

# 압축성 유체로 충전된 원통형 탱크의 고유진동수의 특성

## Natural Frequency Characteristics of a Cylindrical Tank Filled with Bounded Compressible Fluid

정 경 훈\* 김 강 수\*\* 박 근 배\*\*\*  
Jeong, Kyeong-Hoon Kim, Kang-Soo Park, Keun-Bae

### 요 지

이 논문은 압축성 유체로 채워진 원통형 탱크의 고유진동 특성을 파악하기 위한 해석적 방법을 제시하고 있다. 탱크의 동적 거동은 유한 Fourier 급수전개 방법으로 전개하였으며, 압축성 유체는 선형 포텐셜 이론으로 전개하였다. 해석 방법의 타당성을 검증하기 위하여 물로 채워진 양단고정의 경계조건을 갖는 원통형 탱크의 고유진동수를 해석적 방법으로 구한 다음, 상용 유한요소해석 프로그램인 ANSYS 5.2를 이용하여 검증하였다. 그 결과, 유한요소 해석결과와 이론적인 방법으로 구한 이론해가 잘 일치하고 있음을 확인하였다. 또한 유체의 밀도와 압축성이 탱크의 고유진동수에 미치는 영향을 정규화된 무차원 고유진동수를 통해서 평가하였다. 유체의 밀도는 탱크의 모든 진동 모드의 고유진동수에 영향을 주지만, 유체 압축성의 영향은 저차 원주방향 모드의 진동수에서 더 크게 나타나고 있음을 확인할 수 있었다.

### Abstract

This paper presents an analytical method for evaluating the free vibration of a circular cylindrical tank filled with bounded compressible fluid. The analytical method was developed by means of the finite Fourier series expansion method. The compressible fluid motion was determined by means of the linear velocity potential theory. To clarify the validity of the analytical method, the natural frequencies of a circular cylindrical tank with the clamped-clamped boundary condition, and filled with water, were obtained by the analytical method and the finite element method using a commercial ANSYS 5.2 software. Excellent agreement on the natural frequencies of the liquid-filled tank structure was found. The compressibility and the fluid density effects on the normalized coupled natural frequencies were investigated. The density of fluid affects on all coupled natural frequencies of the tank, whereas the compressibility of fluid affects mainly on the natural frequencies of lower circumferential modes.

*Keywords* : cylindrical tank, free vibration, natural frequency, fluid-structure interaction, fluid-filled, finite Fourier series expansion method, bounded compressible fluid

## 1. 서 론

이 논문은 압축성 유체로 채워진 얇은 원통형

\* 한국원자력연구소, 기계설계기술개발분야, 선임연구원  
\*\* 한국원자력연구소, 기계설계기술개발분야, 선임연구원  
\*\*\* 성회원, 한국원자력연구소, 기계설계기술개발분야, 책임연구원

• 이 논문에 대한 토론을 1998년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1998년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

탱크의 고유진동 해석을 다루고 있다. 원자력 발전소의 냉각수로 채워진 가압형 원자로나 액화가스로 채워진 저장 탱크의 내진해석을 수행하는 경우, 유체로 채워진 원통형 탱크의 고유진동 해석이 필요하다. 이 경우 원통형 탱크 안에서 유체는 자유표면 (free surface)을 갖지 않고 갇힌 유체 (bounded fluid) 상태로 남게 되며, 자유표면을 갖는 경우와 다른 동적거동을 보이게 된다.

많은 연구자들은 이론 및 실험으로 이와 유사한 연구를 수행하여 왔다. 그들은 원통 안에 채워진 액체를 갇힌 유체로 취급하는 대신 자유표면을 갖는 출렁거리는 유체 (sloshing fluid)로 취급하였다. Stillman<sup>1)</sup>은 비압축성 이상유체가 부분적으로 채워진 외팔보 원통형 셸에 대하여 고전적인 Rayleigh-Ritz 방법으로 접근하였다. Yamaki<sup>2)</sup>와 Gonsalves<sup>3)</sup>은 Galerkin 방법으로 비압축성이고 비점성인 유체가 부분적으로 채워지고, 양단고정의 경계조건을 갖는 원통형 탱크의 고유진동에 대한 해석적 방법을 개발하였다. 그리고 Lakis와 Sinno<sup>4)</sup>는 유한요소 해석을 통한 수치해를 구하였고, Mikami와 Yoshimura<sup>5)</sup>는 유체로 채워진 원통형 셸의 고유진동 해석 방법을 collocation 방법으로 제시하였다. Han과 Liu<sup>6)</sup>는 축방향으로 두께가 변하는 원통형 탱크에 대하여 근사적 해석방법을 제시하였다. 또한 Jeong과 Lee<sup>7)</sup>는 유한 Fourier 변환에 따른 급수전개 방법으로 같은 문제를 연구하였다. Gupta와 Hutchinson<sup>8)</sup>, Zhu<sup>9)</sup> 그리고 Huang<sup>10)</sup>은 연속체 역학과 변분법으로 유체와 연성된 구조물의 특성을 연구하였다. 위에 언급한 모든 연구는 유체를 비점성, 비압축성 이상유체로 가정하여 수식을 전개하였다. 한편 Mazuch 등<sup>11)</sup>은 실험으로 연구를 수행하였고 유한요소법으로 검증하였다.

본 논문에서는 유체가 갖는 경계조건과 압축성을 고려하여 Jeong과 Lee<sup>7)</sup>가 수행하였던 해석적 접근방법을 확장하였다. 따라서 본 논문에서는 유체가 자유표면에서 출렁거리는 효과는 고려되지 않았다. Jeong과 Kim<sup>12)</sup>에 따르면 자유표면에서 출렁거리는 유체의 경계조건을 적용하면 저차 모드에서 연성된 원통형 셸의 고유진동수가

약간 크게 나타난다. 본 논문에서는 비점성, 압축성 유체로 채워진 원통형 탱크의 연성된 고유진동수를 예측하기 위한 이론적 방법과 이의 적용 예를 제시하고, 이론적 방법의 타당성을 확인하기 위하여 유한요소 해석결과와 비교한다. 유체와 원통형 탱크가 연성된 고유진동수에 유체의 압축성 및 밀도가 미치는 영향을 정규화된 무차원 고유진동수를 통해서 평가하고자 한다.

## 2. 이론의 전개

### 2.1 원통형 탱크의 운동방정식 및 경계조건

그림 1과 같이 압축성 유체가 들어있는 원통형 탱크를 고려하자. 원통형 탱크의 반경은  $R$ , 높이는  $L$ , 그리고 탱크의 두께는  $h$ 로 표시하면 유체의 영향을 고려한 Sanders의 원통형 셸의 방정식<sup>7)</sup>은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R^2 u_{,rr} + \frac{(1-\mu)}{2} \left(1 + \frac{k}{4}\right) u_{,rr} + R \left[1 - \frac{(1+\mu)}{2}\right] \left[-\frac{3(1-\mu)}{8} k\right] v_{,r\theta} + \mu R w_{,r} + \frac{(1-\mu)}{2} R k w_{,r\theta} = \gamma^2 u_{,tt} \quad (1a)$$

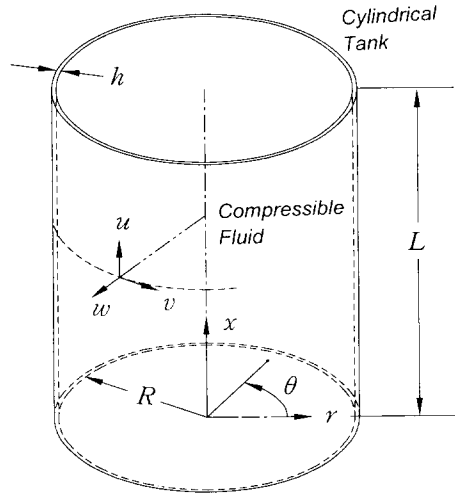


그림 1 압축성 유체로 채워진 원통형 탱크

$$R\left[\frac{(1+\mu)}{2} - \frac{3(1-\mu)}{8}k\right]u_{,x\theta} + (1+k)v_{,0\theta} \\ + \frac{(1-\mu)}{2}R^2\left(1 + \frac{9k}{4}\right)v_{,xx} - \frac{(3-\mu)}{2}R^2kw_{,xx\theta} \\ + w_{,0\theta} - kw_{,00\theta} = \gamma^2v_{,tt} \quad (1b)$$

$$\frac{1-\mu}{2}Rku_{,x0\theta} + \mu Ru_{,x} - \frac{3-\mu}{2}R^2kv_{,xx\theta} + v_{,0\theta} \\ + w + k(R^4w_{,xxxx} + 2R^2w_{,xx0\theta} + w_{,000\theta} - v_{,00\theta}) \\ = -\gamma^2w_{,tt} + R^2\frac{P}{D} \quad (1c)$$

식 (1)과 다음에 나오는 식에서 콤마(.)는 편미분을 나타낸다. 또한  $\mu$ 는 Poisson 비를 나타내고  $\gamma^2 = \rho R^2(1-\mu^2)/E$ ,  $K = Eh^3/12(1-\mu^2)$ ,  $k = h^2/12R^2$ ,  $D = Eh/(1-\mu^2)$ 이다. 유체와 영향은 식 (1c)의  $R^2P/D$ 로 나타나며  $P$ 는 탱크의 안쪽면에 작용하는 유체 압력이다. 양단이 고정된 원통형 탱크에 대한 모든 기하학적 경계 조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(0) = v(0) = w(0) = w_{,x}(0) = 0, \quad (2a)$$

$$u(L) = v(L) = w(L) = w_{,x}(L) = 0 \quad (2b)$$

양단이 단순지지된 원통형 탱크에 적용할 수 있는 경계조건은 식 (29)로 나타난다.

원통형 탱크의 단면에 작용하는 하중과 변위 사이의 관계는 다음과 같다.

$$N_x = D\left[u_{,x} + \frac{\mu}{R}v_{,0} + \frac{\mu}{R}w\right], \quad (3a)$$

$$N_{x\theta} = \frac{D(1-\mu)}{2}\left[\frac{1}{R}\left(1 - \frac{3}{4}k\right)u_{,0\theta} + \left(1 + \frac{9}{4}k\right)v_{,x} - 3kw_{,x\theta}\right], \quad (3b)$$

$$Q_x = K\left[-\frac{(1-\mu)}{2R^3}u_{,0\theta} + \frac{(3-\mu)}{2R^2}v_{,x\theta} - \frac{(2-\mu)}{R^2}w_{,x0\theta} - w_{,xxx}\right], \quad (3c)$$

$$M_x = K\left[\frac{\mu}{R^2}(v_{,0\theta} - w_{,0\theta}) - w_{,xx}\right] \quad (3d)$$

여기서,  $N_x$ ,  $N_{x\theta}$ ,  $Q_x$ ,  $M_x$ 는 단위 길이당 막인장력, 단위 길이당 유효 막전단력, 단위 길이당 유효 횡전단력, 단위 길이당 굽힘모멘트를 각각 나타낸다.

## 2.2 모드 함수

원통형 탱크의 고유진동에 대한 동적 변위들은 축방향의 모드 함수와 임의의 원주방향 모드  $n$ 에 대하여 원주방향 모드 함수 및 시간에 대한 조화함수의 곱으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(x, \theta, t) = u(x) \cos n\theta \exp(i\omega t), \quad (4a)$$

$$v(x, \theta, t) = v(x) \sin n\theta \exp(i\omega t), \quad (4b)$$

$$w(x, \theta, t) = w(x) \cos n\theta \exp(i\omega t) \quad (4c)$$

여기서,  $u(x)$ ,  $v(x)$ ,  $w(x)$ 는 각각 축방향, 접선방향 그리고 반경방향 변위를 나타내는 모드 함수이고,  $\omega$ 는 유체와 연성된 탱크의 고유진동수이다. 축방향을 따라 이 모드 함수는 서로가 직교를 이루는 Fourier급수의 선형조합으로써 표현할 수 있다.

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (5a)$$

$$v(x) = B_{0n} + \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (5b)$$

$$w(x) = C_{0n} + \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (5c)$$

여기서  $A_{mn}$ ,  $B_{0n}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{0n}$ 은  $C_{mn}$ 은 모드형상을 정의하는 미정된 Fourier 계수를 나타낸다. 모드 함수의 미분은 참고문헌<sup>13)</sup>에 기술된 유한 Fourier 변환으로 얻을 수 있다.

## 2.3 압축성 유체의 운동방정식

원통형 탱크의 고유진동으로 인한 비점성이고

압축성인 유체의 운동은 속도 포텐셜로 나타낼 수 있고 다음 식을 만족한다.

$$\Phi_{,rr} + \frac{1}{r}\Phi_{,r} + \frac{1}{r^2}\Phi_{,\theta\theta} + \Phi_{,zz} = \frac{1}{c^2}\Phi_{,tt} \quad (6)$$

여기서  $c$ 는 유체 내에서의 음속으로  $\sqrt{B/\rho_0}$  와 동일한 값을 갖는다. 그리고  $B$ 는 유체의 체적 탄성계수,  $\rho_0$ 는 유체의 밀도이다. 일반적인 속도 포텐셜  $\Phi$ 는  $x$ 의 함수로 분리하는 것이 가능하다. 따라서

$$\begin{aligned} \Phi(x, r, \theta, t) &= i\omega\phi(r, \theta, x)\exp(i\omega t) \\ &= i\omega\phi(r, \theta)f(x)\exp(i\omega t), \quad i = \sqrt{-1} \end{aligned} \quad (7)$$

그런데 식(6)에 식(7)을 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} &[\phi(r, \theta)_{,rr} + \frac{1}{r}\phi(r, \theta)_{,r} + \frac{1}{r^2}\phi(r, \theta)_{,\theta\theta} \\ &+ \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\phi(r, \theta)]/\phi(r, \theta) \\ &= -\frac{f(x)_{,zz}}{f(x)} = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

$\gamma=0$ 에서 유체의 속도포텐셜이 유한하다는 조건을 고려할 때, 변수 분리법으로 편미분 방정식(8)을 푸는 것이 가능하다. 따라서 식(8)해는 식(9a)와 식(9b)로 나누어 쓸 수 있다.

$\frac{m\pi}{L} \geq \frac{\omega}{c}$ 일 경우,

$$\begin{aligned} \phi(r, x, \theta) &= \left[ D_{on} J_n\left(\frac{\omega r}{c}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} D_{mn} I_n(\alpha_{mn}r) \right] \\ &\times \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin n\theta, \end{aligned} \quad (9a)$$

$\frac{m\pi}{L} < \frac{\omega}{c}$ 일 경우에는

$$\begin{aligned} \phi(r, x, \theta) &= \left[ D_{on} J_n\left(\frac{\omega r}{c}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} D_{mn} J_n(\alpha_{mn}r) \right] \\ &\times \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin n\theta, \end{aligned} \quad (9b)$$

여기서  $J_n$ 은  $n$ 차 제 1종 Bessel 함수이고,  $I_n$ 은  $n$ 차 제 1종 수정 Bessel 함수를 나타낸다.  $\phi$ 는 유체의 공간 속도포텐셜을 의미한다. 계수  $\alpha_{mn}$ 은 유체내의 음속과 관련된다.

$$\alpha_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} \quad (10)$$

원통형 탱크의 상단과 하단이 강체표면으로 막혀 있다고 가정하면 축방향 유속이 영이 되어서 경계조건은 식(11)이 된다.

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, x)_{,x} |_{x=0} = \phi(r, \theta, x)_{,x} |_{x=L} = 0, \\ 0 \leq r \leq R \end{aligned} \quad (11)$$

또 하나의 경계조건으로서 유체와 탱크가 함께 운동하기 때문에 서로 분리될 수 없으므로 탱크의 반경방향 속도와 유체의 반경방향의 속도가 동일해야 한다. 따라서 유체와 탱크사이의 접촉부에서 다음 식이 성립해야 한다.

$$\phi(r, \theta, x)_{,r} |_{r=R} = -w(x, \theta), \quad 0 \leq x \leq L \quad (12)$$

식(12)에 식(9a) 및 식(9b), 그리고 식(5c)를 대입하면, 식(9a)와 식(9b)에 나타난 미정의 Fourier 계수  $D_{on}$ 과  $D_{mn}$ 은 Fourier 계수인  $C_{on}$ 과  $C_{mn}$ 의 향으로 기술될 수 있다. 그리고 유체와 접촉하는 탱크면에 작용하는 유체 압력은 다음과 같이 나타난다.

$$P(x, \theta, t) = \rho_0 \omega^2 \phi(R, x, \theta) \exp(i\omega t) \quad (13)$$

Sanders 방정식에 나타나는 유체압력으로 인한 정규화된 하중, 즉  $R^2 P(x, \theta, t)/D$ 는 원통형

탱크의 반경방향 동적 변위에서 나타나는 Fourier 계수  $C_{on}$ 과  $C_{mn}$ 항으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{R^2 P(x, \theta, t)}{D} = \left[ Y_1 C_{on} + \sum_{m=1}^{\infty} Z_m C_{mn} \right] \times \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin n\theta \exp(i\omega t) \quad (14)$$

여기서

$$Y_1 = -\left(\frac{c}{\omega}\right) \left[\frac{\rho_o}{\rho h}\right] \left[ \frac{J_n\left(\frac{\omega R}{c}\right)}{J_n'\left(\frac{\omega R}{c}\right)} \right] \Omega, \quad (15)$$

단  $\rho$ : 탱크 재질의 밀도.

$\frac{m\pi}{L} \geq \frac{\omega}{c}$ 일 경우,

$$Z_m = -\left(\frac{1}{\alpha_{mn}}\right) \left[\frac{\rho_o}{\rho h}\right] \left[ \frac{I_n(\alpha_{mn}R)}{I_n'(\alpha_{mn}R)} \right] \Omega, \quad (16a)$$

$\frac{m\pi}{L} < \frac{\omega}{c}$ 일 경우,

$$Z_m = -\left(\frac{1}{\alpha_{mn}}\right) \left[\frac{\rho_o}{\rho h}\right] \left[ \frac{J_n(\alpha_{mn}R)}{J_n'(\alpha_{mn}R)} \right] \Omega, \quad (16b)$$

$$\Omega = \frac{\rho \omega^2 R^2 (1 - \mu^2)}{E}$$

### 2.4 일반 공식화

식 (14)로 나타난 유체력과 탱크의 양단에서 경계 값과 개방영역  $0 < x < L$ 에서 Fourier sine 및 cosine 급수로 나타나는 변위 및 그들의 미분을 식 (1a), (1b), (1c)에 대입하면, Fourier 계수인  $B_{on}$ ,  $C_{on}$ ,  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  및  $C_{mn}$ 에 대한 방정식을 얻게 된다.

$$B_{on} = \zeta_1 (u_o + u_l) + \zeta_2 (\tilde{v}_o + \tilde{v}_l) + \zeta_3 (\tilde{w}_o + \tilde{w}_l) + \zeta_4 (\tilde{\tilde{w}}_o + \tilde{\tilde{w}}_l), \quad (17a)$$

$$C_{on} = \zeta_5 (u_o + u_l) + \zeta_6 (\tilde{v}_o + \tilde{v}_l) + \zeta_7 (\tilde{w}_o + \tilde{w}_l) + \zeta_8 (\tilde{\tilde{w}}_o + \tilde{\tilde{w}}_l), \quad (17b)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 m^2 + a_2 & -a_3 m & -a_4 m \\ -a_3 m & a_5 m^2 + a_6 & a_7 m^2 + a_8 \\ -a_4 m & a_7 m^2 + a_8 & a_9 m^4 + a_{10} m^2 + a_{11} - Z_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 m \{u_o + (-1)^m u_l\} \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기서,

$$\Gamma_1 = a_3 \{u_o + (-1)^m u_l\} + a_5 \{\tilde{v}_o + (-1)^m \tilde{v}_l\} + a_7 \{\tilde{w}_o + (-1)^m \tilde{w}_l\},$$

$$\Gamma_2 = a_4 \{u_o + (-1)^m u_l\} + a_7 \{\tilde{v}_o + (-1)^m \tilde{v}_l\} + a_{10} \{\tilde{w}_o + (-1)^m \tilde{w}_l\} + a_9 \{\tilde{w}_o + (-1)^m \tilde{w}_l - m^2 \tilde{w}_o - m^2 (-1)^m \tilde{w}_l\},$$

$$u_o = -\frac{2u(0, \theta)}{\pi \cos n\theta}, \quad u_l = -\frac{2u(L, \theta)}{\pi \cos n\theta},$$

$$\tilde{v}_o = -\frac{2Lv_{,r}(0, \theta)}{\pi^2 \sin n\theta}, \quad \tilde{v}_l = -\frac{2Lv_{,r}(L, \theta)}{\pi^2 \sin n\theta},$$

$$\tilde{w}_o = -\frac{2Lw_{,r}(0, \theta)}{\pi^2 \cos n\theta}, \quad \tilde{w}_l = -\frac{2Lw_{,r}(L, \theta)}{\pi^2 \cos n\theta},$$

$$\tilde{\tilde{w}}_o = -\frac{2L^3 v_{,rrr}(0, \theta)}{\pi^4 \cos n\theta},$$

$$\tilde{\tilde{w}}_l = -\frac{2L^3 w_{,rrr}(L, \theta)}{\pi^4 \cos n\theta}, \quad (19)$$

또한  $a_i (i=1, 2, \dots, 11)$ 과  $\zeta_i (i=1, 2, \dots, 8)$ 는 수식정리에서 유도되는 계수들이다.

식 (3)와 식 (19)를 이용하면 탱크의 양단에 작용하는 하중  $N_{,n}$ ,  $Q_{,n}$ 는 변위의 양단값과 그들의 미분값으로써 나타낼 수 있다.

$$N_{,n}(0, \theta) = \{q_1 u_o + q_2 \tilde{v}_o + q_3 \tilde{w}_o\} \sin n\theta, \quad (20a)$$

$$N_{,n}(L, \theta) = -\{q_1 u_l + q_2 \tilde{v}_l + q_3 \tilde{w}_l\} \sin n\theta, \quad (20b)$$

$$Q_x(0, \theta) = \{q_4 u_0 + q_5 \tilde{v}_0 + q_6 \tilde{w}_0 + N_{x0}^o\} \cos n\theta, \quad (20c)$$

$$Q_x(L, \theta) = -\{q_4 u_L + q_5 \tilde{v}_L + q_6 \tilde{w}_L + q_7 \tilde{w}_L\} \cos n\theta, \quad (20d)$$

여기서  $q_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 는 식(3)과 식(19)로부터 유도되는 계수이다. 변위의 양단 경계값과 그들의 미분치  $\tilde{v}_0, \tilde{v}_L, \tilde{w}_0, \tilde{w}_L$ 는 식(20)에 따라서  $u$ 와  $\tilde{w}, N_{x0}, Q_x$ 의 양단 경계값의 조합으로 주어질 수 있다.

$$\tilde{v}_0 = \{g_1 u_0 + g_2 \tilde{w}_0 + g_3 N_{x0}^o\}, \quad (21a)$$

$$\tilde{v}_L = \{g_1 u_L + g_2 \tilde{w}_L + g_3 N_{x0}^L\}, \quad (21b)$$

$$\tilde{w}_0 = \{g_4 u_0 + g_5 \tilde{w}_0 + g_6 N_{x0}^o + g_7 Q_x^o\}, \quad (21c)$$

$$\tilde{w}_L = \{g_4 u_L + g_5 \tilde{w}_L + g_6 N_{x0}^L + g_7 Q_x^L\}, \quad (21d)$$

여기서  $g_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 는 수식을 전개할 때 얻는 계수들이다.

$$N_{x0}^o = \frac{N_{x0}(0, \theta)}{\sin n\theta}, \quad N_{x0}^L = -\frac{N_{x0}(L, \theta)}{\sin n\theta},$$

$$Q_x^o = \frac{Q_x(0, \theta)}{\cos n\theta}, \quad Q_x^L = -\frac{Q_x(L, \theta)}{\cos n\theta} \quad (22)$$

식(21)을 식(17)과 식(18)에 대입하면 식(23)과 (24)를 얻을 수 있다. 결국 Fourier 계수는  $\tilde{v}$ 와  $\tilde{w}$ 대신에  $u, \tilde{w}, N_{x0}, Q_x$ 의 양단 경계값으로 정의될 수 있다.

$$B_{on} = \beta_1 (u_0 + u_L) + \beta_2 (\tilde{w}_0 + \tilde{w}_L) + \beta_3 (N_{x0}^o$$

$$+ N_{x0}^L) + \beta_4 (Q_x^o + Q_x^L), \quad (23a)$$

$$C_{on} = \zeta_1 (u_0 + u_L) + \zeta_2 (\tilde{w}_0 + \tilde{w}_L) + \zeta_3 (N_{x0}^o + N_{x0}^L) + \zeta_4 (Q_x^o + Q_x^L), \quad (23b)$$

$$\begin{bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{a1} & \lambda_{a2} & \lambda_{a3} & \lambda_{a4} \\ \lambda_{b1} & \lambda_{b2} & \lambda_{b3} & \lambda_{b4} \\ \lambda_{c1} & \lambda_{c2} & \lambda_{c3} & \lambda_{c4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_0 + (-1)^m u_L \\ \tilde{w}_0 + (-1)^m \tilde{w}_L \\ N_{x0}^o + (-1)^m N_{x0}^L \\ Q_x^o + (-1)^m Q_x^L \end{bmatrix} \quad (24)$$

동적 변위  $v, w$ 와 관련되어 만족시켜야 하는 기하학적 경계조건 다음과 같다.

$$v(0) = B_{on} + \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} = 0, \quad (25a)$$

$$v(L) = B_{on} + \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} (-1)^m = 0, \quad (25b)$$

$$w(0) = C_{on} + \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} = 0, \quad (25c)$$

$$w(L) = C_{on} + \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} (-1)^m = 0 \quad (25d)$$

원통형 탱크의 양단에서 힘의 경계조건을 고려할 경우, 만족시켜야 하는 경계조건은 탱크의 양단에서  $N_x=0, M_x=0$ 이어야 한다. 이 방정식에 변위와 변위의 미분값을 대입하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$\left(\frac{\pi}{L}\right)\left(\frac{u_0 + u_L}{2}\right) + \left(\frac{\mu}{R}\right)(nB_{on} + C_{on})$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left(\frac{\pi}{L}\right)\{u_0 + (-1)^m u_L + mA_{mn}\} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\mu}{R}\right)\{nB_{mn} + C_{mn}\} \right] = 0, \quad (26a)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\pi}{L}\right)\left(\frac{u_o+u_L}{2}\right)+\left(\frac{\mu}{R}\right)(nB_{on}+C_{on}) \\ & +\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)\{u_o+(-1)^m u_L+m A_{mn}\}\right. \\ & \left.+\left(\frac{\mu}{R}\right)\{nB_{mn}+C_{mn}\}\right](-1)^m=0, \end{aligned} \quad (26b)$$

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(\frac{\tilde{w}_o+\tilde{w}_L}{2}\right)+\left(\frac{\mu}{R^2}\right)n(B_{on}+C_{on}) \\ & +\sum_{m=1}^{\infty}\left[-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\{\tilde{w}_o+(-1)^m \tilde{w}_L-m^2 C_{mn}\}\right. \\ & \left.+\left(\frac{\mu}{R^2}\right)n\{B_{mn}+n C_{mn}\}\right]=0, \end{aligned} \quad (26c)$$

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(\frac{\tilde{w}_o+\tilde{w}_L}{2}\right)+\left(\frac{\mu}{R^2}\right)n(B_{on}+n C_{on}) \\ & +\sum_{m=1}^{\infty}\left[-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\{\tilde{w}_o+(-1)^m \tilde{w}_L-m^2 C_{mn}\}\right. \\ & \left.+\left(\frac{\mu}{R^2}\right)n\{B_{mn}+n C_{mn}\}\right](-1)^m=0 \end{aligned} \quad (26d)$$

식 (25)와 식 (26)으로 나타나는 경계조건들로부터의 8개의 구속조건에 대하여 제차행렬로 정리할 수 있다. 따라서 모든 기하학적 경계조건과 힘의 경계조건이 이 식에 포함되어 있다.

$$\begin{bmatrix} u_o \\ u_L \\ \tilde{w}_o \\ \tilde{w}_L \\ N_{x0}^o \\ N_{x0}^L \\ Q_x^o \\ Q_x^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} & e_{17} & e_{18} \\ e_{12} & e_{11} & e_{14} & e_{13} & e_{16} & e_{15} & e_{18} & e_{17} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} & e_{27} & e_{28} \\ e_{22} & e_{21} & e_{24} & e_{23} & e_{26} & e_{25} & e_{28} & e_{27} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} & e_{45} & e_{46} & e_{47} & e_{48} \\ e_{42} & e_{41} & e_{44} & e_{43} & e_{46} & e_{45} & e_{48} & e_{47} \end{bmatrix} \quad (27)$$

여기서 계수  $e_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, 8, j=1, 2, 3, 4$ )는 식 (26)으로부터 수식들을 정리하여 얻을 수 있

다. 모든 경계조건을 포함하고 있는 식 (27)이 의미있는 해를 갖기 위하여  $\det[e_{ij}]$ 는 영이 되어야 한다.

## 2.5 고유진동수 행렬식

원통형 탱크 양단의 경계조건을 만족시키기 위한 요건은 8X8 고유진동수 행렬식으로부터 유도한다. 식 (27)로부터 고전적인 경계조건에 대하여, 해당되는 기하학적 경계조건이나 힘의 경계조건을 취사선택하여 조합함으로써 고유진동수 행렬식을 얻을 수 있다.

탱크의 상하 양단이 고정된 (clamped) 경우, 수식전개에 적용할 경계조건은 식 (2)로 귀착된다. 그런데 이 경계조건 중에서  $x=0$  또는  $x=L$ 에서  $v=0$ , 그리고  $w=0$ 인 기하학적 경계조건은 식 (5)로 나타나는 모드 함수를 만족시킬 수 없다. 따라서 식 (27)로 나타나는 행렬의 첫 번째부터 네 번째 행까지는 고려하지 않고  $u_o, u_L, \tilde{w}_o, \tilde{w}_L$ 과 관련된 열은 경계조건으로부터 스스로 영이 되어 해제된다. 결국 식 (27)의 8X8 고유진동수 행렬은  $N_{x0}^o, N_{x0}^L, Q_x^o, Q_x^L$ 와 관련된 행과 열만 남아서 식 (28)로 귀착되고 이로부터 유체와 연성된 탱크의 고유진동수를 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} e_{15} & e_{16} & e_{17} & e_{18} \\ e_{16} & e_{15} & e_{18} & e_{17} \\ e_{25} & e_{26} & e_{27} & e_{28} \\ e_{26} & e_{25} & e_{28} & e_{27} \end{bmatrix} = 0 \quad (28)$$

원통형 탱크의 양단이 축방향으로 구속되고 단 순지지된 경우에 기하학적 경계조건과 힘의 경계조건은 식 (29)로 나타난다.

$$\begin{aligned} & x=0, L \text{에서} \\ & u=0, v=0, w=0, w_{,x}=0, M_x=0 \end{aligned} \quad (29)$$

그런데 식 (5)의 모드 함수는  $x=0$ 과  $x=L$ 에서  $u=0$ 의 경계조건을 자동적으로 만족시키지만,  $x=0, x=L$ 에서  $v=0, w=0$ 이 되는 네개의 기하학적 경계조건은 식 (5)의 모든 함수를 자동적으로 만족시키지는 못한다. 그리고 식 (26c)와

(26d)에서  $x=0$ 과  $x=L$ 일 때  $M_x=0$ 이 되어야 하는 힘의 경계조건을 만족시켜야 한다. 따라서 식 (27)로 나타나는 행렬의 첫 번째부터 네 번째까지, 그리고 일곱, 여덟번째 행은 동시에 구속되어야 하고  $u_0$  및  $u_L$ 과 관련된 항은 경계조건을 자동적으로 만족시키므로 해제되어야 한다. 따라서  $\tilde{w}$ ,  $N_{x\theta}$ ,  $Q_x$ 와 관련된 양단 변위와 하중만 남게 된다. 양단이 단순지지된 원통형 탱크의 경우, 식 (27)에서  $\tilde{w}_0$ ,  $N_{x\theta}^0$ ,  $Q_x^0$ ,  $\tilde{w}_L$ ,  $N_{x\theta}^L$ ,  $Q_x^L$ 와 관련된 열만 남아서, 고유진동수 행렬식은 6X6 행렬식으로 귀착된다.

$$\begin{pmatrix} e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} & e_{17} & e_{18} \\ e_{14} & e_{13} & e_{16} & e_{15} & e_{18} & e_{17} \\ e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} & e_{27} & e_{28} \\ e_{24} & e_{23} & e_{26} & e_{25} & e_{28} & e_{27} \\ e_{43} & e_{44} & e_{45} & e_{46} & e_{47} & e_{48} \\ e_{44} & e_{43} & e_{46} & e_{45} & e_{48} & e_{47} \end{pmatrix} = 0 \quad (30)$$

그 밖의 다른 경계조건의 경우도 이와 유사한 방법으로 고유진동수 행렬식을 구할 수 있다.

### 2.6 무차원 정규화된 고유진동수 (non-dimensional normalized natural frequency)

유체와 연성된 고유진동수는 유체의 부가질량 (added mass)의 영향으로 공기중에서의 고유진동수보다 낮은 고유진동수를 갖게 된다. 그런데 원통형 탱크의 구조물은 각각의 진동모드에 따라서 다른 고유진동수 값을 갖게되므로 유체와 연성된 고유진동수 값만으로는 유체가 탱크의 고유진동수 감소에 얼마나 기여했는지를 평가하기가 용이하지 않다. 따라서 유체와 연성된 각각의 진동 모드에 해당되는 고유진동수 값을 공기중에서의 고유진동수 값으로 나누어 식 (31)에서 정의한 대로 무차원 정규화된 고유진동수 (non-dimensional normalized natural frequency)를 정의하게 되면, 유체의 부가질량이 구조물의 고유진동수 감소에 얼마나 기여했는지를 평가할 수가 있다.

$$\text{non-dimensional normalized natural frequency} = \frac{\omega \text{ of fluid-filled case}}{\omega \text{ of empty case}} \quad (31)$$

여기서 정규화된 무차원 고유진동수는 항상 영과 1 사이의 값을 갖는다.

## 3. 적용 예

### 3.1 고유진동수 값의 수렴성

2장의 이론적 해석에 바탕을 둔 식 (28)로부터 압축성 유체로 채워진 원통형 탱크가 양단고정의 경계조건을 갖을 때, 유체와 연성된 고유진동수를 수치적으로 얻을 수 있다. 2장에서 전개한 이론적 해석방법의 타당성을 검증하기 위하여 하나의 예제를 선택하고, 이론적인 결과를 구한 후에 유한요소 결과와 비교하였다. 이를 위한 계산이 유체와 연성된 다음의 구조물에 대해 수행되었다. 알루미늄으로 만들어진 원통형 탱크는 평균 반경이 100mm, 높이가 300mm, 두께는 2mm이다. 계산에서 사용한 탱크 재료의 물리적 성질은 다음과 같다. 탱크의 탄성계수는 69GPa, Poisson 비는 0.3, 밀도는 2700kg/m<sup>3</sup>이다. 수중 음속은 물의 체적 탄성계수 2.2 GPa과 동등한 1483m/s이며, 유체인 물의 밀도는 1000kg/m<sup>3</sup>이다. 2장에서 유도된 고유진동수 행렬식은 무한급수의 전개가 수식에 나타난다. 따라서 급수전개에 따른 수렴성을 확인하기 위하여 전개항  $m$ 을 얼마로 해야 할지 결정해야 한다. 수렴성을 확인하기 위한 수치계산에서 Fourier 급수 전개항  $m$ 을 100으로 할 때 충분히 수렴된 정확한 해를 얻을 수 있었다.

범용 유한요소 코드인 ANSYS (Version 5.2)를 이용한 유한요소 해석이 이론적 결과의 검증을 위해 사용되었다. 정확한 유한요소 해석 결과를 얻기 위하여, 점차적으로 mesh 크기를 증가하면서 유한요소 해석을 수행하였으며, 그 결과의 일부를 표 1에 정리하였다. 유한요소 해석을 위한 2차원 축대칭 모델에서 축대칭 2차원 유체요소 (FLUID81)와 축대칭 쉘요소 (SHELL61)가 사용되었다. 유체영역은 4개의 절점을 가진 유체요소로 분할되었고, 원통형 탱크는 두 절점을 갖는 쉘요소로 분할되었다. 유체에 대한 경계조건으로 탱크의 상단과 하단에서 유체의 변위와 회전은 영이 된다. 즉 유체 영역의 상하면은 축방향의 이동이 구속된다. 유체요소에 의하여 연결된 절점들은 원통형 탱크의 중심선에서 반경방향의 운동을 제한



하는 것을 제외하고는 3차원공간에서 움직임이 자유롭다. 즉,  $r=0$ 에서 유체요소의 절점들은 반경방향 변위가 구속된다. 탱크의 접수면을 따라 유체 절점의 반경방향 속도는 탱크의 반경방향 속도와 일치시켰다. 유한요소 해석 모델에서 Case 1은 유체영역이 반경방향으로 8개의 요소로 나뉘고, 축방향으로는 10개의 요소를 갖게 되어, 유체영역은 총 80개의 동일한 크기의 요소를 갖고 있다. 여기서 탱크는 크기가 동일한 10개의 축대칭 셀 요소로 이루어져 있다. 한편 Case 2는 유체영역이 반경방향으로 8개의 요소로 나뉘고 축방향으로 20개의 요소를 갖게 되어 유체영역은 총 160개의 동일한 크기의 요소를 갖고 있다. 탱크는 크기가 동일한 20개의 축대칭 요소로 이루어져 있다. 그리고 Case 3의 경우는 유체영역이 반경방향으로 12개의 요소로 나뉘고 축방향으로 40개의 요소를 갖게 되어, 유체영역은 총 480개의 동일한 크기의 요소를 갖고 있다. 이 때, 탱크는 크기가 동일한 40개의 축대칭 요소로 이루어져 있다.

표 1은 유한요소해석으로 구한 고유진동수의 수렴성을 나타내고 있으며, 이론해석으로 구한 고유진동수와 유한요소해석으로 얻은 고유진동수를 비교하고 있다. 유체 및 원통의 요소 수가 증가할수록, 고유진동수의 대부분은 이론치에 수렴하고 있음을 확인할 수 있다. 유한요소 해석으로부터 고유진동수는 낮은 축방향 모드수에서는 빠르게 수렴하고 있음을 알 수 있다.

표 1 이론적 고유진동수와 유한요소해석의 고유진동수의 비교

모드 n	m'	유한요소해석 결과(Hz)			이론치 (Hz)
		Case 1	Case 2	Case 3	
1	1	1017.6	1013.5	1010.7	1007.5
	2	1768.6	1740.3	1723.9	1699.5
	3	2453.0	2358.4	2318.2	2271.2
2	1	733.0	729.1	728.1	728.6
	2	1490.4	1465.7	1457.8	1453.9
	3	2249.6	2168.3	2141.8	2122.6
3	1	556.5	553.0	552.7	553.0
	2	1182.8	1160.7	1156.0	1156.2
	3	1913.9	1840.9	1822.5	1816.4
4	1	519.6	516.3	516.4	516.8
	2	1007.6	987.8	984.8	985.5
	3	1651.4	1586.3	1572.8	1571.1

만면 높은 축방향 모드수에 대해 좀더 정확한 결과를 얻기 위해 2차원 유한요소 해석 모델의 mesh 크기를 증가해야 함을 알 수 있다. 시간낭비를 피하기 위해 유체영역을 480개로 나눈 Case 3을 유한요소 해석의 최종값으로 정하였다. 높은 축방향 모드에 대해 정확하게 수렴되는 값을 얻지 못했더라도 표 1에서 보는 바와 같이 유한요소해석으로 얻은 고유진동수의 수렴성향은 정확한 해가 어디에 존재하는지를 짐작할 수 있게 한다.

유체가 채워지지 않은 원통형 셀의 경우와 마찬가지로 유체로 채워진 원통형 셀의 경우도 특정한 기하학적 범위에서는 원주방향 모드가 증가할 때 고유진동수가 감소하는 경우가 발생한다. 이는 원통형 셀의 높이  $L$  및 반경  $R$ 과 매우 밀접한 관련을 갖는다.  $L \ll R$ 인 경우는 마치 원통형 셀이 원형 링(ring)과 같이 거동하게 되며,  $L \gg R$ 인 경우는 마치 원형 봉처럼 거동하게 된다. 그런데 예를 들면 높이가 반경에 비해서 상대적으로 작은 원통형의 경우, 축방향 모드수가 일정할 경우(예를 들면  $m'=3$ )에 어느 정도까지 원주방향 모드가 증가하면 원주방향의 모드중가가 셀의 축방향의 굽힘강성을 감소시키는 역할을 하게 된다. 따라서 원주방향 모드 증가는 고유진동수의 감소를 야기시킨다. 그러나 계속 하여 원주방향의 모드가 증가하면 오히려 접선방향의 굽힘강성이 증가하여 다시 고유진동수가 증가하게 된다. 축방향으로 생기는 굽힘강성과 원주반향으로 생기는 굽힘강성이 서로 조합되어 원통형 셀의 강성으로 나타나며, 결국 고유진동수에 영향을 주게되므로 고유진동수가 어느 원주방향의 모드에 최소가 될지는 원통형 셀의 기하학적 형상에 의존하게 된다.

### 3.2 이론의 타당성

표 1의 Case 3에서 이론해와 유한요소 해석결과의 최대편차는, 원주방향의 모드수  $n=1$ 이고 축방향 모드수  $m'=3$ 일 경우, 2.02%이다. 표 1의 경향으로 판단할 때, 축방향 모드수가 큰 경우에 더 많이 분할된 요소들을 사용함으로써 이론값과 유한요소 해석 결과에서 나타나는 차이를 줄일 수 있음을 알 수 있다. 표 1의 비교를 통해서 2장에서 전개한 이론이 타당함을 알 수 있다.

### 3.3 무차원 고유진동수

그림 2에는 정규화된 무차원 고유진동수의 변

화가 각각의 진동 모드에 대하여 나타나 있다. 여기서 정규화된 무차원 고유진동수는 식 (31)에서 정의된 값을 말한다. 예제에서 나타난 무차원 고유진동수가 원주방향의 모드수와 축방향 모드수가 증가할수록 점차 증가함을 알 수 있다. 이는 모드수가 증가할수록 원통형 탱크는 더 많은 진동 절점을 갖게 된다. 따라서 진동 중에 유체의 진동방향이 절점을 중심으로 나뉘게 되기 때문에 유체의 이동거리는 모드수가 증가할수록 짧아지고 결과적으로 부가질량이 상대적으로 감소하여 고유진동수의 증가로 나타나게 된다. 이 내용은 이미 참고문헌<sup>14)</sup>에서 설명된 바가 있다.

### 3.4 압축성 효과

그림 3~5는 축방향 모드수  $m'$ 에 대하여 유체 내 음속에 따른 연성된 무차원 고유진동수의 변화를 나타내었다. 고유진동수에 대한 유체의 압축성이 고유진동수에 미치는 영향은  $n$ 이 증가할수록 감소하고 있음을 확인할 수 있다. 유체의 압축성이 증가할 때, 진동수는 축방향 모드수와 상관없이 원주방향 모드가  $n=1$ 일 때 상당한 양이 감소하고 있다. 이 경우는 부가질량의 효과와 압축성 유체의 강성 감소의 효과가 결합하여 나타나기 때문이다. 비압축성 유체의 경우, 탱크의 변위로 생기는 모든 일은 유체의 운동에너지로 변환된다. 그러나 압축성 유체의 경우는 유체에서 음속의 탄성체적 계수의 감소로 인해 유체의

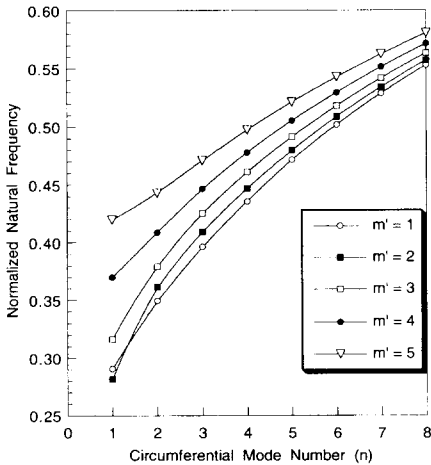


그림 2 정규화된 무차원 고유진동수

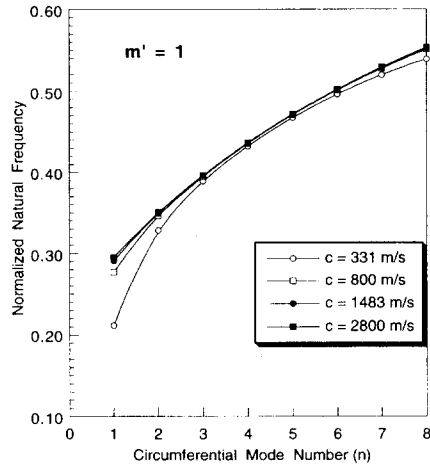


그림 3  $m' = 1$ 인 경우 유체내 음속변화에 따른 정규화된 무차원 고유진동수의 변화

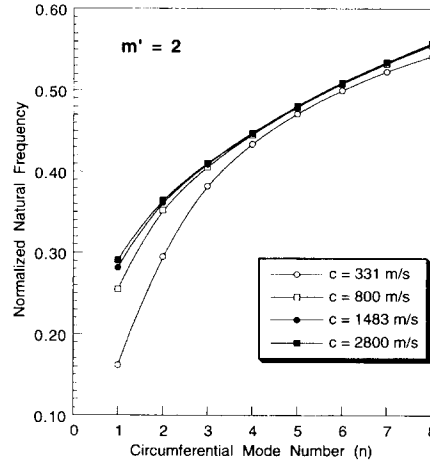


그림 4  $m' = 2$ 인 경우 유체내 음속변화에 따른 정규화된 무차원 고유진동수의 변화

강성 감소로 나타난다. 감소된 유체 강성의 효과는 특히 낮은 원주방향모드에 대해 부가질량의 영향을 가속화시킨다. 따라서 이는 저차 원주방향 모드수에 대한 고유진동수의 감소로 나타난다. 그러나, 고차 원주방향 모드수에서는 유체의 짧은 이동거리가 부가질량 효과를 약화시키게 된다. 결국 원주방향의 모드에 대한 압축성 유체의 영향은 탱크의 고유진동수에서 유체의 압축성 효과를 감소시키는 경향으로 나타나게 된다.

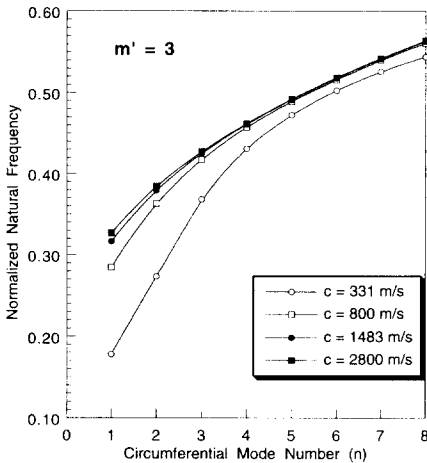


그림 5  $m' = 3$ 인 경우 유체내 음속변화에 따른 정규화된 무차원 고유진동수의 변화

### 3. 5 유체 밀도의 효과

그림 6~8은 축방향 모드수  $m'$ 에 대하여 유체 밀도에 따른 연성된 무차원 고유진동수의 변화를 나타내고 있다. 고유진동수에 대한 유체의 밀도가 고유진동수에 미치는 영향은 축방향 모드수나 원주방향의 모드수에 관계없이 광범위하게 영향을 주고 있음을 확인할 수 있다. 즉 모든 고유진동수는  $1/\sqrt{\rho_0}$ 에 비례하여 변하고 있음을 확인할 수 있다. 즉 모든 고유진동수는 모드수에 관계없이 유체의 밀도에 직접적으로 영향을 받게 된다.

### 4. 결 론

압축성 유체로 채워진 원통형 탱크의 고유진동수를 평가하기 위한 해석적 방법이 유한 Fourier 변환에 기초한 급수 전개 방법으로 개발되었다. 이 해석적 방법의 타당성을 입증하기 위해 하나의 예제를 통해서 양단이 고정되고 물로 채워진 원통형 탱크의 고유진동수를 해석적 방법과 유한 요소 방법으로 구하였다. 이 결과를 비교해 볼 때, 서로 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있었고, 해석적 방법의 타당성이 확보되었다. 한편, 연성된 고유진동수에 대한 유체의 압축성의 효과는 대체로 낮은 원주방향 진동모드에서 나타났으나 높은 원주방향 진동 모드에는 영향을 크게 주지는 못하였다. 그러나 유체의 밀도 변화는 모든

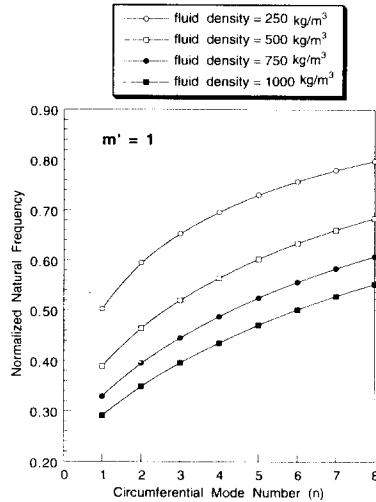


그림 6  $m' = 1$ 인 경우 유체밀도변화에 따른 정규화된 무차원 고유진동수의 변화

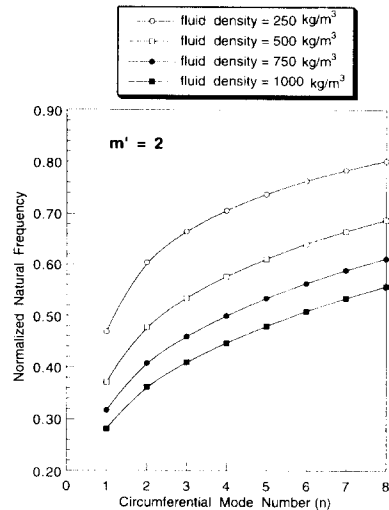


그림 7  $m' = 2$ 인 경우 유체밀도변화에 따른 정규화된 무차원 고유진동수의 변화

원주방향 모드 및 축방향 모드에 전체적으로 영향을 주고 있음을 확인할 수 있었다.

### 참 고 문 헌

1. W.E.Stillman, "Free vibration of cylinders containing liquid", *Journal of Sound and*

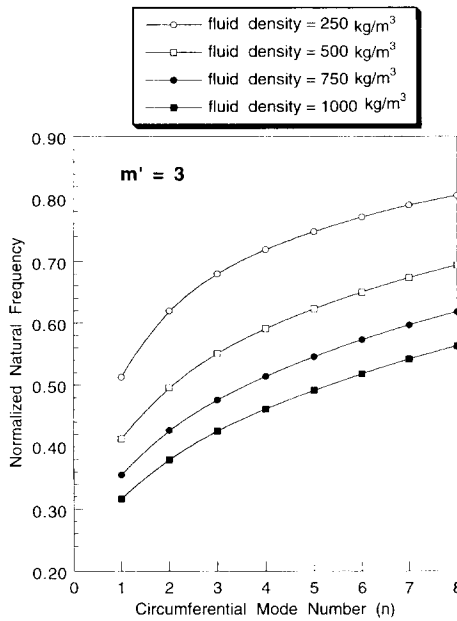


그림 8  $m' = 3$ 인 경우 유체내 음속변화에 따른 정규화된 무차원 고유진동수의 변화

*Vibration*, 30(1973), pp. 509-524.

2. N. Yamaki, J. Tani and T. Yamaï, "Free vibration of a clamped-clamped circular cylindrical shell partially filled with liquid", *Journal of Sound and Vibration*, 94(1984), pp. 531-550.
3. P. B. Gonçsalves and N. R. S. S. Ramos, "Free vibration analysis of cylindrical tanks partially filled with liquid", *Journal of Sound and Vibration*, 195(1996), pp. 429-444.
4. A. A. Lakis and M. Sinno, "Free vibration of axisymmetric and beam-like cylindrical shells partially filled with liquid", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 33(1992), pp. 235-268
5. T. Milami and J. Yoshimura, "The collocation method for analyzing free vibration of shells of revolution with either internal or external fluids", *Computers and Structures*, 44(1992), pp. 343-351.

6. R. P. S. Han and J. D. Liu, "Free vibration analysis of a fluid-loaded variable thickness cylindrical tank", *Journal of Sound and Vibration*, 176(1994), pp. 235-253.
7. K. H. Jeong and S. C. Lee, "Fourier series expansion method for free vibration analysis of either a partially liquid-filled or a partially liquid-surrounded circular cylindrical shell", *Computers and Structures*, 58(1996), pp. 937-946
8. R. K. Gupta and G. L. Hutchinson, "Free vibration analysis of liquid storage tanks", *Journal of Sound and Vibration*, 122(1988), pp. 491-506.
9. F. Zhu, "Rayleigh quotients for coupled free vibration", *Journal of Sound and Vibration*, 171(1994), pp. 641-649.
10. Y. Y. Huang, "Orthogonality of wet modes in coupled vibrations of cylindrical shells containing liquids", *Journal of Sound and Vibration*, 145(199), pp. 51-60.
11. T. Mazuch, J. Horacek, J. Trnka and J. Vesely, "Natural modes and frequencies of a thin clamped-free steel cylindrical storage tank partially filled with water : FEM and measurement", *Journal of Sound and Vibration*, 193(1996), pp. 669-690.
12. K. H. Jeong and K. J. Kim, "Free vibration of a circular cylindrical shell filled with bounded compressible fluid", will be published in *Journal of Sound and Vibration*.
13. I. N. Sengdon, "Fourier Transforms", New York, McGraw-Hill Book Company, Inc(1951).
14. K. H. Jeong and S. C. Lee, "Hydroelastic vibration of a liquid-filled circular cylindrical shell", will be published in the journal, *Computers and Structures*.

(접수일자 : 1997. 9. 20)