한국통계학회논문집 제4권 2호
1997년 8월 pp. 533 - 540

일반화 감마분포에서의 누율계산과 지표모수에 대한 Bartlett 검정[1)]

나 종 화[2)]

요 약

일반화 감마분포(generalized gamma distribution)에서 지표모수(index parameter)에 대한 추론은 생존시간(lifetime)과 관련한 모형의 선택문제에서 매우 중요하다. 이에 대한 정확한(exact) 추론법은 알려져 있지 않다. 본 연구에서는 이에 대한 점근적(asymptotic) 검정법으로 소표본에서도 우도비 검정에 비해 효율이 뛰어난 Bartlett 검정을 제안하고, 이의 효율적 수행을 위한 대체 모형으로 부터의 누율계산(cumulant computation) 법을 제시하였다. 또한 실제자료에 대해 본 논문에서 제시한 누율계산과정을 이용하여 Bartlett 검정을 실시한 결과 기존의 우도비 검정과는 상당히 큰 차이가 남을 확인하였다. 따라서 모형의 선택 등의 문제에서 제안된 방법의 사용은 소표본의 경우에 더욱 효율적이라 할 수 있다.

1. 서 론

Stacy(1962)에 의해 소개된 일반화 감마분포(generalized gamma distribution)는 3개의 모수를 가지는 모형으로 다음과 같다.

$$\frac{1}{\Gamma(x)\alpha^{\beta x}}\beta t^{\beta x-1}e^{-(\frac{t}{\alpha})^{\beta}} \quad , \ t>0 \tag{1}$$

여기서 $\beta>0$, $\alpha>0$, $x>0$ 이다. 이 모형은 생존시간(lifetime)과 관련한 여러 가지 모형을 포함한다. 즉, $\beta=x=1$ 이면 지수(exponential) 분포, $x=1$ 이면 와이블(Weibull) 분포, $\beta=1$ 이면 감마(gamma) 분포를 따르며, $x\to\infty$ 이면 로그-정규(log-normal) 분포를 따른다. Prentice(1974)와 Farewell과 Prentice(1977)는 모형 (1)의 모수에 대한 추론을 위해 다음과 같은 대체모형을 제시하였다. 즉, $\mathrm{Y}=\log\mathrm{T}$ 의 분포는 다음과 같은 모형으로 주어진다.

$$\frac{1}{b\Gamma(x)}\exp\left\{x\left(\frac{y-u}{b}\right)-\exp\left(\frac{y-u}{b}\right)\right\} \quad , \ -\infty<y<\infty \tag{2}$$

---

1) 이 논문은 1996년 충북대학교 발전기금재단 연구비에 의하여 연구되었음.
2) (360-763) 충북 청주시 흥덕구 개신동 산 48 충북대학교 통계학과 조교수.

여기서 $u = \log\alpha$ 이고 $b = 1/\beta$이다. 만약 지표모수(index parameter) κ를 아는 경우의 모형 (2)는 위치-모수 모형(location-scale model)에 포함되며 따라서 Fisher(1934)의 원리에 입각한 조건부적 추론(conditional inference)을 나머지 모수에 대해 실시할 수 있다. Lawless(1980)와 Na(1993)는 다양한 지표모수의 변화에 따른 모형 (1)의 백분위수(quantile)에 대한 신뢰구간을 구하는 법에 대하여 연구하였다. 특히 Na(1993)는 안부점 근사(saddlepoint approximation)법을 이용하여 Lawless(1980)가 제안한 복잡한 계산과정의 대안을 제시하였다.

한편 다음과 같은 지표모수에 대한 검정을 생각하자.

$$H_0 : \kappa = \kappa_0 \quad vs \quad H_1 : \kappa \neq \kappa_0 \tag{3}$$

가설 (3)에 대한 정확한 검정법(exact test)은 지금까지 알려져 있지 않다. 지표모수 κ는 모형을 결정하는데 중요한 역할을 하는 모수이며 이에 대한 정확성을 가지는 검정법이 요구된다.

본 논문에서는 κ에 대한 점근적 검정(asymptotic test)법으로 Bartlett-수정된 우도비 검정(Bartlett-corrected likelihood ratio test)에 대하여 연구하였다. 2절에서는 Bartlett-요인의 계산에 사용될 대체 모형(alternative model)을 제안하고, 이 모형에 기초한 효율적인 누율계산 과정을 제시하였다. 3절에서는 실례를 통해 기존의 점근적 검정인 우도비 검정(likelihood ratio test, 이하 LR test) 결과와 비교하였다. 이 과정에서 Bartlett-요인(Bartlett-factor)의 값은 2절에서 제시된 누율 계산과정을 이용하였다.

2. 지표모수에 대한 Bartlett 수정된 우도비 검정

일반적으로 모수 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_p)$에 대한 우도비 검정통계량 $W(\theta)$는 다음과 같다.

$$W(\theta) = -2\log\{L(\theta)/L(\hat{\theta})\} \tag{4}$$

여기에서 θ는 귀무가설에서 주어진 모수값을 의미하고 $\hat{\theta}$은 모수 θ의 최우추정량을 의미한다. 식 (4)의 통계량은 귀무가설에서 점근적으로(asymptotically) 자유도가 p인 카이제곱 분포를 따른다. 즉, $W(\theta) \xrightarrow{d} \chi^2(p)$ 이다. Bartlett(1937, 1954)은 통계량 (4)를 수정한 다음의 $W_b(\theta)$ 검정통계량을 제안하였고

$$W_b(\theta) = W/\{1 + b(\theta)/n\} \tag{5}$$

통계량 $W_b(\theta)$ 의 분포는 $W(\theta)$보다 더욱 빠른 속도로 카이제곱 분포에 수렴함을 보였다. 여기서 $b(\theta)$는 Bartlett-요인(Bartlett-factor)으로 불리는 값으로 다음과 같이 정의된다.

먼저 $I_1, I_2, \cdots$ 등을 인덱스 집합이라 하고 모집단의 로그-밀도함수(log-density function)를 ℓ 이라 하자. 로그밀도함수 ℓ 의 인덱스 I에 대한 미분을 $\partial_I \ell$ 이라 표현할 때 로그밀도함수의 미분에 대한 누율(cumulant)을 다음과 같이 표현하자.

$$\begin{aligned} \kappa_{I_1,I_2} &= cum(\partial_{I_1}\ell\ ,\ \partial_{I_2}\ell\ ) \\ \kappa_{I_1,I_2,I_3} &= cum(\partial_{I_1}\ell\ ,\ \partial_{I_2}\ell\ ,\ \partial_{I_3}\ell\ ) \\ &\cdots \end{aligned} \tag{6}$$

여기서 $cum(\cdot)$의 표현은 누율(cumulant)을 의미한다. Bartlett-요인 $b(\theta)$는 다음과 같이 주어진다.

$$b(\theta) = \{ (3\ \rho_{13}{}^2 + 2\ \rho_{23}{}^2 - 3\rho_4)/12 + (-\nu_{rs,tu} + 2\nu_{rt,su} - 2\nu_{r,s,tu})\nu^{r,s}\nu^{t,u}/4\ \}\ /p \tag{7}$$

여기서 ν들은 '텐저 누율(tensorial cumulant)' 이라 불리는 양으로 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} &\nu_{r,s} = \kappa_{r,s}\ ,\quad \nu_{r,s,t} = \kappa_{r,s,t}\ ,\quad \nu_{r,s,t,u} = \kappa_{r,s,t,u}\ , \\ &\nu_{rs,tu} = \kappa_{r,s,tu} - \kappa_{rs,i}\,\kappa_{tu,j}\,\kappa^{i,j}\ ,\quad \nu_{r,s,tu} = \kappa_{r,s,tu} - \kappa_{r,s,i}\,\kappa_{tu,j}\,\kappa^{i,j} \end{aligned} \tag{8}$$

식 (8)에서 $\kappa^{r,s} = \nu^{r,s}$ 의 표현은 식 (6)에서 정의된 행렬 ($\kappa_{i,j}$) 에 대한 역행렬의 (r,s)번째 요소이다. 또한 ρ_{13} , ρ_{23} , ρ_4는 다차원의 경우에 왜도(skewness)와 첨도(kurtosis)에 대응하는 측도들로서 위 식에서 정의된 ν들로 부터 다음과 같이 정의되는 양이다.

$$\begin{aligned} \rho_{13}{}^2 &= \nu_{i,j,k}\,\nu_{l,m,n}\,\nu^{i,j}\,\nu^{k,l}\,\nu^{m,n} \\ \rho_{23}{}^2 &= \nu_{i,j,k}\,\nu_{l,m,n}\,\nu^{i,l}\,\nu^{j,m}\,\nu^{k,n} \\ \rho_4 &= \nu_{i,j,k,l}\,\nu^{i,j}\,\nu^{k,l}\ . \end{aligned} \tag{9}$$

위의 식 (7), (8), (9)에서는 텐저기호(tensor notation)을 사용하고 있음에 유의하자. 즉, $a_i b^i$ 의 형태는 $\sum_{all\ i} a_i b^i$ 를 줄여서 표현한 것이다. (McCullagh(1987) 참고)

식 (7)에서 정의된 Bartlett-요인은 일반적 모형(general model)에 적용이 되며 모형이 지수족(exponential family)인 경우는 더욱 간단한 형태로 표현된다. 일반화 감마 분포모형의 대체모형 (2)에서 모수 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$를 $\theta_1 = \kappa$, $\theta_2 = u$, $\theta_3 = 1/b = \beta$ 이라 하면 모형 (2)의 로그-밀도함수(log-density function)의 형태는 $\Gamma(\cdot)$를 감마함수(gamma function)로 정의 할 때 다음과 같이 주어진다.

$$\ell = \ell\,(\theta) = \log\theta_3 - \log\Gamma(\theta_1) + \theta_1\theta_3(y-\theta_2) - \exp\{\theta_3(y-\theta_2)\} \tag{10}$$

식 (10)에서 $Z = \theta_3(Y-\theta_2)$의 분포는

$$\{\Gamma(\theta_1)\}^{-1}\exp\ \{\theta_1 Z - \exp(Z)\}\quad ,\ -\infty < Z < \infty \tag{11}$$

이다. 즉 Gamma(θ_1)이 형태모수(shape parameter)가 θ_1이고 척도모수(scale parameter)가 1인

감마분포를 나타낼 때 Z의 분포는 $Z \overset{d}{\sim} \log \mathrm{Gamma}(\theta_1)$ 또는 $e^Z \overset{d}{\sim} \mathrm{Gamma}(\theta_1)$ 으로 표현된다. Z 와 e^Z 의 r 차 누율(cumulant)을 $\kappa_r(Z)$ 와 $\kappa_r(e^Z)$ 로 하자. Z 와 e^Z 의 누율생성함수(cumulant generating function)로 부터 다음을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} \kappa_r(Z) &= \Psi^{r-1}(\theta_1) \\ \kappa_r(e^Z) &= (r-1)!\,\theta_1 \quad , \quad r=1,2,\cdots \end{aligned} \tag{12}$$

여기서 $\Psi^{(r-1)}(\cdot)$는 $\log \Gamma(\cdot)$ 의 r 차 미분(derivative)을 의미한다. 또한 다음의 결과도 쉽게 보일 수 있다.

$$E(Z^a e^{bZ}) = \frac{\Gamma(\theta_1+b)}{\Gamma(\theta_1)} E(\ W^a) \quad , \quad a,b=0,1,2,\cdots \tag{13}$$

여기서 $W \overset{d}{\sim} \log \mathrm{Gamma}(\theta_1+b)$ 이고 $E(W^a)$ 는 다음의 누율(cumulant)과 적률(moment)의 관계로 부터 쉽게 구해진다. 즉,

$$\begin{aligned} \mu_2' &= \kappa_2 + \kappa_1^2 \\ \mu_3' &= \kappa_3 + 3\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1^3 \\ \mu_4' &= \kappa_4 + 4\kappa_1\kappa_3 + 6\,\kappa_1^2\kappa_2 + \kappa_1^4 \end{aligned} \tag{14}$$

여기서 μ_r' 과 κ_r $(r=1,2,\cdots)$ 은 확률변수의 r 차 적률과 누율을 의미한다. 이제 '텐져 누율(tensorial cumulant)' 이라 불리우는 ν 들을 계산하기 위해 다음의 절차를 따른다. 로그-밀도함수 (10)의 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 에 대한 ℓ, m, n 차의 편미분을 $(\partial_1)^\ell(\partial_2)^m(\partial_3)^n \ell(\theta)$ 로 표현하고 기호 $(a)_b$ 를 다음과 같이 정의할 때

$$(a)_b = \begin{cases} a(a-1)\cdots(a-b+1) \ , & b \le a \\ 0 & , \ b > a \end{cases} \qquad (a,b=0,1,2,\cdots) \tag{15}$$

다음의 관계식이 성립함을 보일 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} (\partial_1)^\ell(\partial_2)^m(\partial_3)^n \ell(\theta) \ = \ & (0)_\ell(0)_m(-1)^{n-1}(n-1)!\ \theta_3^{-n} \\ & -(0)_m(0)_n \Psi^{(n-1)}(\theta_1) \\ & +(1)_\ell(1)_m(1)_n\ \theta_1^{1-\ell}\ \theta_2^{1-m}\ \theta_3^{1-n} \\ & + f(\ell, m, n) \end{aligned} \tag{16}$$

이고

$$\begin{aligned} f(l,m,n) = \ & (1)_l(0)_m(0)_n\ \theta_1^{1-l}\ \theta_3^{-n}(Z+\theta_2\theta_3) \\ & -(0)_l(n)_m(-1)^m\ \theta_3^{m-n} Z^{n-m} e^Z \\ & -(0)_l(-1)^m\ \theta_3^{m-n} Z^n e^Z \end{aligned} \tag{17}$$

이다. 식 (16)과 (17)로 부터 '텐져 누율(tensorial cumulant)' 들을 계산하기 위해 다음의 사실

$$
\begin{aligned}
&f(1,0,0)=Z+\theta_2\theta_3\\
&f(0,1,0)=\theta_3 e^Z\\
&f(0,0,1)=\theta_1 Z/\theta_3-2Ze^Z/\theta_3+\theta_1\theta_2\\
&f(2,0,0)=f(1,1,0)=0\\
&f(0,2,0)=-\ \theta_3{}^2 e^Z\\
&f(0,2,0)=-2Z^2e^Z/\ \theta_3{}^2\\
&f(1,0,1)=Z/\theta_3+\theta_2\\
&f(0,1,1)=e^Z+Ze^Z
\end{aligned}
\tag{18}
$$

을 이용하면 아래의 결과를 얻는다. 즉, 2차의 ν 들은

$$
\begin{aligned}
\nu_{1,1} &= cum(\ f(1,0,0),f(1,0,0)\ )\\
&= Var(\ f(1,0,0)\ )=Var(Z)\ ,\\
\nu_{2,2} &= cum(\ f(0,1,0),f(0,1,0)\ )\\
&= Var(\ f(0,1,0)\ )=\ \theta_3{}^2\,Var(e^Z)\ ,\\
\nu_{3,3} &= cum(\ f(0,0,1),f(0,0,1)\ )\\
&= Var(\ f(0,0,1)\ )\\
&=\{\ \theta_1{}^2\,Var(Z)+4\,Var(Ze^Z)\\
&\qquad -4\,\theta_1 Cov(Z,e^Z)\}/\ \theta_3{}^2\\
\nu_{1,2} &= cum(\ f(1,0,0),f(0,1,0)\ )\\
&= \theta_3 Cov(Z,Ze^Z)\\
\nu_{1,3} &= cum(\ f(1,0,0),f(0,0,1))\\
&=\ \{\theta_1 Var(Z)-2Cov(Z,Ze^Z)\}\ /\theta_3\\
\nu_{2,3} &= cum(\ f(0,2,0),f(0,0,1)\ )\\
&= \theta_1 Cov(Z,e^Z)-2Cov(e^Z,Ze^Z)
\end{aligned}
\tag{19}
$$

이고 3차 이상의 누율들도 유사한 방법으로 얻을 수 있다. 이에 대한 계산결과를 서로 다른 인덱스(index) 유형에 따라 몇 가지 정리하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\nu_{1,1,3} &=\ \{\theta_1\kappa_3(Z)-2\,cum(Z,Z,e^Z)\}\ /\ \theta_3{}^3\\
\nu_{1,2,3} &= \theta_1 cum(Z,Z,e^Z)-2cum(Z,e^Z,Ze^Z)\\
\nu_{2,3,3,3} &=\ \{\ \theta_1{}^3 cum(Z,Z,Z,e^Z)-6\ \theta_1{}^2 cum(Z,Z,e^Z,Ze^Z)\\
&\qquad +12\theta_1 cum(Z,e^Z,Ze^Z,Ze^Z)-8cum(e^Z,Ze^Z,Ze^Z,Ze^Z)\ \}\\
\nu_{1,2,3,3} &=\ \{\ \ \theta_1{}^2 cum(Z,Z,Z,e^Z)-4\,\theta_1 cum(Z,Z,e^Z,Ze^Z)\\
&\qquad +4cum(Z,e^Z,Ze^Z,Ze^Z)\}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

또한 ν 들의 계산에 필요한 κ 들의 계산 결과는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
\kappa_{22,3} &= -\theta_3 \ \{\theta_1 Cov(Z, e^Z) - 2\,Cov(e^Z, Ze^Z)\} \\
\kappa_{23,33} &= \ \{-2Cov(e^Z, Z^2e^Z) - 2\,Cov(Ze^Z, Z^2e^Z)\} \ / \ \theta_3{}^2 \\
\kappa_{2,3,13} &= \ \{\theta_1 cum(Z, Z, e^Z) - 2cum(Z, e^Z, Ze^Z)\} \ / \theta_3 \\
\kappa_{2,1,23} &= \ \{\theta_3 cum(Z, e^Z, e^Z) + cum(Z, e^Z, Ze^Z)\}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

여기서 $Cov(\cdot\,,\cdot)$은 공분산을 의미한다. 또한 식 (19), (20), (21) 등은 다음의 누율과 적률의 관계를 이용하면 더욱 계산이 편리한 (23)식의 형태로 표현된다. 즉,

$$
\begin{gathered}
\kappa^{i,j} = \kappa^{i,j} - \kappa^i\kappa^j \ , \\
\kappa^{i,j,k} = \kappa^{ijk} - \kappa^i\kappa^{jk} + 2\kappa^i\kappa^j\kappa^k \ , \\
\kappa^{i,j,k,l} = \kappa^{ijkl} - \kappa^i\kappa^{jkl}[4\ ] + \kappa^{ik}\kappa^{kl}[3\ ] + 2\kappa^i\kappa^j\kappa^{kl}[6\ ] - 6\kappa^i\kappa^j\kappa^k\kappa^l
\end{gathered}
\tag{22}
$$

여기서 $\kappa^{r,s,\cdots,t} = cum(X^r, X^s, \cdots, X^t)$, $\kappa^{rs\cdots t} = E(X^rX^s\cdots X^t)$ 이고 $[a]$의 표현은 유사한 항의 개수가 a개 있음을 의미한다. (McCullagh(1987), Chapter 2 참고)

예를 들어,

$$
\begin{aligned}
cum(Z, e^Z, e^Z) = \ & E(Ze^{2Z}) - 2E(e^Z)E(Ze^Z) \\
& - E(e^{2Z})E(Z) + 2E(e^Z)^2E(Z) \\
cum(Z, Ze^Z, Z^2e^Z) = \ & E(Z^4e^{2Z}) - E(Z)E(Z^3e^{2Z}) \\
& - E(Ze^Z)E(Z^3e^Z) - E(Z^2e^Z)^2 \\
& + 2E(Z)E(Ze^Z)E(Z^2e^Z) \\
cum(Z, e^Z, Ze^Z, Ze^Z) = \ & E(Z^4e^{2Z}) - 2E(Z)E(Z^3e^{2Z}) \\
& - 2E(Ze^Z)E(Z^3e^Z) - E(Z^2)E(Z^2e^{2Z}) \\
& - 2E(Z^2e^Z)^2 + 2E(Z^2)E(Ze^Z)^2 \\
& + 8E(Z^2e^Z)E(Z)E(Ze^Z) + 2E(Z^2e^{2Z})E(Z)^2 \\
& - 6E(Z)^2E(Ze^Z)^2
\end{aligned}
\tag{23}
$$

이다. 즉, 모든 형태의 누율들은 식 (13)의 결과로 부터 구해질 수 있는 형태로 변환될 수 있다. 따라서, 식 (7)의 Bartlett-요인의 값이 구해지며 이로부터 식 (5)의 검정통계량의 값으로부터 근사적 카이제곱 검정을 수행할 수 있다. 3절에서는 실례를 통해 이 방법이 기존의 우도비 검정 결과와 비교해 볼 때 상당히 큰 차이가 남을 확인하였다. 따라서, 모형의 선택과 관련한 실제의 응용문제에서 자료의 크기가 충분히 크지 않은 경우에는 기존의 우도비 검정의 사용에 신중을 기해야 할 것이다.

3. 예제를 통한 비교

아래의 자료는 Leiblein과 Zelen(1956)이 처음 제시한 자료로서 Lawless(1980)로 부터 인용한 것이다. 23개의 볼 베어링(ball bearing)에 대한 내구력 시험(fatigue test)의 결과로 얻은 회전수(단위 : 백만)에 대한 이 자료는 그 동안 와이블 모형을 설명하는 자료로 많이 이용되어 왔다.

17.88	28.92	33.00	41.52	42.12	45.60
48.40	51.84	51.96	54.12	55.56	67.80
68.64	68.64	68.88	84.12	93.12	98.64
105.12	105.84	127.92	128.04	173.40	

Lawless(1980, 1982)와 Na(1993)는 위 자료에 대하여 일반화 감마분포를 적합시키고 다양한 지표모수의 변화에 따른 백분위수 등의 변화를 비교함으로서 모형의 선택과 관련한 분석을 실시하였다. 본 연구에서는 모형의 결정에 중요한 역할을 하는 지표모수에 대한 직접적인 검정으로 다음의 가설 $H_0 : \kappa=1 \;\; vs \;\; H_1 : \kappa\neq 1$ 에 대한 Bartlett 검정을 실시하였다. 앞 절에서 유도된 누율계산과정을 통하여 계산된 p-값(p-value)이 <표 3-1>에 제시되었다. 위의 자료에 대해 2절에서 제시된 누율계산 과정을 통해 계산된 Bartlett 요인의 값은 11.825 가 된다. 이를 바탕으로 Bartlett 검정을 실시한 결과 기존의 우도비 검정(LR test)과는 상당히 큰 차이가 나는 것을 확인하였다. 즉, 지금까지 지표모수에 대한 근사적 검정으로 사용되어진 우도비 검정은 모형선택과 관련한 문제에서, 특히 소표본의 경우, 심각한 오류를 범할 수 있음을 나타낸다.

<표 3-1> 지표모수에 대한 Bartlett 검정

검정법	검정통계량	P-값(%)
LR(W)	1.445	22.9%
Bartlett Corrected LR(W_b)	0.955	32.8%

한편, <표 3-1>의 결과를 얻는 과정에서 모수들에 대한 최우추정량은 식 (10)의 대체 모형으로부터 구해지는 다음의 최대우도방정식(maximum likelihood equation)

$$\hat{\theta}_2 + \Psi(\hat{\theta}_1)/\hat{\theta}_3 = \bar{y},$$
$$\sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_3(y_i-\bar{y}) \exp\{\hat{\theta}_3(y_i-\bar{y})\} = n,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \exp\{\hat{\theta}_3(y_i-\bar{y})\} = \hat{\theta}_1/\exp\{\Psi(\hat{\theta}_1)\}$$

의 근을 수치적으로 구하였다. 여기서 $\bar{y}=\sum_{i=1}^{n} y_i/n$ 이고 $\Psi(\theta)$ 는 $(d/d\theta)\log\Gamma(\theta)$ 을 나타낸다. 위의 자료로 부터 θ 에 대한 최우추정량의 값은 FORTRAN/IMSL 의 BCONF 서브루틴(subroutine)을 사용하였다.

4. 결 론

본 논문에서는 일반화 감마분포의 지표모수에 대한 소표본(small sample) 검정법으로 Bartlett 검정을 제안하고, Bartlett 요인의 효율적 계산을 위해 대체모형으로 부터의 누율계산과정을 제시하였다. 그 결과 Bartlett 요인의 모든 요소들이 식 (13)을 통해 계산될 수 있음을 보였다. 또한 실례를 통한 기존의 우도비 검정과의 비교를 통해, 특히 소표본의 자료에 대해, 상당히 큰 차이가 남을 확인하였다.

참 고 문 헌

[1] Bartlett, M.S. (1937). Properties of sufficiency and statistical tests, *Proceedings of Royal society of London*, Series A, 160, 268-282.

[2] Bartlett, M.S. (1954). A note on some multiplying factors for various χ^2 approximations, *Journal of Statistical Society*, Series B, 16, 196-298.

[3] Farewell, V.T. and Prentice, R.L. (1977). A study on distributional shape in life testing, *Technometrics*, 19, 69-75.

[4] Lawless, J.F. (1980). Inference in the generalized gamma and log-gamma distribution, 22(3), 409-419.

[5] Lawless, J.F. (1982). Statistical Models and Methods for Lifetime Data, Wiley, New York.

[6] McCullagh, P. (1987). Tensor Methods in Statistics, Chapman and Hall, London.

[7] Na, J.H. (1993), 일반화 감마분포의 백분위수에 대한 근사신뢰구간, 「응용통계연구」, 제6권 제2호, 435-442.

[8] Prentice, R.L. (1974). A log-gamma model and its maximum likelihood estimation, *Biometrika*, 61, 539-544.

[9] Stacy, E.W. (1962). A generalization of the gamma distribution, *Annals of Mathematical Statistics*, 33, 1187-1192.