증시킨 바 있다.

본 연구에서는 적분형 르장드르다항식(integrals of Legendre polynomials)을 형상함수로 채택하여 사용하고자 한다. 한편, 원공을 갖는 평판이나 두꺼운 실린더와 같은 문제는 곡선경계를 갖게 되는데  $p$ -version 요소는 대항요소를 사용하기 때문에 정확한 기하학적인 사상(mapping)이 필요하게 된다. 따라서, 이를 해결하기 위한 사상기법이 요구된다. 본 연구에서는 초유한사상기법(transfinite mapping technique)<sup>19,20)</sup>을 사용하였다. 여러  $p$ -version 연구논문에서 입증된  $p$ -version 유한요소법의 장점을 요약하면 다음과 같다.

- (가) 응력특이문제(stress singularity problem)에 적합하다.
- (나) 자유도 증가에 따른 빠른 수렴성(convergence rate)이다.
- (다) 모델링의 단순성(modeling simplicity)이다.
- (라) 입력자료에 따른 강한 수치해의 통용성(robustness)이다.
- (마) 계층적 성질을 이용한 데이터베이스 사용의 효율성이다.
- (바) 계산상의 효율성으로 인한 사용자 및 CPU 시간의 대폭 절감을 가져온다.

이와 같은 장점은 이미 선형탄성문제에서 많은 논문<sup>1-5)</sup>을 통해 밝혀진 바 있다. 그러므로, 응력 특이를 갖는 2차원 연속체의 탄소성해석을 위한  $p$ -version 유한요소법의 확장은 많은 연구자들의 관심을 끌기에 충분한 과제인 것이다.

### 2.4 매트릭스 정식화

식 (10)에서 정의된 항복함수는 다음과 같은 매트릭스 형태로 표현할 수 있다. 즉,

$$F(\sigma, \chi) = f(\sigma) - k(\chi) = 0 \quad (18)$$

여기서,  $\sigma_n$ 는 응력벡터이고  $\chi$ 는 항복면의 팽창을 지배하는 경화매개변수이며, von Mises 항복기준으로는  $k(\chi) = \sigma_0/\sqrt{3}$ 으로 정의되며  $\sigma_0$ 는 일축응력시의 항복강도이다. 한편, 식 (18)을 미분형태로 나타내면 다음과 같다.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial F}{\partial \chi} d\chi = 0 \quad (19-a)$$

$$a^T d\sigma - Ad\lambda = 0 \quad (19-b)$$

여기서,

$$a^T = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \right\} \quad (20)$$

그리고,

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \frac{df}{d\chi} d\chi \quad (21)$$

여기서,  $\{a\}$ 를 소성류 벡터라 한다. 한편, 식 (9)의 탄소성 변형률-응력관계는 매트릭스 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$d\varepsilon = [D]^{-1} d\sigma + d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (22)$$

식 (19)과 식 (22)로 부터  $d\lambda$ 는 다음과 같이 유도된다.

$$d\lambda = \frac{1}{[A + a^T D a]} a^T D d\varepsilon \quad (23)$$

식 (23)을 식 (22)에 대입하면 탄소성상태의 응력-변형률관계를 얻을 수 있으  $d_D = D a d\lambda$ 이다<sup>18)</sup>.

$$d\sigma = D_{ep} d\varepsilon \quad (24)$$

여기서,

$$D_{ep} = D - \frac{d_D d_D^T}{A + d_D^T a} \quad (25)$$

일축응력상태의 응력-변형률 그래프로부터  $A$ 와  $d\lambda$ 는 다음과 같이 정의될 수 있다. 즉,

$$d\lambda = d\bar{\varepsilon}_p \quad (26-a)$$

$$A = H \quad (26-b)$$

여기서,  $d\bar{\varepsilon}_p$ 는 등가소성변형률(equivalent plastic strain)을 의미하며,  $H$ 는 일축응력시 응력-변형률 그래프로부터 접선탄성계수  $E_T$ 를 사용한 변형경화 상수로 다음과 같이 정의 된다. 즉,

$$H = \frac{E_T}{1 - E_T/E} \quad (27)$$

그러므로,  $H=0$ 이면 완전소성재료를 나타내므로  $A=0$ 이 되어, 일관성조건인 식 (19)는 다음과 같이 단순화 된다.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma = 0 \quad (28)$$

한편, 평면변형과 축대칭인 경우

$$d_D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1+\nu} a_1 + M_1 \\ \frac{E}{1+\nu} a_2 + M_2 \\ G a_3 \\ \frac{E}{1+\nu} a_4 + M_1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

여기서,  $G = E/2(1+\nu)$ 이며,  $a_1, a_2, \dots, a_4$ 는 식 (20)에 표시된 항을 나타낸다. 한편, 평면응력의 경우는 아래와 같이 유도할 수 있다.

$$d_D = \begin{bmatrix} \frac{E}{1+\nu} a_1 + M_2 \\ \frac{E}{1+\nu} a_2 + M_2 \\ G a_3 \\ \frac{E}{1+\nu} a_4 + M_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

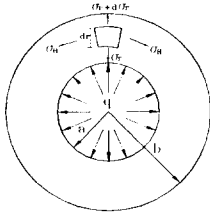
$$M_1 = \frac{E\nu(a_1 + a_2 + a_4)}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$M_2 = \frac{E\nu(a_1 + a_2)}{1-\nu^2} \quad (31)$$

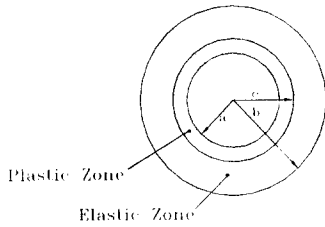
### 3. 수치해석예제

#### 3.1 내압을 받는 두꺼운 원관(A thick-walled cylinder under internal pressures)

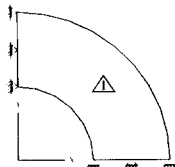
해석모델이 Fig.1에 나타나 있으며, 항복조건으로는 Tresca의 항복기준을 사용하였고 완전소성재료(H=0)로 가정하였다. 이론값은 참고문헌 [16]에서 제시한 바와 같이 식 (32)와 식 (33)과 같다. 한편, p-version해석값은 수렴성 조사 후 수렴구간에 있는 최소의 차수 6차를 사용하여 이론값과 비교하였다. 이때 사용된 p-version 요소는 1개의 평면변형 요소를 사용하였고 곡선경계를 원활히 모델링하기 위해 초유한사상(transfi-



(a) Transverse section of a thick-walled tube subject to internal pressures



(b) Plastic zone contained within an elastic zone



(c) p-version model(1 element)

Fig. 1 A thick-walled cylinder under internal pressures

nite mapping)을 사용하였으며, 9-point 가우스 분을 수행하였다.

Fig. 2와 Fig. 3에는  $b/a = 2$ 일 때 소성영역(plastic zone)  $c$ 가 진전됨에 따라, 즉  $c/a = 2$ (탄성)에서  $c/a = 1$ (완전소성)로 변함에 따라 정규화시킨 반경길이( $r/a$ )의 변화에 따라 원주방향응력(hoop stress)과 반경방향응력(radial stress)의 분포를 나타내고 있다. Fig. 2와 Fig. 3으로부터 이론값과 p-version해석값이 거의 일치하는 것을 알 수 있고 Fig. 4에 정규화된 하중-변위 곡선에서도 제안된 p-version모델의 정확성을 알 수 있다.

$$\sigma_r = \sigma_c \left[ \text{Log}_e \left( \frac{r}{c} \right) - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{c^2}{b^2} \right) \right] \quad (32)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_c \left[ \text{Log}_e \left( \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{c^2}{b^2} \right) \right] \quad (33)$$

#### 3.2 단순지지된 원판(A Simply supported circular plate)

Fig.5에 등분포하중이 재하된 단순지지된 원판

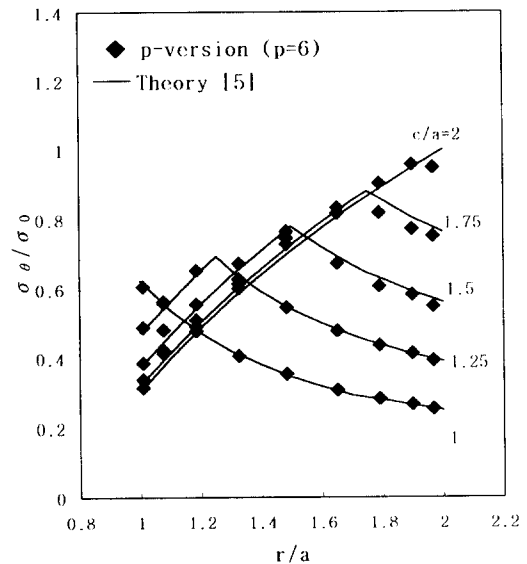


Fig. 2 Successive distributions of the circumferential stress in the elastic-plastic expansion of a tube :  $b/a = 2$

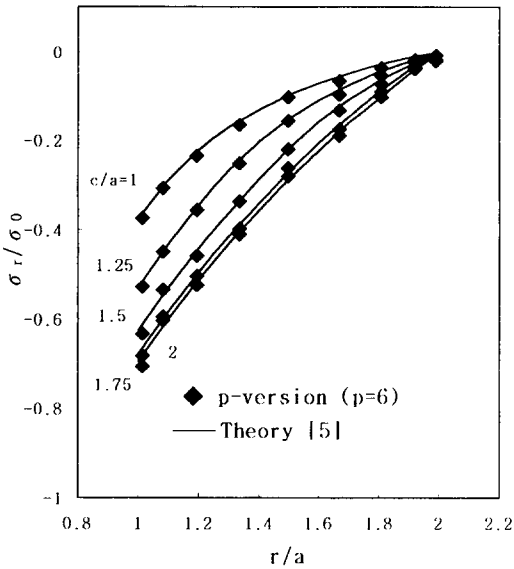


Fig. 3 Successive distributions of the radial stress in the elastic-plastic expansion of a tube :  $b/a=2$

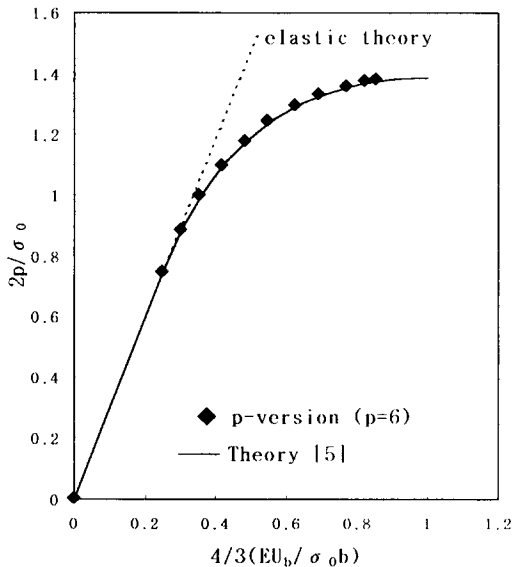


Fig. 4 Elastic-plastic pressure-expansion curve

을 축대칭요소로 모델링하였다. 항복조건으로는 von Mises항복조건을 이용하였고 해석예제는 완

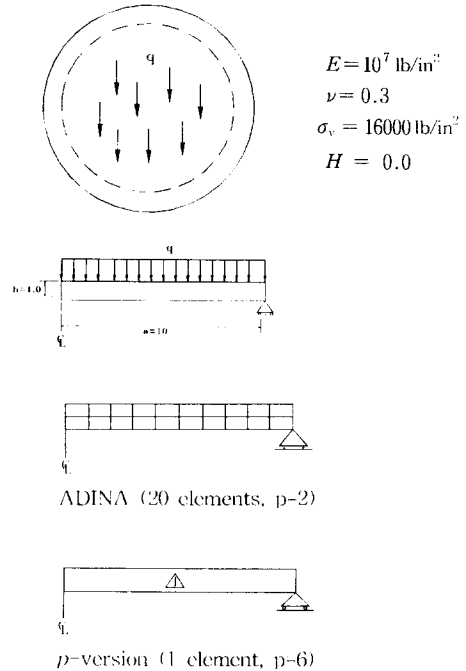


Fig. 5 A simply supported circular plate

전소성재료 ( $H=0$ )로 가정하였다. ADINA의 경우 8절점 등매개변수 요소 10개, 20개, 30개를 사용하여 수렴성 조사를 한 결과 20개 이상의 요소를 사용하였을 때 수렴하였다. 이 때 체눈설계는 균등하게 하였는데 체눈설계를 단층으로만 한 경우(10개 요소)는 하중  $q$ 가 240인 경우 수렴조차 않는다는 것을 Table 1로 부터 알 수 있다. 한편, p-version의 경우 1개의 요소를 사용하여 수렴구간에 있는 차수 ( $p=6$ )를 사용하였다. Fig. 6에 하중-변위 곡선을 ADINA모델과 p-version 모델을 비교하여 도시하였는데 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

### 3.3 개구부를 갖는 정방형 평판(A Square Plate with Cut-out)

사각형 개구가 있고 SWS400 강재로 된 정사각형 평판이 ADINA의 선형보간함수를 갖는 삼각형 요소를 사용하여 134개 요소, 390개 요소와 618개 요소로 체눈설계하였고 p-version모델은



Table 1 Convergence characteristics of center deflection with respect to applied pressures (inch)

Applied pressure $q$ (lb/in <sup>2</sup> )	ADINA model ( $p=2$ )			p-version model 1 element $p=6$ (NDF=52)
	10 elements (NDF=102)	20 elements (NDF=164)	30 elements (NDF=226)	
90	6.771	6.781	6.784	6.776
120	9.027	9.041	9.047	9.034
150	11.284	11.303	11.309	11.343
180	13.776	14.233	14.240	14.316
210	20.132	18.278	18.294	19.122
225	29.150	22.114	22.133	23.016
240	—	30.030	30.071	29.878

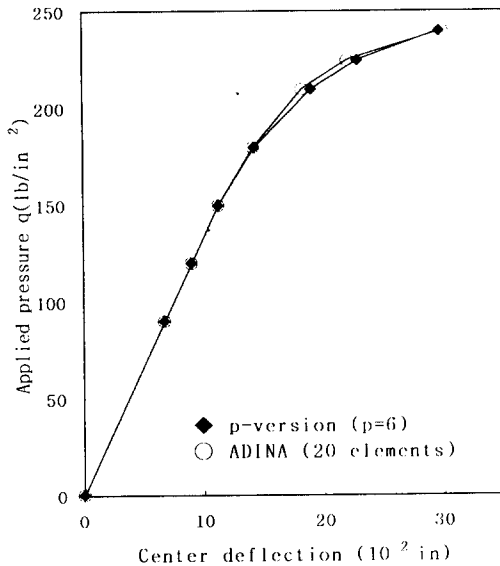


Fig. 6 Center deflection of a simply supported circular plate under uniform loads

2개의 평면응력 요소로 모델링하였다. ADINA의 경우는 응력특이 발생되는 요형 모서리를 중심으로 적응적 체분설계를 하였다. p-version 모델은 Fig. 10과 Fig. 11에서 수렴성 조사한 결과 차수  $p$ 가 5차에서부터 수렴하는 것을 알 수 있고 ADINA의 경우 Table 2에서 618개로 체분설계된 모델이 p-version 모델의 결과와 가장 가

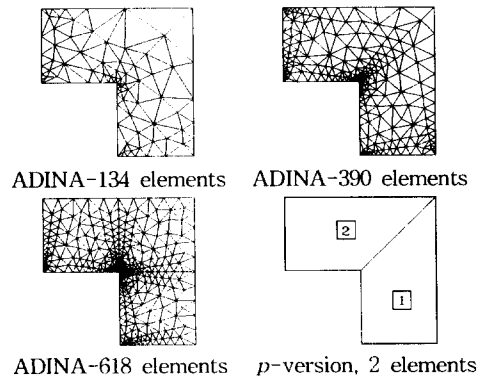
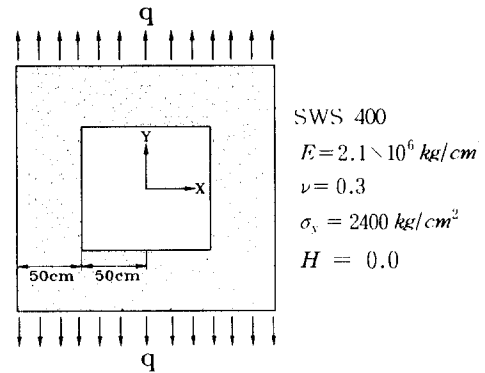


Fig. 7 Finite element models of a square plate with cut-out

깝다는 것을 알 수 있다. 한편, 제안된 p-version 모델은 Fig. 8과 Fig. 9에서 알 수 있듯이 ADINA 모델과 거의 일치하는 결과를 보여주고 있다. 항복조건으로는 von Mises 항복조건을 이용하고 사용된 재료는 완전소성재료 ( $H=0.0$ )로 가정하였다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 응력특이를 갖기 때문에 응력특이점으로 부터 항복에 쉽게 도달하여 소성영역이 비교적 큰 구조물의 탄소성해석시 2차원 평면응력/변형과 축대칭 p-version 탄소성 요소를 개발하여 해의 정확도와 신뢰성을 높일 수 있도록 하였다.

Table 2 Displacements of the outer edge and re-entrant corner  $\times 10^{-2}\text{cm}$

distributed load $q$ ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )	midside of outer edge				reentrant corner			
	ADINA model ( $p=1$ )			p-version	ADINA model ( $p=1$ )			p-version
	134 element NDF=152	390 element NDF=432	618 element NDF=700	134 element $p=5$ NDF=68	134 element NDF=152	390 element NDF=432	618 element NDF=700	2 element $p=5$ NDF=68
100	2.30	2.42	2.45	2.48	1.06	1.10	1.10	1.14
200	4.61	4.85	4.89	4.96	2.12	2.20	2.20	2.28
300	6.91	7.28	7.35	7.44	3.18	3.32	3.32	3.43
400	9.23	9.72	9.80	9.90	4.28	4.47	4.50	4.57
500	11.57	12.24	12.34	12.46	5.39	5.70	5.71	5.78

한편, 본 연구를 통해 얻은 결론은 다음과 같이 요약할 수 있다.

(가) 특이거동을 표현하는데 적합한 모델이므로 2차원 응력특이 문제 해석을 위해 활용될 수 있다. 적용대상은 재료적 비선형 거동을 하는 철근콘크리트 구조, 복합재료, 박스 및 파이프형 압거나 관로와 같은 압력용기 (pressure vessels), 인 장재의 보울트 이음부 등과 같다.

(나) 탄성해석의 경우와 같이 빠른 수렴성, 해의 신뢰성 및 정확도, 그리고 계층적 성질을 이용한 강성도 매트릭스의 데이터 베이스화 등의

이점을 갖기 때문에 컴퓨터 그래픽스를 사용한 전처리 및 후처리 기능과 오차평가를 할 수 있는 오차지시자 (error indicator) 기능을 내장하게 되면 적응적 비선형 hp-체눈설계 (nonlinear hp-adaptive mesh refinement)도 가능한 상업용 소프트웨어의 개발이 기대된다. 특히, 탄소성 상태에서 변위, 응력 및 소성영역의 전파 등을 기존의 h-version 유한요소모델에 비해 적은 자유도에서 동일한 정확도를 얻을 수 있으며 모델링이 매우 간편하므로 사용자가 사용하기 편리한 이점이 있다.

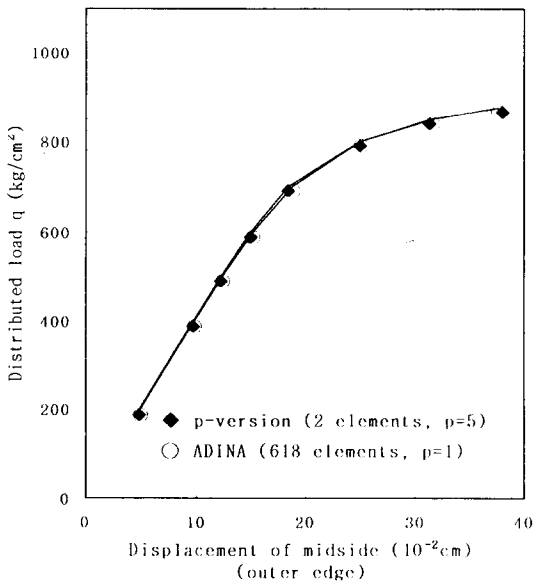


Fig. 8 Displacements of outer edge

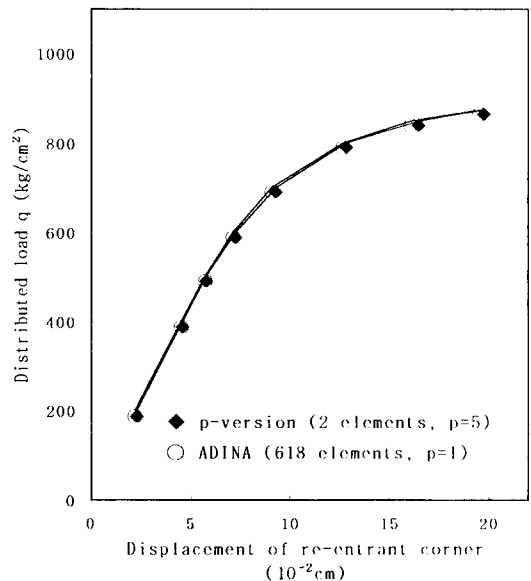


Fig. 9 Displacements of re-entrant corner

하여 이산화 오차(discretization error)를 줄일 수 있다.

### 참고 문헌

1. P.K. Basu, B.A. Szabo, "Adaptive Control in P-convergent Approximations" Proc. 15th Annual Meeting Soc. of Eng. Science, Dec. (1978)
2. I. Babuska, B.A. Szabo, "On the Rates of Convergence of the Finite Element Method", Numer. Meth. Engng., Vol.18, pp.323-341 (1982)
3. B.A. Szabo, "Some Recent Developments in Finite Element Analysis", Comp. Math. Applications, Vol.5, pp.99-115 (1979)
4. O.C. Zienkiewicz, J.P. De, S.R. Gago, D. W. Kelly, "The Hierarchic Concept in Finite Element Analysis", Compt. Struct., Vol.16, pp.51-65 (1983)
5. P.K. Basu, R.M. Lamprecht, "Some Trends in Computerized Stress Analysis", Proc. of the Seventh ASCE Conference in Electronic Computation, Washington University, St. Louis (1979)
6. 우광성, 장용채, 정우성, "계층적 축대칭요소에 의한 p-Version 모델", 대한토목학회 논문집, 제12권 제4-1호, pp.67-76 (1992)
7. 우광성, "특이성을 갖는 비정형 평판의 p-version 유한요소해석", 한국전산구조공학회 논문집, 제3권 제3호, pp.101-111, (1990)
8. 우광성, "균열된 쉘의 파괴역학해석을 위한 선진유한요소기법", 한국전산구조공학회 논문집, 제4권 제2호, pp.77-85, (1991)
9. M.N. Akhtar, "Stability Analysis of Thin-Walled Members Using p-Version of Finite Element Method", Doctoral Dissertation, Vanderbilt University, (1989)
10. K.S. Woo, "p-Version Finite Element Approximations of Stress Intensity Factors

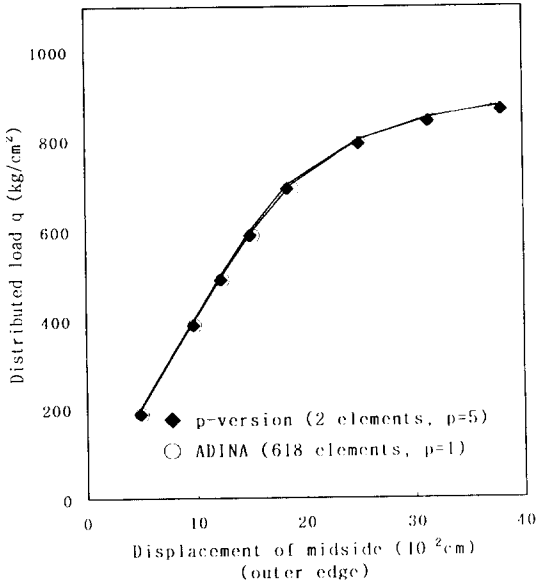


Fig. 10 Convergence of displacement of re-entrant corner when  $q=800\text{kg}/\text{cm}^2$

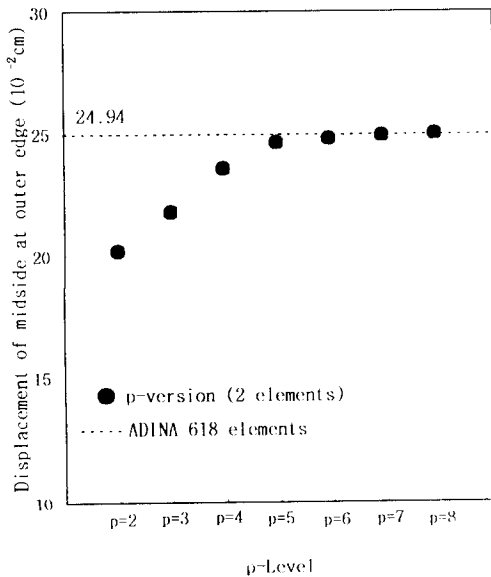


Fig. 11 Convergence of displacement of outer edge when  $q=800\text{kg}/\text{cm}^2$

(다) 원호나 타원 등의 곡선경계를 정확히 정의하기 위해 혼합함수(blending function)을 사용한 초유한사상(transfinite mapping)을 사용

- for Cracked Plates Including Shear Deformation", Engineering Fracture Mechanics, Vol.52, No. 3, pp.493-502, (1995)
11. 김행준, 우광성, "p-Version 유한요소법에 의한 형상 최적화 설계", 대한토목학회논문집, 제14권 제4호, pp.729-740, (1994)
  12. C. Cheung, "Dynamic Analysis by the P-version of the Finite Element Method", Ph.D. Dissertation, Purdue University, May, (1986)
  13. J.H. Liu, K.S. Surana, "Piecewise hierarchical p-version curved shell element for geometrically nonlinear behavior of laminated composite plates and shells", Compt. Struct., Vol.55, No.1, pp.47-66 (1995)
  14. J.E. Schiermeier, "Geometrically Nonlinear Analysis with the p-Version of the Finite Element Method", Ph.D. Dissertation, Washington University, St. Louis, Missouri (1990)
  15. S.M. Holzer, "The p-Version of the Finite Element Method in Incremental Elsto-Plastic Analysis", Numer. Meth. Engng., Vol.39, pp.1859-1878 (1996)
  16. W.F. Chen, D.J. Han, "Plasticity for Structural Engineers", Springer-Verlag, (1988)
  17. A. Mendelson, "Plasticity : Theory and Application", Robert E. Krieger Pub., (1968)
  18. D.R.J. Owen, E. Hinton, "Finite Elements in Plasticity : Theory and Practice", Pine-ridge Press (1980)
  19. W.J. Gordon, "Blending Function Methods of Bivariate and Multivariate Interpolation and Approximation", SIAM J. Numer. Analysis, Vol.8, No.1 (1971)
  20. W.J. Gordon, C.A. Hall, "Transfinite Element Methods : Blending Function Interpolation over Arbitrary Curved Element Domains", Numer. Math., Vol.21, pp.109-129 (1973)
  21. C. Meyer, Finite Element Idealization, ASCE (1987)

(접수일자 : 1997. 7. 14)