

# 이산성 연속형 최적성 기준을 이용한 PPC 구조의 최적설계프로그램 개발

## Development of Optimum Design Program for PPC Structures using DCOC

한 상 훈\*  
Han, Sang-Hoon

조 홍 동\*\*  
Cho, Hong-Dong

이 상 근\*\*  
Lee, Sang-Keun

### 요 지

본 논문에서는 이산성 연속형 최적성기준방법을 이용하여 다지간 부분프리스트레스트 콘크리트보의 최적설계 알고리즘을 유도하였고, 최적설계프로그램을 개발하였다. 목적함수로서 건설경비는 콘크리트 경비, 긴장재 경비, 철근 경비, 그리고 거푸집 경비를 포함하였으며 이를 최소화하였다. 설계제약조건으로는 시방서상의 최대처짐제약, 휨 및 전단강도제약, 연성제약 그리고 설계변수에 대한 상·하한계제약을 고려하였다. Kuhn-Tucker 필요조건을 이용하여 최적성기준을 설계변수의 향으로 명시적으로 유도하였으며, 이때 설계변수로는 보의 유효깊이, 긴장재의 편심거리 그리고 철근비를 취하였다. 긴장재의 형상은 포물선함수로 고려하였으며, 구조물 자중의 영향은 긴장력에 의한 이차효과와 마찬가지로 실제시스템의 평형방정식에서 고려하였다. 설계변수들의 개선을 위한 반복과정과 컴퓨터프로그램을 개발하였으며, 수치예를 들어 개발된 기법의 응용성 그리고 효율성을 보였다.

### Abstract

This paper describes the application of discretized continuum-type optimality criteria (DCOC) and the development of optimum design program for the multispan partially prestressed concrete beams. The cost of construction as objective function which includes the costs of concrete, prestressing steel, non-prestressing steel and formwork is minimized. The design constraints include limits on the maximum deflection, flexural and shear strengths, in addition to ductility requirements, and upper and lower bounds on design variables as stipulated by the design Code.

Based on Kuhn-Tucker necessary conditions, the optimality criteria are explicitly derived in terms of the design variables-effective depth, eccentricity of prestressing steel and non-prestressing steel ratio. The prestressing profile is prescribed by parabolic functions. The self-weight of the structure is included in the equilibrium equation of the real system, as is the secondary effect resulting from the prestressing force. An iterative procedure and computer program for updating the design variables are developed. Two numerical examples of multispan PPC beams with rectangular cross-section are solved to show the applicability and efficiency of the DCOC-based technique.

*Keywords* : Minimum cost design, discretized continuum-type optimality criteria, partially prestressed multispan beam, parabolic tendon profile

\* 성희원·충북대학교 토목공학과교수, 공학박사  
\*\* 충북대학교 토목공학과 박사과정

• 이 논문에 대한 토론을 1998년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1998년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

## 1. 서 론

구조최적화는 크게 수학적계획방법들을 이용한 수치적기법과 최적성기준에 근거한 해석적기법의 두 갈래로 발달되어왔다. 일반적으로 수치적 방법들은 설계변수와 제약조건의 수가 제한적일 경우 해석적 방법들보다 좀 더 효율적이라고 알려져 있다. 그러나 설계변수의 수가 증가하게 되면 최적해에 도달하기 위해 재설계과정에 요구되는 시간 그리고 구조 재해석의 수가 증가하게 되어 수치적 구조최적화방법들의 능력이 제한을 받게 된다. 일반적으로 설계변수와 제약조건의 수가 많게 되면 최적성기준에 근거를 둔 해석적 방법들이 보다 효율성을 갖게된다. 이러한 점은 응력제약들과 하나의 변위제약을 갖는 문제들에 연속형 최적성기준(Continuum-type Optimality Criteria, COC)방법과 유한요소해석을 연결하여 반복알고리즘을 개발한 Rozvany와 Zhou<sup>1)</sup>, 그리고 이를 철근 콘크리트 보의 최소비용설계에 응용한 Adamu와 그의 공동연구자들<sup>2)</sup>에 의해 입증되었다. 그러나 COC에 근거한 방법들은 이산성향을 지닌 복잡한 구조물의 가상수반(adjoint) 시스템의 해석에서 기변형율 효과(prestrain effect)를 다루는데 어려움이 있기 때문에 실제 적용성이 결여되었고, 간단한 구조물에만 제한되어 적용되었다. 이러한 제한적 요소를 제거하기 위하여 이산성 연속형 최적성기준(Discretized Continuum-type Optimality Criteria, DCOC)에 근거한 방법들이 Zhou와 Rozvany<sup>3,4)</sup>에 의해 개발되었다. 그들은 이산성 구조시스템에 대한 일반적인 최적성기준을 유연도정식화에 의한 구조해석과 Khun-Tucker 최적성 조건을 이용하여 유도하였다. 그러나 실제 수치과정에서 구조해석은 보다 효율적인 강성도법을 이용하여 수행되고 있다. Adamu와 Karihaloo<sup>5,6)</sup>는 강성도법에 의한 구조해석과 Khun-Tucker 최적성조건을 이용하여 철근콘크리트보 시스템을 위한 최적화 알고리즘을 개발하였으며 이 방법의 효율성과 적용성을 입증하였다.

본 연구에서는 단지간 PPC구조의 적용가능

연구<sup>7)</sup>에 이어 이산성 연속형 최적성기준방법을 직사각형단면을 갖는 다지간 부정정 부분 프리스트레스트 콘크리트(Partially Prestressed Concrete, PPC)보에 확장·적용하였다. 최적성기준과 수치알고리즘이 다지간 PPC보의 최소경비 설계문제를 풀기 위해 유도되었다. 여기서 사용된 설계변수로는 보의 유효깊이(단, 지간에 따라 변화를 고려하면서 동일 시간내에선 일정), 매개변수를 포함하여 포물선 형상으로 가정한 긴장재의 최대편심거리, 그리고 시간내에서 요소에 따라 자유롭게 변하는 것을 허용한 철근비로 취하였다.

목적함수는 콘크리트 경비, 긴장재 경비, 그리고 철근과 거푸집 경비를 포함하는 건설비용이며, 제약조건으로는 주어진 시간에서의 최대허용 처짐 그리고, 콘크리트 표준 시방서<sup>8)</sup>에 의한 휨과 전단강도제약 및 연성제약을 고려하였다. 한편, 자중과 긴장력에 의한 이차 효과들의 영향은 실제 시스템의 해석에서 고려하였다. 다지간 PPC보에 대한 최적성기준의 유도에 있어서 처짐제약은 항상 활성제약인 것으로 가정하였다. 또한 설계변수들의 개선을 위한 반복과정을 유도하였고, 이 반복과정과 여러 수치기법으로 구성된 최적설계프로그램을 개발하였다.

## 2 최적설계문제

### 2.1 설계변수

설계변수는 각 지간에서의 보 단면의 유효깊이  $x_1^m$ , 긴장재의 최대 편심거리  $x_3$ , 그리고 보 요소별 철근비  $x_5^m$ 으로 취하였다. 단면의 폭  $x_1$ , 긴장재의 단면적  $A_p$ , 그리고 매개변수  $\beta$ (그림 1 참조)는 상수값이며, 이들은 프로그램의 입력자료로 주어지고, 최소 경비에 상응하는  $\beta$ 값을 구하였다. 각 지간에서의 긴장재비(tendon steel ratio)  $x_4^m$ 은  $A_p = x_1 x_2^m x_4^m$ 의 관계식으로부터 계산하였다. 상첨자  $em$ 은 지간  $m$ 의 요소  $e$ 에 관한 설계변수임을 가리키고, 상첨자  $m$ 은 지간  $m$ 에서 일정하게 유지되는 설계변수를 나타낸다.

### 2.2 긴장재 형상

등분포하중 재하시의 긴장재 형상은 포물선 형상으로 가정하였다. 지지조건에 따라 형상은 그림 1(a)-(c)와 같은 세 가지 유형들로 구성되며 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$x_3^m = \begin{cases} x_{3s} \left[ 6 \left( \frac{\bar{s}}{L^m} \right) - 5 \frac{\bar{s}}{L^m} \right] & \text{type A} \\ x_{3s} \left[ 4(1+\beta) \left( \frac{\bar{s}}{L^m} \right) - 4(1+\beta) \frac{\bar{s}}{L^m} + 1 \right] & \text{type B} \\ x_{3s} \left[ 6 \left( \frac{\bar{s}}{L^m} \right) - 7 \frac{\bar{s}}{L^m} + 1 \right] & \text{type C} \end{cases} \quad (1)$$

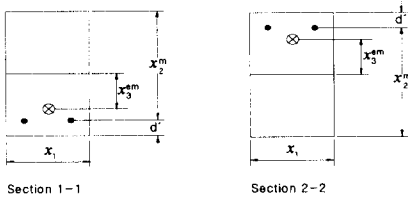
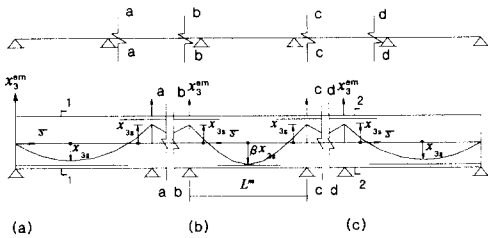


그림 1 다지간 PPC보 : (a) Type A-좌측단부에 단순지지된 외측지간, (b) Type B-내측지간, (c) Type C-우측단부에 단순지지된 외측지간 [ $\bar{s}$ 와  $x_3^m$ 의 원점은 각지간의 좌측단부임]

### 2.3 주요 단면력의 결정

1) 휨강도 요구조건을 위한 최대설계모멘트 요소의 좌측단으로 부터 최대모멘트 위치까지의 거리를  $s_m^m$ 으로 한다. 각 지간은  $N_e$ 개의 요소로 나누어지고, 계산상의 어려움을 피하기 위하여 최대모멘트는  $s_m^m=0$  혹은  $L^m$ 에서의 절점력 중에서 최대치를 택하였다. 여기서, 하첨자  $m$ 은 지간수를 나타낸다.

외적설계하중으로 인한 최대모멘트는 다음과 같고,

$$M_{dl}^{em} = M_{Al}^{em} - M_{Al}^{em} s_m^m + 0.5\omega_d^m (s_m^m)^2 \quad (2)$$

최대모멘트 발생 단면에서 긴장력에 의한 이차모멘트는 다음과 같다.

$$M_{dzm}^{em} = M_{AE}^{em} - V_{AE}^{em} s_m^m - 0.5\omega_p^m (s_m^m)^2 - M_{PE}^{em} \quad (3)$$

여기서,  $V_{AE}^{em}$ ,  $M_{AE}^{em}$ 은 외적 등분포 설계하중  $\omega_d^m$ 에 의한 요소 좌측단에서의 절점력이고,  $V_{AE}^{em}$ ,  $M_{AE}^{em}$ 은 긴장력에 의해 발생된 상향 등가분포하중  $\omega_p^m$ 에 의한 같은 위치에서의 절점력이다.

$\omega_p^m$ 은 다음과 같다.

$$\omega_p^m = \frac{8\sigma_{pc} A_p \bar{x}_{3a}}{(L^m)^2} \quad (4)$$

여기서

$$\bar{x}_{3a} = \begin{cases} 1.5x_{3s}, & \text{if the tendon profile is type A or C} \\ (1+\beta)x_{3s}, & \text{if the tendon profile is type B.} \end{cases} \quad (5)$$

식 (4)에서  $\sigma_{pc} = k\sigma_{pu}$ 이고,  $k$ 는 0.6의 근사값을 사용하였으며,  $\sigma_{pu}$ 는 긴장재의 극한강도이다.  $M_{PE}^{em} = Pe_{xm}$ 은 긴장력에 의한 모멘트이고,  $e_{xm}$ 은 최대모멘트 위치에서 긴장재의 편심거리이다. 요소에서의 편심거리는 식 (1)의  $\bar{s}$  대신에 요소좌표 즉, 좌측단에서의  $s=0$ 과  $[(e-1)L^m + s]$ 로 대체하므로써 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$e_{xm} = \begin{cases} x_{3s} \left\{ \frac{6}{(L^m)^2} [(e-1)L^m + s_m^m]^2 \right. \\ \left. - \frac{5}{L^m} [(e-1)L^m + s_m^m] \right\} \text{sgn}(e_\lambda), & \text{type A} \\ x_{3s} \left\{ \frac{4(1+\beta)}{(L^m)^2} [(e-1)L^m + s_m^m]^2 \right. \\ \left. - \frac{4(1+\beta)}{L^m} [(e-1)L^m + s_m^m] + 1 \right\} \text{sgn}(e_\lambda), & \text{type B} \\ x_{3s} \left\{ \frac{6}{(L^m)^2} [(e-1)L^m + s_m^m]^2 \right. \\ \left. - \frac{7}{L^m} [(e-1)L^m + s_m^m] \right\} \text{sgn}(e_\lambda), & \text{type C} \end{cases} \quad (6)$$

여기서,

$$\text{sgn}(e_A) = \begin{cases} -1, & \text{if } s_m^{cm} = 0 \\ 1, & \text{if } s_m^{cm} = L^{cm} \end{cases}$$

결국, 설계를 위한 최대힘모멘트는 다음과 같다.

$$M_{max}^{cm} = M_{AI}^{cm} + M_{p_{cm}}^{cm} \quad (7)$$

2) 복부과괴에 대한 최대설계전단력

요소 좌측단으로부터 거리  $s_c^{cm}$  떨어진 곳에서 긴장효과에 의한 전단력(이차전단력)은 다음과 같다.

$$V_{svp}^{cm} = V_{AE}^{cm} + \omega_p^m s_c^{cm} - V_{PE}^{cm} \quad (8)$$

여기서  $V_{PE}^{cm}$ 은 긴장력에 의해 발생한 모멘트 ( $Px_s^{cm}$ )로 인한 전단력이다. 그러나 이 전단력은 프리스트레세에 의해 발생한 초과정적반력(hyperstatic reaction)에 의한 전단력과 같다.

$$V_s^{cm} = \frac{M_l^m + M_r^m}{L^m} \quad (9)$$

식 (9)에서

$$M_l^m = M_{AE}^{cm} + Pe_l, \quad M_r^m = M_{BE}^{cm} - Pe_r$$

여기서,  $M_{AE}^{cm}$  그리고  $M_{BE}^{cm}$ 은 각각 임의의 지간 내에서 첫 번째 요소의 좌측단 그리고 마지막 요소의 우측단에서의 절점 힘모멘트이다.  $P$ 는 긴장력이고,  $e_l$ 과  $e_r$ 은 지간  $m$ 의 좌측과 우측단에서의 편심거리이다.

식 (8)과 (9)의 우변을 같다고 놓으면  $V_{svp}^{cm}$ 에 대한 식을 얻을 수 있고, 따라서 최대전단력은 다음 식으로 표현된다.

$$V_{max}^{cm} = V_{AI}^{cm} - \omega_l^m s_c^{cm} + \frac{M_l^m + M_r^m}{L^m} \quad (10)$$

이상과 같은 과정에서 실제 시스템을 두 번 해석할 필요성이 있다. 한 번은 외적 설계하중하에 서이고 두 번째는 등가하중시스템에 의한 긴장효과에 대해서이다. 이차힘모멘트를 얻기 위해 후

자에 의한 힘모멘트는 1차힘모멘트에 겹쳐진다. 후자는 초과정적반력 (9)를 얻기 위해 사용되며, 다음에 절점 전단력을 얻을 수 있게 된다. 이러한 방법에서, 각 요소의 절점에서의 힘들은 겹침의 원리에 의해 구해진다.

2.4 목적함수

$N_m$ 개의 지간을 갖고 각 지간은  $N_c$ 개의 요소로 나누어진 다지간 보에 대한 목적함수는 건설경비로서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi = \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{c=1}^{N_c} \phi^{cm}(x_2^m, \bar{x}_{3a}, x_5^{cm}) \quad (11)$$

여기서

$$\begin{aligned} \phi^{cm} &= \left[ x_2^m m_1 + x_2^m x_5^{cm} m_2 + m_3 \left( \frac{1}{2} + \frac{\bar{x}_{3a}}{L^m} \right) + \bar{c}_1 \right] L^{cm} \\ m_1 &= (x_1 + 2c_k) c_s, \\ m_2 &= x_1 (c_s - 1.0) c_s, \\ m_3 &= 2A_p (c_k - 1.0) c_s, \\ \bar{c}_1 &= [x_1 d' + (x_1 + 2d') c_k] c_c \end{aligned} \quad (12)$$

그리고,  $\bar{x}_{3a}$ 는 식 (5)에 주어졌다.

2.5 설계제약조건

1) 처짐제약

PPC보의 처짐계산을 위한 휨강성도는  $EI^m = I_1(x_2^m)^3$   $I_1=0.045E, x_1$ 의 간편식<sup>5)</sup>을 사용하였으며, 처짐제약은 다음과 같이 표현된다.

$$D_{max} - \Delta_{il} \leq 0 \quad (13)$$

여기서

$$D_{max} = \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{c=1}^{N_c} \frac{(Q_1^{cm} + Q_2^{cm})}{I_1(x_2^m)^3} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} Q_1^{cm} &= \int_{l^{cm}} M_1 \bar{M} dx \\ &= \frac{M_{AI}^{cm} L^{cm}}{2} [2\bar{M}_A^{cm} - \bar{V}_A^{cm} L^{cm}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{V_{AE}^{cm}(L^{cm})^2}{6} [3\bar{M}_A^{cm} - 2\bar{V}_A^{cm} L^{cm}] \\
 & + \frac{\omega_b^m(L^{cm})^3}{24} [4\bar{M}_A^{cm} - 3\bar{V}_A^{cm} L^{cm}] \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$Q_2^m = Q_{21}^{cm} - Q_{22}^{cm} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 Q_{21}^{cm} &= \frac{M_{AE}^{cm} L^{cm}}{2} [2\bar{M}_A^{cm} - \bar{V}_A^{cm} L^{cm}] \\
 & - \frac{V_{AE}^{cm}(L^{cm})^2}{6} [3\bar{M}_A^{cm} - 2\bar{V}_A^{cm} L^{cm}] \\
 & - \frac{\omega_b^m(L^{cm})^3}{24} [4\bar{M}_A^{cm} - 3\bar{V}_A^{cm} L^{cm}] \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$Q_{22}^{cm} = \int_{L^{cm}} M_{pe}^{cm} \bar{M} dx = \int_{L^{cm}} M_{pe}^{cm} (\bar{M}_A^{cm} - \bar{V}_A^{cm} x) dx \quad (18)$$

여기서  $M_{pe}^{cm} = Px_3^{cm}$ 이며 긴장재 형상의 유형에 의한다. 요소좌표계를 이용하고 식을 정리하면 다음과 같다.

(a) 긴장재 형상이 A유형인 경우

$$\begin{aligned}
 Q_{22}^{cm} &= x_{3s} \frac{P\bar{M}_A^{cm}(L^{cm})^2}{L^m} \\
 & \left\{ \frac{2L^{cm}}{L^m} [3(e-1)^2 + 3e - 2] - \frac{5}{2}[2e-1] \right\} \\
 & - x_{3s} \frac{P\bar{V}_A^{cm}(L^{cm})^3}{L^m} \\
 & \left\{ \frac{L^{cm}}{2L^m} [6(e-1)^2 + 8e - 5] - \frac{5}{6}[3e-1] \right\} \quad (19)
 \end{aligned}$$

(b) 긴장재 형상이 B유형인 경우

$$\begin{aligned}
 Q_{22}^{cm} &= x_{3s} \frac{P\bar{M}_A^{cm}(L^{cm})^2}{L^m} \\
 & \left\{ \frac{4(1+\beta)L^{cm}}{3L^m} [3(e-1)^2 + 3e - 2] \right. \\
 & \left. - 2(1+\beta)[2e-1] + \frac{L^m}{L^{cm}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - x_{3s} \frac{P\bar{V}_A^{cm}(L^{cm})^3}{L^m} \\
 & \left\{ \frac{(1+\beta)L^{cm}}{3L^m} [6(e-1)^2 + 8e - 5] \right. \\
 & \left. - \frac{2(1+\beta)}{3}[3e-1] + \frac{L^m}{2L^{cm}} \right\} \quad (20)
 \end{aligned}$$

(c) 긴장재 형상이 C유형인 경우

$$\begin{aligned}
 Q_{22}^{cm} &= x_{3s} \frac{P\bar{M}_A^{cm}(L^{cm})^2}{L^m} \\
 & \left\{ \frac{2L^{cm}}{L^m} [3(e-1)^2 + 3e - 2] - \frac{7}{2}[2e-1] + \frac{L^m}{L^{cm}} \right\} \\
 & - x_{3s} \frac{P\bar{V}_A^{cm}(L^{cm})^3}{L^m} \\
 & \left\{ \frac{L^{cm}}{2L^m} [6(e-1)^2 + 8e - 5] - \frac{7}{6}[3e-1] + \frac{L^m}{2L^{cm}} \right\} \quad (21)
 \end{aligned}$$

2) 휨강도 제약

본 연구에서는 극한휨강도만을 고려하였으며 휨강도 제약은 다음과 같이 나타낼 수 있다<sup>3)</sup>.

$$g_i^{cm} = \frac{|M_{max}^{cm}|}{M_{ur}^{cm}} - 1.0 \leq 0 \quad (22)$$

여기서

$$M_{ur}^{cm} = \phi_m \left[ \sigma_{ps} A_p \left( d_p - \frac{a}{2} \right) + \sigma_s A_s \left( d - \frac{a}{2} \right) \right] \quad (23)$$

이고

$$a = \frac{A_p \sigma_{ps} + A_s \sigma_s}{0.85 \sigma_{ck} x_1}$$

$$\sigma_{ps} = \sigma_{pu} \left[ 1 - \frac{\gamma_p}{k_1} \left( p_p \frac{\sigma_{pu}}{\sigma_{ck}} + \frac{d}{d_p} \cdot q \right) \right],$$

$$A_s = x_1 x_2^m x_5^{cm}, \quad p_p = \frac{A_p}{x_1 d_p}, \quad q = p \frac{\sigma_s}{\sigma_{ck}},$$

$$p = \frac{A}{x_1 d}, \quad d_p = \frac{x_2^m + d'}{2} + x_3^{cm}, \quad d = x_2^m$$

$x_3^{em}$ 은 식 (1)에 의해 주어진다.  $\gamma_p$ 는 편의상 0.28로 고정하였으며,  $k_1=0.85-0.05(\sigma_{ck}-280)/70$ 로 구해지고,  $(0.65 \leq k_1 \leq 0.85)$  범위를 갖는다.

3) 전단강도제약

복부파괴에 대한 전단강도 제약<sup>8)</sup>만을 고려하였으며, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g_s^{em} = \frac{|V_{max}^{em}|}{V_{ur}^{em}} - 1.0 \leq 0,$$

$$V_{ur}^{em} = 0.93\phi_v \sqrt{\sigma_{ck}} x_1 x_2^{em} \quad (24)$$

2.6 증대 라그랑지안 함수

하나의 변위제약과 여러개의 강도제약 및 한계 제약울 갖는 최적화 문제의 증대 라그랑지안 (augmented lagrangian) 함수는 다음과 같다<sup>5)</sup>.

Minimize  $\bar{\Phi} =$

$$\sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \phi^{em} + \mu \left[ \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \left( \frac{Q_1^{em} + Q_2^{em}}{l_2^{em}(x_2^{em})^3} \right) - \Delta_{at} + \eta \right]$$

$$+ \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{j=1}^J \lambda_j^{em} [g_j^{em} + \omega_j^{em}]$$

$$\{a^r\}^T [\{P\}] - [B]\{F_r\} + \{a^v\}^T [\{\bar{P}^e\}] - [B]\{\bar{F}_r\}$$

$$+ \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \beta_i^{em} (-x_i^{em} + x_{it}^{em} + \bar{t}_i^{em})$$

$$+ \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} \gamma_i^{em} (x_i^{em} - x_{iu}^{em} + \bar{t}_i^{em}) \quad (25)$$

여기서,  $\mu, \lambda_j^{em}, \{a^r\}, \{a^v\}, \beta_i^{em}$  그리고  $\gamma_i^{em}$  들은 라그랑즈 승수들이고  $\eta$ 는 일정한 슬랙(slack) 변수이며,  $\omega_j^{em}, \bar{t}_i^{em}, \bar{t}_i^{em}$ 들은 슬랙함수들이다. 식 (25)의 우변의 네 번째와 다섯번째 항은 각각 실제와 가상시스템의 평형방정식을 나타낸다.

3. 반복과정

3.1 최적성규준

1) 각 시간  $m(m=1, \dots, N_m)$ 에서  $x_2^m$ 에 대한  $\bar{\Phi}$ 의 변분

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \frac{\partial \phi^{em}}{\partial x_2^{em}} - \frac{3\mu(Q_1^{em} + Q_2^{em})}{l_1(x_2^{em})^4} - \lambda_1^{em} \frac{|M_{max}^{em}|}{(M_{ur}^{em})^2} \frac{\partial M_{ur}^{em}}{\partial x_2^{em}} \right.$$

$$\left. - \lambda_2^{em} \frac{|V_{max}^{em}|}{(V_{ur}^{em})^2} \frac{\partial V_{ur}^{em}}{\partial x_2^{em}} + \mu \bar{u}_c^{em} \right\} - (\beta_2^{em} - \gamma_2^{em}) = 0 \quad (26)$$

여기서

$$\bar{u}_c^{em} = -\frac{x_1 w_c L^{em}}{12} [6\bar{v}_A^{em} + \bar{\theta}_A^{em} L^{em} + 6\bar{v}_B^{em} - \bar{\theta}_B^{em} L^{em}]$$

이고,  $w_c$ 는 구조물의 단위중량이다.

2)  $x_{3s}$ 에 대한  $\bar{\Phi}$ 의 변분

$$\sum_{m=1}^{N_m} \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \frac{\partial \phi^{em}}{\partial x_{3s}} + \frac{\mu}{l_1(x_2^{em})^3} \frac{\partial Q_2^{em}}{\partial x_{3s}} \right.$$

$$\left. - \lambda_1^{em} \frac{|M_{max}^{em}|}{(M_{ur}^{em})^2} \frac{\partial M_{ur}^{em}}{\partial x_{3s}} - M_{ur}^{em} \frac{\partial |M_{max}^{em}|}{\partial x_{3s}} \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_{2n}^{em}}{V_{ur}^{em}} \frac{\partial |V_{max}^{em}|}{\partial x_{3s}} - (\beta_3^{em} - \gamma_3^{em}) \right\} = 0 \quad (27)$$

3) 시간  $m$ 의 각 요소에서  $x_5^{em}$ 에 대한  $\bar{\Phi}$ 의 변분

$$\left\{ \frac{\partial \phi^{em}}{\partial x_5^{em}} - \lambda_1^{em} \frac{|M_{max}^{em}|}{(M_{ur}^{em})^2} \frac{\partial M_{ur}^{em}}{\partial x_5^{em}} - (\beta_5^{em} - \gamma_5^{em}) \right\} = 0 \quad (28)$$

3.2 설계변수의 개선

시간별로 설계변수  $x_2^m$ 을 취하고, 각 시간에서의 세 설계변수  $x_2^m, x_3^{em}$  그리고  $x_5^{em}$ 의 배치를 조정하는 거동제약조건들의 가능한 조합은 다음과 같으며, 최적화과정 중 제어부분에 도입하여 프로그래밍 하였다.

- 1) 처짐과 휨강도제약의 조합 (D-F)
- 2) 처짐제약과  $x_3^{em}$ 의 하한치와의 조합 (D-L)
- 3) 휨강도와  $x_5^{em}$ 의 상한치와의 조합 (F-U)
- 4) 전단강도제약과 휨강도제약과의 조합 (V-F)
- 5) 깊이  $x_2^m$ 의 하한치와 다른 제약과의 조합

이상의 조합들에서 최적성 규준을 통해 각각의 관련 설계변수에 대한 식으로 나타낼 수 있다. 그리고, 연성을 보장하기 위한 인장강재비의 상한은 위의 3) 항에서 시방서<sup>5)</sup>의 다음식을 이용하여 고려하였다.

$$q_p + \frac{d}{d_p} q \leq 0.36k_1, \quad q_p = p_r \frac{\sigma_{ps}}{\sigma_{sk}} \quad (29)$$

### 3.3 라그랑주승수와 고정단력계산

주 지배 제약조건을 확인하기 위해 주 설계변수로 지간의 보깊이( $x_2^m$ )를 취하고 강도제약이 요소를 지배하는 경우에 대한 라그랑주승수들의 결정식, 그리고 기변형율로부터 발생한 고정단력들은 다음과 같은 활성제약조건들의 여러 조합으로부터 고려하였다.

- 1) 처짐과 휨강도 제약조건이 설계를 지배할 경우
- 2)  $x_3$ 와  $x_5^{sm}$ 의 상한치와 휨강도제약이 설계를 지배하는 경우
- 3) 전단강도 제약조건과 다른 제약조건과의 조합이 설계를 지배하는 경우

결국, 라그랑주승수  $\mu$ 는 처짐제약조건으로부터 계산된다. 처짐에 의해 지배되는 지간들을  $N_m^D$ 로, 나머지 지간들을  $N_m^I(N_m = N_m^D + N_m^I)$ 로 표시하여 식(30)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mu^{\frac{1}{3}} = \frac{\sum_{N_m^D} \sum_{e=1}^{N_c} \{ Q_1^{em} + Q_2^{em} \} / [l_i (\bar{x}_2^m)^{3/4}]}{\Delta_{at} - \sum_{N_m^I} \sum_{e=1}^{N_c} \{ Q_1^{em} + Q_2^{em} \} / [l_i (\bar{x}_2^m)^3]} \quad (30)$$

여기서

$$\bar{x}_2^m = \frac{3}{l_i} \left[ \sum_{e=1}^{N_c} (Q_1^{em} + Q_2^{em}) \right] / \sum_{e=1}^{N_c} \left[ \frac{\partial \phi^{em}}{\partial x_2^m} - \bar{\lambda}_1 + \mu \bar{u}_c \right] \quad (31)$$

$$\bar{\lambda}_1 = \left[ \frac{\partial \phi^{em}}{\partial x_5^{sm}} \frac{\partial M_{uv}^{sm}}{\partial x_2^m} \right] / \left[ \frac{\partial M_{uv}^{sm}}{\partial x_5^{sm}} \right] \quad (32)$$

단, 요소에 대한 휨강도 제약이 비활성일 때  $\bar{\lambda}_1 = 0$ 가 된다.

## 4. 수치예

수치예 적용시 각 지간은 4개의 요소로 나누었고 ( $N_e=4$ ), 등분포하중 하에서 주어진 지간의 최대 처짐은 그 지간의 중간지점에서 발생한다고 가정하였다. 그리고 다지간보에서 처짐제약조건 의 명시적 포함은 등가허용처짐 개념을 사용하여 수행하였다<sup>6)</sup>. 표 1은 수치예들에서 사용된 재료의 특성과 설계데이터이다.

표 1 재료특성 및 설계데이터

재료 특성치			상대경비*
콘크리트	철근	인장재	
$\sigma_{ck}=35\text{MPa}$	$\sigma_s=400\text{MPa}$	$\sigma_{pu}=1910\text{MPa}$ $\sigma_p/\sigma_m=0.91$	$C_{ic}=95.89$
$E_c=29800\text{MPa}$			$C_{ic}=42.78$
$w_c=24.5\text{KN/m}^3$			$C_{ic}=0.12$

\*  $C_c=53,210\text{원/m}^3$ ,  $C_s=5,102,500\text{원/m}^3$ ,  $C_{ic}=2,276,500\text{원/m}^3$ ,  $C_f=6,500\text{원/m}^2$ 로부터 산출된 상대경비임.

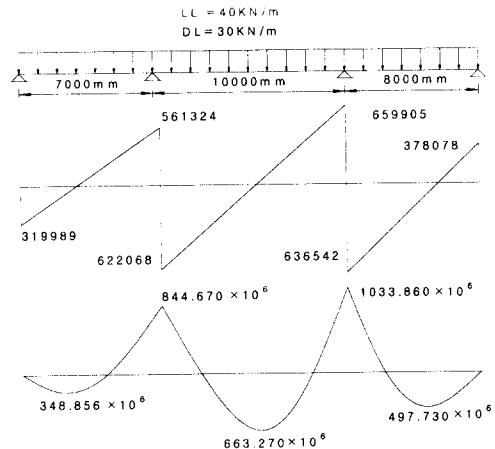


그림 2 3지간 PPC보의 최적단면에 대한 단면력 분포 : (a) 형상과 하중, (b) 전단력도(N), (c) 휨모멘트도(N-mm) [전단력과 휨모멘트는 프리스트레싱의 효과를 포함한다.]

### 1) 3지간 PPC보

그림 2(a)와 같이 지간의 길이가 각각 7m, 10m 그리고 8m인 3경간 보에 활하중 40kN/m와 사하중30kN/m이 작용하고 있으며, 자중도

고려하였다. 본 연구에서 부분프리스트레스트 철근콘크리트보의 최소경비설계는 시방서<sup>8)</sup>에 의한 휨 및 전단강도 요구조건을 만족하도록 하였으며, 사용하중에 의한 내측보 중간지점의 허용처짐비 ( $\frac{L}{J}$ )는 800과 같거나 크도록 하였다. 보의 폭과 긴장재의 면적은 각각 300mm와 250mm<sup>2</sup>으로 고정하였다. 그리고,  $d'$ 와  $d''$ 은 각각 60과 50mm로 하였다.

설계변수를 즉, 유효깊이  $x_{20}$ , 긴장재의 최대편심거리  $x_{30}$ , 인장철근비  $x_{50}$ 의 초기치를 변화시키면서 최적화를 수행하였다. 그리고, 각 경우에서 최소경비를 얻기 위하여 매개변수  $\beta$ 를 다양하게 변화시켰다. 위의 과정을 통하여 구한 결과를 표 1에 나타내었다. 여기서,  $x_{21}$ ,  $x_{22}$ ,  $x_{23}$ 는 좌측으로부터 각각 지간 1, 2, 3의 최적유효깊이를 나타낸 것이다.  $x_{35}$ 는 최적해에 대한 최대편심거리이다. 표 1에 명시한 초기경비와 최적경비는 상대경비이며, 실제경비는 콘크리트비용  $c_c$ 를 곱하여야 한다. 매개변수에 대한 결과로부터, 최소비용은  $\beta$ 가

1.360의 값일 때 얻어짐을 알 수 있다. 표 1에서  $\beta$ 값에 대한  $A_{s1}$ ,  $A_{s2}$ , ...,  $A_{s12}$ 는 보의 좌측단으로부터 각 요소별 인장철근 단면적을 나타낸다.

$\beta=1.360$ 일때의 최적단면에 대한 전단력도와 휨모멘트도를 그림 2(b)와 (c)에 나타내었다. 각각의 지간 1, 2, 3에서 자중을 포함한 외부설계하중은 125.91, 128.19 그리고 126.83 kN/m이고, 그림 2(b)와 (c)에서 보여준 전단력도와 휨모멘트도는 긴장력의 효과를 포함한 것이다. 최적해에 대한 보의 단면과 길이방향의 형상을 그림 3에 나타내었다. 여기서의 설계는 근본적으로 처짐과 휨강도제약(D-F), 휨강도와 인장철근비 하한치(F-L), 그리고 휨강도와 인장철근비 상한치(F-U), 또는 휨강도제약(F-F)만의 작용에 의하여 제어됨을 알 수 있다.

2) 4지간 PPC보

그림 4(a)에서 나타낸 것과 같이 자중과 작용하중을 포함한 4지간 보는 예제1과 같은 설계제약조건을 만족하는 부분프리스트레스트 콘크리

표 1 3지간 PPC보의 최소경비설계 결과

$\beta$	$x_{20}$ mm	$x_{30}$ mm	$x_{50}$	$x_{21}$ mm	$x_{22}$ mm	$x_{23}$ mm	$x_{35}$ mm	$\phi_{int}$	$\phi_{opt}$
1.000	1000	200	0.005	748	999	836	294	17.417	15.677
1.300	1000	200	0.005	747	963	832	294	17.420	15.483
1.350	1000	200	0.005	747	957	831	294	17.421	15.450
1.360	1000	200	0.005	747	956	831	293	17.421	15.448
1.370	1000	200	0.005	747	956	832	290	17.421	15.453
1.400	1000	200	0.005	750	954	833	284	17.421	15.462
1.000	1200	220	0.005	748	999	836	294	20.435	15.677
1.300	1200	220	0.005	747	963	832	294	20.438	15.482
1.350	1200	220	0.005	747	957	831	294	20.438	15.450
1.360	1200	220	0.005	748	956	831	293	20.439	15.448
1.370	1200	220	0.005	749	955	832	290	20.439	15.452
1.400	1200	220	0.005	748	954	833	284	20.440	15.463
1.000	1500	250	0.006	747	999	836	294	20.433	15.677
1.300	1500	250	0.006	747	963	832	294	20.436	15.483
1.350	1500	250	0.006	747	857	831	294	20.437	15.450
1.360	1500	250	0.006	747	956	831	293	20.437	15.488
1.370	1500	250	0.006	748	955	832	290	20.437	15.453
1.400	1500	250	0.006	749	954	833	284	20.437	15.463

$\beta_{opt}$	$A_{s1}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s2}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s3}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s4}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s5}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s6}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s7}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s8}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s9}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s10}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s11}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s12}$ mm <sup>2</sup>
1.360	535 F-L	535 F-L	535 F-L	2730 F-U	1854 D-F	1064 D-F	1064 D-F	2565 D-F	3179 F-U	846 F-F	925 F-F	925 F-F



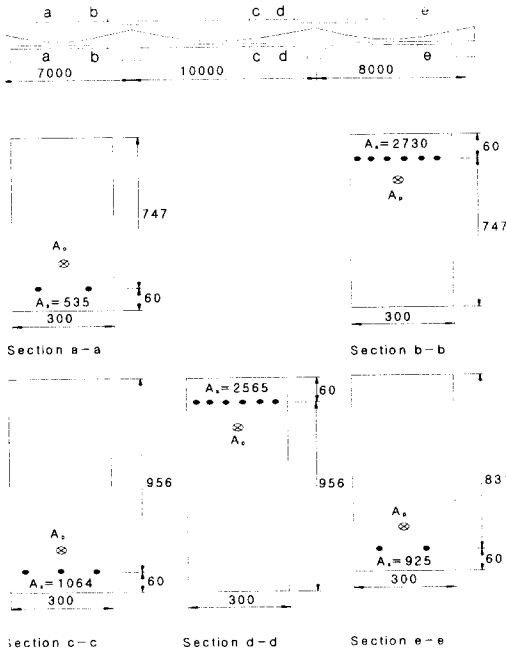


그림 3 3지간 PPC보의 최소경비설계에 대한 길이 방향 형상과 단면 [ $\beta=1.360$ , 모든 치수는 mm]

트보로 설계한 것이다. 지간이 크기 때문에, 단면의 폭은 500mm, 긴장재 단면적은  $1200\text{mm}^2$ 으로 고정하였고  $d'$ 와  $d''$ 는 각각 70과 50mm로 하였다.

최적해 ( $\beta=1.320$ )에 대한 전단력도와 휨모멘트도를 그림 4(b)와 (c)에 나타내었고, 이때 보의 단면과 길이방향 형상을 그림 5에 나타내었다. 각각의 지간 1, 2, 3 그리고 4에서 자중을 포함한 외부설계하중은 114.29, 121.46, 110.03 그리고 102.29kN/m이다. 이 설계는 처짐과 인장철근비 하한치 (D-L), 처짐과 휨강도제약 (D-F), 휨강도제약과 인장철근비 상한치 (F-U), 휨강도제약과 인장철근비 하한치 (F-L), 그리고 휨강도제약 (F-F)의 작용에 의해 제어됨을 알 수 있다.

### 5. 결 론

DCOC에 기초한 기법을 사용하여 구형단면을 갖는 다지간 부분 프리스트레스트콘크리트보에

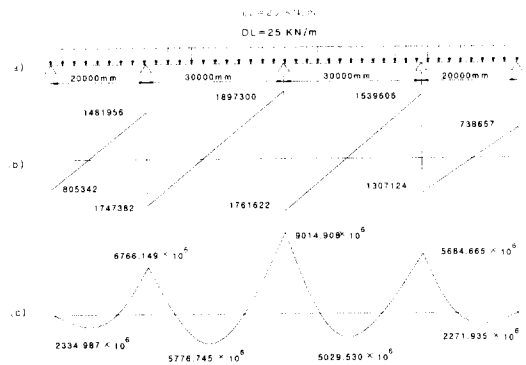


그림 4 4지간 PPC보의 최적단면에 대한 단면력 분포 : (a) 형상과 하중, (b) 전단력도 (N), (c) 휨모멘트도 (N-mm) [전단과 휨모멘트는 프리스트레싱의 효과를 포함한다.]

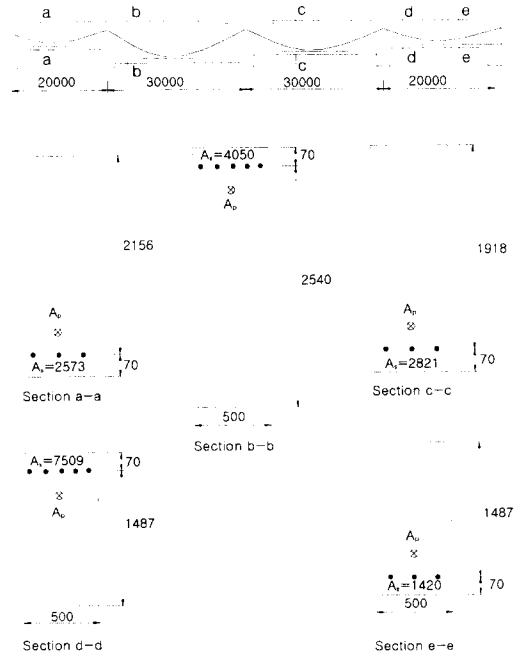


그림 5 4지간 PPC보의 최소경비설계에 대한 길이 방향 형상과 단면 [ $\beta=1.320$ , 모든 치수는 mm]

대한 최소 설계비용을 얻기 위한 최적설계 프로그램 개발하였다. 목적함수와 설계제약조건들은 설계변수들로 구성된 고차의 비선형함수이다.

표 2 4지간 PPC 보의 최소경비설계에 대한 매개변수 연구

$\beta$	$x_{20}$ mm	$x_{30}$ mm	$x_{50}$	$x_{21}$ mm	$x_{22}$ mm	$x_{23}$ mm	$x_{24}$ mm	$x_{35}$ mm	$\phi_{int}$	$\phi_{opt}$
1.000	2000	600	0.006	2001	2721	1970	1499	655	196.591	197.215
1.300	2000	600	0.006	2152	2549	1921	1497	663	196.673	194.445
1.320	2000	600	0.006	2153	2543	1919	1497	662	196.679	194.264
1.330	2000	600	0.006	2153	2542	1919	1499	658	196.682	194.309
1.350	2000	600	0.006	2147	2545	1920	1502	648	196.687	194.395
1.400	2000	600	0.006	2133	2552	1923	1511	626	196.700	194.656
1.000	2200	620	0.006	1937	2737	1972	1499	664	213.930	197.172
1.300	2200	620	0.006	2152	2548	1921	1497	663	214.015	194.436
1.320	2200	620	0.006	2156	2540	1918	1487	662	214.020	194.248
1.330	2200	620	0.006	2153	2542	1919	1499	658	214.623	194.300
1.350	2200	620	0.006	2194	2545	1920	1502	648	214.029	194.395
1.400	2200	620	0.006	2131	2554	1923	1511	626	214.043	194.566
1.000	2500	650	0.006	1959	2745	1974	1498	664	239.938	194.152
1.300	2500	650	0.006	2152	2548	1921	1497	663	240.027	194.434
1.320	2500	650	0.006	2159	2538	1918	1497	662	240.033	194.239
1.330	2500	650	0.006	2153	2542	1919	1499	657	240.036	194.300
1.350	2500	650	0.006	2147	2546	1920	1502	648	240.042	194.400
1.400	2500	650	0.006	2131	2554	1923	1511	626	240.056	194.571

$\beta_{opt}$	$A_{s1}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s2}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s3}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s4}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s5}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s6}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s7}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s8}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s9}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s10}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s11}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s12}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s13}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s14}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s15}$ mm <sup>2</sup>	$A_{s16}$ mm <sup>2</sup>
1.360	2573	2573	2573	5521	4050	3246	3246	7056	11153	2821	2821	4732	7509	1420	1420	1420
	D-L	D-L	D-L	D-F	D-F	D-L	D-L	D-F	F-U	F-F	F-F	F-F	F-U	F-L	F-L	F-L

긴장재의 긴장으로 인한 단면력들의 2차효과에 대한 계산이 복잡하기 때문에 해석과정에서 고려될 수 있도록 하는 방법을 도입하였다. 그리고 본 연구에서는 긴장재 형상을 3가지 유형의 포물선함수로 취하므로써 최적성기준식들의 유도과정과 설계변수들의 개선과정에서 명시적인 표현이 가능하였다. 또한 자중의 효과를 평형방정식에 포함하여 고려하였다. 다지간 부분프리스트레스트 콘크리트보의 설계를 위해 개발된 DCOC에 기초한 알고리즘의 다양성과 유효성을 보이기 위하여 실제적인 설계예들을 고려하였고, 매우 좋은 결과를 얻을 수 있었다.

**감사의 글**

본 연구는 충북대학교 국책 자유공모과제(과제번호 : 96F-20)의 지원으로 수행되었으며, 연구비를 지원해 준 국책사업추진단에 감사드립니다.

**참고 문헌**

1. Rozvany, G. I. N., and Zhou, M., Continuum-based Optimality Criteria (COC) Method : An Introduction. In; Rozvany, G. I. N. (ed) Optimization of Large Structural Systems. (Proc. NATO ASI, Berchtesgaden, Germany, 1991), Kluwer, Dordrecht, pp. 1 ~26, 1993.
2. Adamu, A., Karihaloo, B. L., and Rozvany, G. I. N., Minimum Cost Design of Reinforced Concrete Beams using Continuum-type Optimality Criteria, Struct. Opt., 7, pp. 91~102, 1994.
3. Zhou, M., and Rozvany, G. I. N., DCOC : An Optimality Criteria Method for Large Systems, Part I : Theory, Struct. Opt., 5,

- 12~25, 1992.
4. Zhou, M., and Rozvany, G. I. N., DCOC : An Optimality Criteria Method for Large Systems, Part II : Algorithms, Struct. Opt., 6, pp. 250~262, 1993.
  5. Adamu, A., and Karihaloo, B. L., Minimum Cost Design of RC Beams using DCOC, Part I : Beams with Freely-varying Cross-sections, Structure. Opt., 7, pp. 237~251, 1994.
  6. Adamu, A., and Karihaloo, B. L., Minimum Cost Design of RC Beams using DCOC, Part II : Beams with Uniform Cross-sections, Struct. Opt., 7, pp. 237~259, 1994.
  7. Han, S. H., Adamu, A., and Karihaloo, B. L., Application of DCOC to Optimum Prestressed Concrete Beam Design, Eng. Opt., 25, (3), pp. 179~200, 1994.
  8. 건설교통부, '콘크리트표준시방서', 대한토목학회, 1996.
  9. Gilbert, R. I., and Mickleborough, N. C., Design of Prestressed Concrete, Unwin Hyman, London, 1990.
  10. 신현묵, "프리스트레스트 콘크리트", 동명사, 1997.

(접수일자 : 1997. 9. 30)