응용통계연구 제10권 2호
1997년 9월 pp. 385-401

누적합관리도에서 평균런길이의 근사와 결정구간의 설정

이 재 헌[1], 박 창 순[2]

요 약

연속적인 생산공정에서 꾸준하면서도 작은 품질의 변화를 신속하게 탐지하는 통계적 절차로서 누적합(CUSUM) 관리도를 많이 사용하고 있다. 본 논문에서는 누적합관리도의 평균런길이를 근사하는 방법과 누적합관리도의 통계적 설계, 즉 관리상태에서의 평균런길이가 일정한 값으로 고정되었을 경우 이를 만족하는 결정구간을 설정하는 방법을 제시한다. 또한 이 방법을 관측값이 정규분포와 지수분포를 따르는 경우에 적용시켜 그 정확성을 비교하고 있다.

1. 서론

연속적인 생산공정에서 품질의 관리를 위해 통계적 관리도가 널리 사용되고 있다. 관리도의 역할은 생산공정의 변화를 신속하게 탐지하여 공정에서 일어나는 품질 특성치의 변동이 우연원인(random cause)에 의한 것인지 아니면 이상원인(assignable cause)에 의한 것인지를 판단하여, 이상원인이 존재할 때 그 원인을 찾고 수정조치를 취함으로써 불량제품의 발생을 사전에 억제하고자 하는 것이다.

$\{X_i\ ,\ i=1,2,\cdots\}$가 확률밀도함수 $f(x;\theta)$를 따르며 생산공정으로부터 일정한 시간간격으로 얻어진 관측값이라 하자. 이 때 θ는 공정의 품질을 나타내는 모수로서 $\theta=\theta_0$일 때 공정이 관리상태(in-control)에 있다고 하며, $\theta\geq\theta_1(>\theta_0)$인 경우 공정이 이상상태(out-of-control)인 것으로 판단한다.(이 논문에서는 기각품질수준 θ_1을 관리상태의 모수값 θ_0의 양의 변화에 대한 것으로 한정한다.) 이 경우 효율적인 관리도는 $\theta=\theta_0$인 경우 될 수 있는 대로 오래 공정을 지속시키고, $\theta\geq\theta_1$인 경우에는 빨리 이상신호를 줄 수 있어야 한다.

관리도에서 이상원인에 의한 이상상태임이 판단되어 공정을 중지시킬 때까지 추출한 표본의 수를 런길이(run length)라 하며 이것의 기대값을 평균런길이(average run length : ARL)라 한다. 관리도의 특성과 효율을 비교하는 데에는 이 평균런길이를 주로 사용하는데, 이상상태에서의 평균런길이가 관리상태에서의 평균런길이에 비해 상대적으로 급격히 작아진다면 효율적인 관리도라 말할 수 있다.

Page(1954)에 의해 제안된 누적합(CUSUM) 관리도의 절차는, 통계량

1) (503-703) 광주시 남구 진월동 592-1, 광주대학교 산업정보공학과 전임강사.
2) (156-756) 서울시 동작구 흑석동 221, 중앙대학교 응용통계학과 교수.

$$W_n = \max(0\ ,\ X_n - k + W_{n-1}), \tag{1.1}$$

을 사용하여 $W_n \geq h$를 만족하는 최초의 관측시점에서 공정을 중단하는 것이다. 초기치로서 $W_0 = 0$ 을 가정한다. 이 때 k와 h는 미리 정해진 상수로서 k는 참고값(reference value), h는 결정구간(decision interval)이라 한다.

Moustakides(1986)는 식 (1.1)에서 $X_n - k$ 대신 로그확률비 $Z_n = \log f(X_n; \theta_1)/f(X_n; \theta_0)$를 사용하면, 관리상태의 평균런길이가 일정값 이상을 만족하면서 이상상태의 평균런길이를 가장 작게 하여 최적 누적합관리도가 됨을 보였다. 또한 Gan(1991, 1994)은 관측값이 정규분포와 지수분포일 때 최적의 k를 사용하면, 기각품질수준 θ_1이 θ_0에 아주 근접한 경우를 제외하고는 Z_n을 사용하는 것과 동일함을 보였다.

따라서 관리상태의 평균런길이가 주어진 경우 이상상태의 평균런길이를 가장 작게 해주는 누적합관리도의 설계는 관리통계량으로 $X_n - k$ 대신 로그확률비 Z_n을 사용한 다음 결정구간 h를 결정하는 문제로 귀결된다. 이 논문에서는 평균런길이의 근사방법과 이를 이용하여 관리상태의 평균런길이가 주어진 경우 결정구간 h를 설정하는 방법에 대해 연구하였다. 이것은 박창순(1992)이 제안한 CBST 방법을 이용한 것으로, 그 정확성을 알아보기 위해 관측값이 정규분포와 지수분포를 따르는 경우에 대해 적용시켜 그 결과를 제시하였다.

2. 평균런길이의 근사와 결정구간의 설정

2.1 누적합관리도의 평균런길이

모수 θ의 양의 변화를 검색하는 누적합관리도의 런길이는

$$T = \min\{n\ ;\ W_n \geq h\}$$

라 표현할 수 있으며, 이 때 평균런길이는 $E(T;\theta)$가 된다.

Page(1954)는 누적합관리도의 절차가 단순가설 $H_0: \theta = \theta_0$, $H_1: \theta = \theta_1$에 대해 경계선 $(0, h)$를 사용하는 Wald(1947)의 축차확률비검정을 반복하여 사용하는 것과 동일함을 보였다. 또한 N을 축차확률비검정의 결정표본수라 하면, 누적합관리도의 평균런길이는 축차확률비검정의 평균표본수(average sample number) $E(N;\theta)$와 검사특성함수(operating characteristic function) $OC(\theta)$를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E(T;\theta) = \frac{E(N;\theta)}{1 - OC(\theta)} \tag{2.1}$$

검사특성함수와 평균표본수는 Wald(1947)의 이론(fundamental identity)에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$OC(\theta)=\begin{cases}\dfrac{E[\exp\{d(\theta)\cdot S_N^h\}]-1}{E[\exp\{d(\theta)\cdot S_N^h\}]-E[\exp\{d(\theta)\cdot S_N^0\}]} & ,\ E(Z;\theta)\neq 0\text{인 경우}\\ \dfrac{E(S_N^h)}{E(S_N^h)-E(S_N^0)} & ,\ E(Z;\theta)=0\text{인 경우}\end{cases}\tag{2.2}$$

$$E(N;\theta)=\begin{cases}\dfrac{E(S_N^h)\cdot(1-OC(\theta))+E(S_N^0)\cdot OC(\theta)}{E(Z;\theta)} & ,\ E(Z;\theta)\neq 0\text{인 경우}\\ \dfrac{E[(S_N^h)^2]\cdot(1-OC(\theta))+E[(S_N^0)^2]\cdot OC(\theta)}{E(Z^2;\theta)} & ,\ E(Z;\theta)=0\text{인 경우}\end{cases}\tag{2.3}$$

단 $d(\theta)$는 $E(e^{d(\theta)\cdot Z})=1$ 을 만족하는 0이 아닌 유일근이고, $S_n=\sum_{i=1}^{n}Z_i$에 대해 S_N^h, S_{N-1}^h, Z_N^h는 $S_N\geq h$를 조건부로 하는 S_N, S_{N-1}, Z_N이며, S_N^0, S_{N-1}^0, Z_N^0는 $S_N\leq 0$를 조건부로 하는 S_N, S_{N-1}, Z_N을 나타낸다.

그러나 식 (2.2)와 (2.3)과 같이 정확한 표현식이 있음에도 불구하고, 대부분의 관측값의 분포에서 조건부($S_N\geq h$ 또는 $S_N\leq 0$) 기대값을 간단한 식으로 계산할 수 없기 때문에 검사특성함수와 평균표본수의 정확한 값을 산출하는데 어려운 점이 있고, 따라서 평균런길이를 계산하는데도 어려움이 있다. 이러한 평균런길이의 계산에 대한 연구로는 Reynolds(1975), Regula(1976), Khan(1978), 박창순(1987), 박창순과 김병천(1990), 김병천, 박창순, 박영희, 그리고 이재헌(1994) 등이 있다.

2.2 CBST 방법

먼저 식 (2.2)와 (2.3)의 검사특성함수와 평균표본수를 계산하기 위하여 박창순(1992)이 제안한 CBST(condition of before-stopping time) 방법을 이용하여 보자. u와 l을 경계선 h와 0의 초과에 대한 기대값이라 하면, u와 l은

$$u=E(S_N^h)-h\ ,\ \ l=E(S_N^0).\tag{2.4}$$

로 나타낼 수 있다. CBST 방법은 식 (2.4)의 u와 l을 추정하기 위해 S_{N-1}^h와 S_{N-1}^0의 조건을 이용하는 것이다. 즉,

$$\begin{aligned}u&=E[E(S_N^h|S_{N-1}^h)]-h\\&\approx E[S_N^h|S_{N-1}^h=E(S_{N-1}^h)]-h,\end{aligned}\tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}l&=E[E(S_N^0|S_{N-1}^0)]\\&\approx E[S_N^0|S_{N-1}^0=E(S_{N-1}^0)].\end{aligned}\tag{2.6}$$

또한 식 (2.5)와 (2.6)의 $E(S_{N-1}^h)$와 $E(S_{N-1}^0)$는 다음과 같은 방법으로 추정한다.

$$\begin{aligned} E(S_{N-1}^h) &= E[E(S_{N-1}^h | S_N^h)] \\ &\approx E[S_{N-1}^h | S_N^h = E(S_N^h)] \\ &= E[S_{N-1}^h | S_N^h = h+u] \equiv x(u), \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} E(S_{N-1}^0) &= E[E(S_{N-1}^0 | S_N^0)] \\ &\approx E[S_{N-1}^0 | S_N^0 = E(S_N^0)] \\ &= E[S_{N-1}^0 | S_N^0 = l] \equiv y(l). \end{aligned} \tag{2.8}$$

식 (2.7)과 (2.8)을 식 (2.5)와 (2.6)에 대입하면 u와 l은 다음과 같은 비선형방정식으로 표현된다.

$$u \approx E[S_M^h | S_{N-1}^h = x(u)] - h, \tag{2.9}$$

$$l \approx E[S_M^0 | S_{N-1}^0 = y(l)]. \tag{2.10}$$

여기서 u와 l, 그리고 $x(u)$와 $y(l)$은 관측값의 분포가 주어졌을 경우 식 (2.9)와 (2.10)에 대해 이분법(bisection method)과 같은 간단한 수치해석 방법을 사용하여 구할 수 있다.

u와 l, 그리고 $x(u)$와 $y(l)$을 이용하면 식 (2.3)의 평균표본수 $E(N;\theta)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E(N;\theta) \approx \begin{cases} \dfrac{(h+u)\cdot(1-OC(\theta)) + l \cdot OC(\theta)}{E(Z;\theta)} & , E(Z;\theta) \neq 0\text{인 경우} \\ \dfrac{E[(S_N^h)^2 | S_{N-1}^h = x(u)]\cdot(1-OC(\theta)) + E[(S_N^0)^2 | S_{N-1}^0 = y(l)]\cdot OC(\theta)}{E(Z^2;\theta)} & \\ & , E(Z;\theta) = 0\text{인 경우} \end{cases} \tag{2.11}$$

유사한 방법으로 식 (2.2)의 검사특성함수 $OC(\theta)$는

$$OC(\theta) \approx \begin{cases} \dfrac{E[\exp\{d(\theta)\cdot S_N^h\} | S_{N-1}^h = x(u)] - 1}{E[\exp\{d(\theta)\cdot S_N^h\} | S_{N-1}^h = x(u)] - E[\exp\{d(\theta)\cdot S_N^0\} | S_{N-1}^0 = y(l)]} & \\ & , E(Z;\theta) \neq 0\text{인 경우} \\ \dfrac{h+u}{h+u-l} & , E(Z;\theta) = 0\text{인 경우} \end{cases} \tag{2.12}$$

와 같이 구할 수 있다. 또한 위의 평균표본수와 검사특성함수의 표현식을 식 (2.1)에 대입하면 평균런길이를 계산할 수 있다.

2.3 CBST 방법의 수정과 결정구간의 설정

CBST 방법은 u와 l, 그리고 $x(u)$와 $y(l)$을 계산하는데 수치해석적인 방법을 사용해야 하므로 평균표본수와 검사특성함수를 간단한 수식의 형태로 표현할 수가 없다. 평균표본수와 검사특성함수가 간단한 수식의 형태로 표현되어 평균런길이가 간단한 수식의 형태로 표현되면, $E(T;\theta_0) = A_0$를 만족하는 결정구간 h를 손쉽게 설정할 수 있다. 여기서는 CBST 방법을 수

정하여 평균런길이를 좀 더 간단하게 표현하고자 한다.

이재헌, 박창순, 그리고 김병천(1994)은 경계선이 (b, a)인 축차확률비검정에서 CBST 방법을 이용하여 계산한 u와 l이 경계선 a와 b에 의존하지 않고 일정한 값을 가지며, 모수 θ에 거의 선형적인 관계를 가짐을 보였다. 따라서 u와 l을 매번 수치해석적인 방법으로 계산하는 대신 단순선형회귀분석을 이용하여 θ의 일차함수로 추정하였다. 이 논문에서도 경계선이 $(0, h)$일 경우의 u와 l을 θ의 일차함수로 추정하여 사용하며 이를 $u(\theta)$와 $l(\theta)$로 표현한다. CBST방법이 매번 u와 l을 계산해야 하는 반면에 u와 l을 일차함수로 추정하는 것은 이와 같은 수고를 거치지 않고 평균표본수와 검사특성함수를 계산할 수 있는 장점이 있다.

$P(\theta; h) = E[\exp\{d(\theta)\cdot S_N^h\}|S_{N-1}^h = x(u(\theta))]$, $Q(\theta) = E[\exp\{d(\theta)\cdot S_N^0\}|S_{N-1}^0 = y(l(\theta))]$라 할 때, CBST 방법으로 계산된 식 (2.12)의 검사특성함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$OC(\theta) \approx \begin{cases} \dfrac{P(\theta; h)-1}{P(\theta; h)-Q(\theta)} & , E(Z;\theta)\neq 0\text{인 경우} \\ \dfrac{h+u(\theta)}{h+u(\theta)-l(\theta)} & , E(Z;\theta)=0\text{인 경우} \end{cases} \tag{2.13}$$

따라서 평균런길이는 식 (2.1)을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E(T;\theta) \approx \begin{cases} \dfrac{1}{E(Z;\theta)}\cdot\left\{h+u(\theta)-l(\theta)\cdot\dfrac{P(\theta; h)-1}{Q(\theta)-1}\right\} & , E(Z;\theta)\neq 0\text{인 경우} \\ \dfrac{1}{E(Z^2;\theta)}\cdot\left\{E[(S_N^h)^2|S_{N-1}^h = x(u)] - E[(S_N^0)^2|S_{N-1}^0 = y(l)]\cdot\dfrac{h+u(\theta)}{l(\theta)}\right\} & , E(Z;\theta)=0\text{인 경우} \end{cases} \tag{2.14}$$

다음으로 관리상태에서의 평균런길이가 A_0라는 상수로 주어진 경우, 즉 $E(T;\theta_0)=A_0$일 때 이를 만족하는 결정구간 h를 설정하는 방법에 대해 알아보자. 일반적으로 $E(Z;\theta_0)\neq 0$이므로 평균런길이의 근사식 (2.14)에서 $E(Z;\theta)\neq 0$인 경우에 대해서만 생각하기로 한다. $E(T;\theta_0)=A_0$라는 제약식은

$$A_0 \approx \frac{1}{E(Z;\theta_0)}\cdot\left\{h+u(\theta_0)-l(\theta_0)\cdot\frac{P(\theta_0; h)-1}{Q(\theta_0)-1}\right\} \tag{2.15}$$

로 표현되며, 이것은 일반적으로 h에 대한 비선형방정식이므로 이분법으로 h를 쉽게 구할 수 있다.

3. 정규분포의 경우

$\{X_i\ ,\ i=1,2,\cdots\}$가 평균이 θ, 분산이 1인 정규분포를 따르고 서로 독립인 확률변수이며, 관리상태의 모수값이 θ_0, 기각품질수준이 $\theta_1(>\theta_0)$이라 하자. 이 경우에 대한 평균런길이를 계산하기 위하여 먼저 단순가설 $H_0: \theta=\theta_0$, $H_1: \theta=\theta_1$에 대해 경계선 $(0, h)$를 사용하는 축차확률비검정을 알아보기로 한다.

로그확률비는

$$Z_n = (\theta_1 - \theta_0)(X_n - \frac{\theta_0 + \theta_1}{2})$$

이므로, Z_n은 평균이 $\mu = (\theta_1 - \theta_0)(\theta - (\theta_0 + \theta_1)/2)$이고 분산이 $\sigma^2 = (\theta_1 - \theta_0)^2$인 정규분포를 따른다. 또한 이 경우에 $E(e^{d(\theta) \cdot Z}) = 1$을 만족하는 0이 아닌 유일근 $d(\theta)$는

$$d(\theta) = -\frac{2}{\theta_1 - \theta_0}(\theta - \frac{\theta_0 + \theta_1}{2})$$

이다.

관측값이 정규분포일 때 CBST 방법으로 근사된 식 (2.9)와 (2.10)의 u와 l은, $\phi(\cdot)$와 $\Phi(\cdot)$가 각각 표준정규분포의 확률밀도함수와 누적분포함수일 때

$$u \approx x(u) - h + \mu + \sigma \cdot \frac{\phi\left\{\frac{x(u) - h + \mu}{\sigma}\right\}}{\Phi\left\{\frac{x(u) - h + \mu}{\sigma}\right\}}, \tag{3.1}$$

$$l \approx y(l) + \mu - \sigma \cdot \frac{\phi\left\{\frac{-y(l) - \mu}{\sigma}\right\}}{\Phi\left\{\frac{-y(l) - \mu}{\sigma}\right\}} \tag{3.2}$$

와 같이 계산되며, 식 (2.7)과 (2.8)의 $x(u)$와 $y(l)$은

$$x(u) \approx h + u - \mu + \sigma \cdot \frac{\phi\left\{\frac{u + h - \mu}{\sigma}\right\} - \phi\left\{\frac{u - \mu}{\sigma}\right\}}{\Phi\left\{\frac{u + h - \mu}{\sigma}\right\} - \Phi\left\{\frac{u - \mu}{\sigma}\right\}}, \tag{3.3}$$

$$y(l) \approx l - \mu + \sigma \cdot \frac{\phi\left\{\frac{l - \mu}{\sigma}\right\} - \phi\left\{\frac{l - h - \mu}{\sigma}\right\}}{\Phi\left\{\frac{l - \mu}{\sigma}\right\} - \Phi\left\{\frac{l - h - \mu}{\sigma}\right\}} \tag{3.4}$$

와 같이 표현된다(상세한 과정은 박창순(1992)과 이재헌, 박창순, 그리고 김병천(1994) 참조). 따라서 u와 l, $x(u)$와 $y(l)$은 식 (3.1), (3.2)와 식 (3.3), (3.4)의 비선형방정식에 대해 이분법을 사용하여 구할 수 있다. u와 l을 계산할 때 간편성을 위해 $\theta_1 = -\theta_0$, $\theta' = \theta/(\theta_1 - \theta_0)$, 그리고 $h' = h/(\theta_1 - \theta_0)$로 변환한다. 이 경우 θ_0'는 항상 -0.5이고 θ_1'는 0.5가 됨을 알 수 있다. <표 1>에는 여러 가지의 h'에 대해 u와 l을 계산한 결과가 나타나 있다.

<표 1>을 살펴보면 u와 l의 값은 여러 종류의 h'의 값에 대해 유사하며, 특히 h'이 5 이상이면 동일함을 알 수 있다. 경계선이 (b, a)인 축차확률비검정에서는 u와 l의 값이 음수인 b와 양수인 a에 관계없이 동일했으나(이재헌, 박창순, 그리고 김병천(1994)), 누적합관리도에서는 아래 경계선 b가 0인 경우이므로 작은 h'에 대해서는 u와 l이 h'에 따라 조금 다르

<표 1> 정규분포의 경우 u와 l의 값

	$h'=2$		$h'=3$		$h'=4$		$h'=5$		$h'=6$	
θ'	u	l	u	l	u	l	u	l	u	l
-1.00	0.4479	-0.8961	0.4468	-0.8579	0.4468	-0.8537	0.4468	-0.8535	0.4468	-0.8535
-0.90	0.4617	-0.8619	0.4604	-0.8291	0.4604	-0.8257	0.4604	-0.8256	0.4604	-0.8256
-0.80	0.4763	-0.8294	0.4747	-0.8013	0.4746	-0.7985	0.4746	-0.7984	0.4746	-0.7984
-0.70	0.4914	-0.7985	0.4895	-0.7744	0.4894	-0.7723	0.4894	-0.7722	0.4894	-0.7722
-0.60	0.5073	-0.7690	0.5050	-0.7486	0.5049	-0.7469	0.5049	-0.7468	0.5049	-0.7468
-0.50	0.5240	-0.7410	0.5211	-0.7237	0.5210	-0.7223	0.5210	-0.7223	0.5210	-0.7223
-0.40	0.5414	-0.7144	0.5379	-0.6997	0.5378	-0.6986	0.5378	-0.6986	0.5378	-0.6986
-0.30	0.5596	-0.6890	0.5554	-0.6766	0.5552	-0.6757	0.5552	-0.6757	0.5552	-0.6757
-0.20	0.5787	-0.6648	0.5736	-0.6543	0.5734	-0.6537	0.5734	-0.6537	0.5734	-0.6537
-0.10	0.5987	-0.6417	0.5926	-0.6330	0.5923	-0.6325	0.5923	-0.6325	0.5923	-0.6325
0.00	0.6197	-0.6197	0.6124	-0.6124	0.6120	-0.6120	0.6120	-0.6120	0.6120	-0.6120
0.10	0.6417	-0.5987	0.6330	-0.5926	0.6325	-0.5923	0.6325	-0.5923	0.6325	-0.5923
0.20	0.6648	-0.5787	0.6543	-0.5736	0.6537	-0.5734	0.6537	-0.5734	0.6537	-0.5734
0.30	0.6890	-0.5596	0.6766	-0.5554	0.6757	-0.5552	0.6757	-0.5552	0.6757	-0.5552
0.40	0.7144	-0.5414	0.6997	-0.5379	0.6986	-0.5378	0.6986	-0.5378	0.6986	-0.5378
0.50	0.7410	-0.5240	0.7237	-0.5211	0.7223	-0.5210	0.7223	-0.5210	0.7223	-0.5210
0.60	0.7690	-0.5073	0.7486	-0.5050	0.7469	-0.5049	0.7468	-0.5049	0.7468	-0.5049
0.70	0.7985	-0.4914	0.7744	-0.4895	0.7723	-0.4894	0.7722	-0.4894	0.7722	-0.4894
0.80	0.8294	-0.4763	0.8013	-0.4747	0.7985	-0.4746	0.7984	-0.4746	0.7984	-0.4746
0.90	0.8619	-0.4617	0.8291	-0.4604	0.8257	-0.4604	0.8256	-0.4604	0.8256	-0.4604
1.00	0.8961	-0.4479	0.8579	-0.4468	0.8537	-0.4468	0.8535	-0.4468	0.8535	-0.4468

게 나타났다. 그러나 서로 큰 차이가 없으므로 h'이 5 이상인 동일한 u와 l의 값에 대해 단순선형회귀모형을 이용하여 다음과 같은 θ'의 일차식을 얻었다. ($R^2=0.98973$)

$$u(\theta') = 0.626052 + 0.202431 \cdot \theta', \tag{3.5}$$

$$l(\theta') = -0.626052 + 0.202431 \cdot \theta'. \tag{3.6}$$

식 (3.5)와 (3.6)의 함수식은 이재헌, 박창순, 그리고 김병천(1994)이 경계선 (b, a)인 축차확률비검정에서 구한 u와 l에 대한 추정식과 거의 유사함을 알 수 있다.

또한 식 (3.1)에서 (3.4)까지를 살펴보면, $h\to\infty$인 경우에는 $x(u) \approx h-u$, $y(l) \approx -l$의 관계가 성립함을 알 수 있다. (식 (3.1)부터 (3.4)까지에서 $x(u) = h-u$, $y(l) = -l$을 대입한 후 $h\to\infty$인 경우를 고려하면 식 (3.1)과 (3.3), 그리고 식 (3.2)와 (3.4)는 동일해진다.) 따

라서 다음의 근사식을 얻는다.

$$x(u) \approx h' - u(\theta')$$
$$y(l) \approx -l(\theta').$$

이제 식 (3.5)와 (3.6)을 이용하면 식 (2.11)의 평균표본수 $E(N;\theta)$의 식에서 $E(Z;\theta)\neq 0$인 경우는 쉽게 계산이 되며, $E(Z;\theta)=0$인 경우에는

$$E[(S_N^{h'})^2|S_{N-1}^{h'}=h'-u(\theta')] = \{h'-u(\theta')\}^2+\sigma^2+\sigma\cdot\{2h'-u(\theta')-\mu\}\cdot\frac{\phi\{\mu-u(\theta')\}}{\Phi\{\mu-u(\theta')\}}, \tag{3.7}$$

$$E[(S_N^0)^2|S_{N-1}^0=-l(\theta')] = \{-l(\theta')\}^2+\sigma^2+\sigma\cdot\{l(\theta')+\mu\}\cdot\frac{\phi\{l(\theta')-\mu\}}{\Phi\{l(\theta')-\mu\}} \tag{3.8}$$

을 이용하여 계산할 수 있다.

유사한 방법으로 식 (2.13)의 검사특성함수 $OC(\theta')$은

$$\begin{aligned} P(\theta';h') &= E[\exp\{d(\theta')\cdot S_N^{h'}\}|S_{N-1}^{h'}=h'-u(\theta')] \\ &= \exp[\{d(\theta')\sigma\}^2/2+d(\theta')\{h'-u(\theta')+\mu\}]\cdot\frac{\Phi\left\{\frac{\mu-u(\theta')}{\sigma}+d(\theta')\sigma\right\}}{\Phi\left\{\frac{\mu-u(\theta')}{\sigma}\right\}}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} Q(\theta') &= E[\exp\{d(\theta')\cdot S_N^0\}|S_{N-1}^0=-l(\theta')] \\ &= \exp[\{d(\theta')\sigma\}^2/2+d(\theta')\{-l(\theta')+\mu\}]\cdot\frac{\Phi\left\{\frac{l(\theta')-\mu}{\sigma}-d(\theta')\sigma\right\}}{\Phi\left\{\frac{l(\theta')-\mu}{\sigma}\right\}} \end{aligned} \tag{3.10}$$

를 이용하여 구할 수 있다. 따라서 식 (2.14)의 평균런길이 $E(T;\theta')$는 식 (3.5)에서 (3.10)까지를 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$E(T;\theta')\approx\begin{cases}\dfrac{1}{E(Z;\theta')}\cdot\left\{h'+u(\theta')-l(\theta')\cdot\dfrac{P(\theta';h')-1}{Q(\theta')-1}\right\} & ,E(Z;\theta')\neq 0\text{인 경우}\\ \dfrac{1}{E(Z^2;\theta')}\cdot\{E[(S_N^{h'})^2|S_{N-1}^{h'}=h'-u(\theta')]-E[(S_N^0)^2|S_{N-1}^0=-l(\theta')] & \\ \qquad\cdot\dfrac{h'+u(\theta')}{l(\theta')}\Big\} & ,E(Z;\theta')=0\text{인 경우}\end{cases} \tag{3.11}$$

식 (3.11)의 정확도를 알아보기 위하여 Goel과 Wu(1971)가 제안한 SLAE(Systems of Linear Algebraic Equations) 방법으로 계산한 값을 참값으로 간주하여 이와 비교하였다. SLAE 방법은 평균런길이를 표현한 적분식을 가우시안 구적법을 이용하여 선형연립방정식으로 근사시켜 계산하는 방법으로서, 거의 정확한 값을 구할 수 있으며 구적점의 수를 증가시킬수록 정확해지게 된다. 평균런길이를 계산하는 방법으로는 SLAE 방법 이외에 Markov chain을 이용하는 방법이 있으나 유사한 결과를 주기 때문에 여기서는 SLAE 방법을 사용하였다. SLAE 방법의

<표 2> 정규분포의 경우 평균런길이 비교

결정구간	θ'	SLAE 방법	CBST 방법	수정된 CBST 방법
h' = 3	-0.5	117.60	113.38	114.16
	-0.3	48.06	46.58	47.59
	-0.1	23.35	22.80	24.18
	0.1	13.40	13.16	12.64
	0.3	8.81	8.68	8.64
	0.5	6.40	6.32	6.32
h' = 4	-0.5	335.37	323.61	326.04
	-0.3	100.23	97.37	99.41
	-0.1	38.81	38.03	40.10
	0.1	19.46	19.18	18.55
	0.3	11.94	11.80	11.75
	0.5	8.38	8.30	8.30
h' = 5	-0.5	930.88	898.76	905.42
	-0.3	198.04	192.71	196.58
	-0.1	59.91	58.87	61.75
	0.1	26.23	25.93	25.20
	0.3	15.16	15.02	14.97
	0.5	10.38	10.29	10.29
h' = 6	-0.5	2553.08	2465.61	2483.79
	-0.3	379.01	369.17	376.37
	-0.1	87.90	86.53	90.42
	0.1	33.59	33.27	32.46
	0.3	18.43	18.29	18.24
	0.5	12.37	12.29	12.29
h' = 7	-0.5	6965.91	6728.20	6777.67
	-0.3	711.48	693.43	706.71
	-0.1	124.30	122.53	127.64
	0.1	41.43	41.09	40.22
	0.3	21.73	21.59	21.53
	0.5	14.37	14.29	14.29

단점은 차수가 구적점의 수인 역행렬을 구하는 등 메모리를 많이 차지하는 컴퓨터 프로그램 작업을 해야한다는 것이다. <표 2>를 살펴보면 주어진 h'에 대한 평균런길이는 수정된 CBST 방법과 CBST 방법이 거의 동일한 값으로 계산되며, 참값인 SLAE 값과도 큰 차이가 없어 평

균런길이를 추정하는 좋은 방법임을 알 수 있다.

또한 식 (2.15)에 나타나 있듯이 관리상태의 평균런길이가 A_0로 주어진 경우, 즉

$$A_0 = \frac{1}{E(Z;0.5)} \cdot \left\{ h' + u(0.5) - l(0.5) \cdot \frac{P(0.5;h')-1}{Q(0.5)-1} \right\} \qquad (3.12)$$

일 때($\theta=\theta_0$이면 $\theta'=0.5$임) 이를 만족하는 결정구간 h'를 이분법을 사용하여 계산한 결과가 <표 3>에 나타나 있다. 또한 계산된 h'의 정확성을 위해 이것을 결정구간으로 하여 SLAE 방법으로 $E(T;0.5) \equiv A_0^*$를 계산하여 상수 A_0와 비교하였다. <표 3>에서 볼 수 있듯이 상수 A_0가 커질수록 A_0^*와의 차이가 커지나 오차의 측면을 고려하면 거의 모든 경우에 있어서 3% 이내로 나타났다.

Gan(1991)은 정규분포의 경우 상수 A_0를 만족하는 결정구간을 적분방정식의 수치해석적 풀이를 통하여 계산하여, θ_0, θ_1, A_0, 그리고 h에 대한 그래프를 제시하였다. Gan(1991)의 그래프에서 소수점 이하까지 정확한 h를 계산하는데 어려움이 있어 Gan(1991)의 결과를 <표 3>에 나타내지는 않았지만, 대략적으로 h를 구하여 이 논문의 값과 비교해 본 결과 거의 동일함을 알 수 있었다.(Gan(1991)의 p281 <그림 2>에서 $k=0.5$이고 이 때 선정된 h에서 $\theta_0'=-0.5$를 더해준 값이 이 논문에서의 h'임.) Gan(1991)의 방법은 SLAE와 유사하게 평균런길이의 적분방정식을 이용한 수치해석적 접근방법이고, 본 논문의 방법은 평균런길이의 근사식을 유도하여 접근한 것이다. 물론 이 논문의 방법에서도 식 (3.12)를 풀기 위하여 간단한 수치해석적인 방법을 이용해야 하지만, Gan(1991)의 방법에 비해서는 아주 간단한 프로그램 작업과 적은 컴퓨터 메모리를 사용하여 결정구간을 구할 수 있는 장점이 있다.

<표 3> 정규분포의 경우 주어진 상수 A_0에 대한 결정구간 h'

A_0	h'	A_0^*	(오차 : %)
100	2.877	103.03	(3.03)
200	3.530	205.94	(2.97)
300	3.919	308.48	(2.83)
400	4.199	411.53	(2.88)
500	4.416	513.92	(2.78)
600	4.595	616.89	(2.82)
700	4.747	720.09	(2.87)
800	4.878	822.56	(2.82)
900	4.994	925.24	(2.80)
1000	5.098	1028.01	(2.80)

(A_0^* = 주어진 h'에 대해 SLAE 방법으로 계산된 $E(T;0.5)$값 , 오차 = $\frac{|A_0^*-A_0|}{A_0} \times 100$)

4. 지수분포의 경우

$\{X_i,\ i=1,2,\cdots\}$가 확률밀도함수 $f(x;\lambda)=\lambda\cdot e^{-\lambda x}$, $x>0$를 따르고 서로 독립인 확률변수일 때, 관리상태에서의 모수값이 $\lambda=1$이고 기각품질수준이 $\lambda=\lambda_1(>1)$인 누적합관리도의 절차를 생각해 보자. 이 경우 $Z_n=-(\lambda_1-1)X_n+\log\lambda_1$이고, $d(\lambda)$는 $\lambda\cdot\lambda_1^d/\{(\lambda_1-1)d+\lambda\}=1$을 만족하는 0이 아닌 유일근이다.

정규분포일 때와 유사한 방법으로 u와 l을 계산하면

$$u \approx -\frac{\lambda_1-1}{\lambda}+\frac{\log\lambda_1+x(u)-h}{1-\exp\left[-\lambda\cdot\dfrac{\log\lambda_1+x(u)-h}{\lambda_1-1}\right]}, \tag{4.1}$$

$$l = -\frac{\lambda_1-1}{\lambda} \tag{4.2}$$

이 된다. 관측값이 지수분포를 따를 경우 식 (4.2)의 l은 경계선 h와 $y(l)$에 의존하지 않는 수식의 형태로 표현되므로, $y(l)$은 고려할 필요가 없음을 알 수 있다. 다음으로 식 (2.7)의 $x(u)$는

$$x(u) \approx \frac{\lambda_1-1}{\lambda}+h-\frac{\log\lambda_1-u}{1-\exp\left[-\lambda\cdot\dfrac{\log\lambda_1-u}{\lambda_1-1}\right]} \tag{4.3}$$

와 같이 계산된다(상세한 과정은 이재헌, 박창순, 그리고 김병천(1994) 참조). 위의 식 (4.1)과 (4.3)을 비교해 보면 $x(u)\ =\ h-u$의 관계가 정확하게 성립함을 알 수 있다.(식 (4.1)과 (4.3)에 $x(u)\ =\ h-u$를 대입하면 두 식이 동일해짐.) 따라서 식 (4.1)은

$$u \approx -\frac{\lambda_1-1}{\lambda}+\frac{\log\lambda_1-u}{1-\exp\left[-\lambda\cdot\dfrac{\log\lambda_1-u}{\lambda_1-1}\right]} \tag{4.4}$$

이 되며, 경계선 h에 전혀 의존하지 않는 비선형방정식으로 표현된다. 식 (4.4)의 비선형방정식을 풀어서 u를 계산한 결과가 <표 4>에 수록되어 있으며, 이 값들을 중회귀분석을 이용하여 다음과 같은 λ와 λ_1의 함수식으로 추정하였다.($R^2=0.99185$)

$$u(\lambda)\ =\ -0.22177\ +\ 0.00664\cdot\lambda\ +\ 0.23414\cdot\lambda_1. \tag{4.5}$$

정규분포의 경우 $u(\theta')$와 $l(\theta')$은 $\theta_1-\theta_0$에 대해서만 영향을 받았지만($\theta'=\theta/(\theta_1-\theta_0)$임을 상기), 지수분포에서 $u(\lambda)$는 기각품질수준, 즉 λ_1에 영향을 받기 때문에 λ_1을 포함시킨 함수식으로 추정하였다.

<표 4> 지수분포의 경우 u의 값

λ	λ_1=1.1	λ_1=1.2	λ_1=1.3	λ_1=1.4	λ_1=1.5
1.0	.03386	.06460	.09275	.11871	.14279
1.1	.03405	.06495	.09324	.11932	.14350
1.2	.03423	.06530	.09373	.11992	.14420
1.3	.03442	.06564	.09420	.12051	.14489
1.4	.03460	.06598	.09467	.12109	.14557
1.5	.03478	.06631	.09513	.12167	.14624
1.6	.03496	.06664	.09559	.12223	.14691
1.7	.03513	.06696	.09604	.12279	.14756
1.8	.03530	.06728	.09648	.12334	.14821
1.9	.03547	.06759	.09691	.12389	.14884
2.0	.03564	.06789	.09734	.12442	.14947

λ	λ_1=1.6	λ_1=1.7	λ_1=1.8	λ_1=1.9	λ_1=2.0
1.0	.16523	.18625	.20601	.22466	.24230
1.1	.16603	.18713	.20696	.22566	.24336
1.2	.16682	.18799	.20789	.22666	.24441
1.3	.16760	.18885	.20881	.22764	.24544
1.4	.16837	.18969	.20972	.22861	.24647
1.5	.16912	.19053	.21062	.22957	.24748
1.6	.16987	.19135	.21151	.23052	.24848
1.7	.17061	.19216	.21239	.23145	.24947
1.8	.17134	.19296	.21326	.23238	.25044
1.9	.17206	.19375	.21411	.23329	.25141
2.0	.17277	.19454	.21496	.23419	.25236

또한 식 (2.13)의 검사특성함수 $OC(\lambda)$는

$$P(\lambda; h) \approx \frac{\lambda \exp\{d(\lambda)(\log\lambda_1 + h - u(\lambda))\}\left[1-\exp\left\{-(\lambda + d(\lambda)(\lambda_1 - 1))\dfrac{\log\lambda_1 + h - u(\lambda)}{\lambda_1 - 1}\right\}\right]}{[\lambda + d(\lambda)(\lambda_1 - 1)]\left[1-\exp\left\{-\lambda\dfrac{\log\lambda_1 + h - u(\lambda)}{\lambda_1 - 1}\right\}\right]},$$

$$Q(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda + d(\lambda)(\lambda_1 - 1)}$$

와 식 (4.2), (4.5)를 사용하여 계산할 수 있다. 따라서 식 (2.14)의 평균런길이는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$E(T;\lambda) \approx \begin{cases} \dfrac{1}{E(Z;\lambda)} \cdot \left\{ h + u(\lambda) - l(\lambda) \cdot \dfrac{P(\lambda;h)-1}{Q(\lambda)-1} \right\} & , E(Z;\lambda) \neq 0\text{인 경우} \\ \dfrac{1}{E(Z^2;\lambda)} \cdot \{ E[(S_N^h)^2 | S_{N-1}^h = h - u(\lambda)] - E[(S_N^0)^2 | S_{N-1}^0 = -l(\lambda)] \\ \quad \cdot \dfrac{h+u(\lambda)}{l(\lambda)} \} & , E(Z;\lambda) = 0\text{인 경우} \end{cases} \tag{4.6}$$

식 (4.6)을 이용하여 계산된 평균런길이의 값이 <표 5>에 수록되어 있다. 지수분포의 경우 참값은 Stadje(1987)가 제안한 방법으로 얻은 값을 사용한다. Stadje(1987)는 관측값의 분포가 지수분포일 경우 축차확률비검정의 검사특성함수와 평균표본수에 대한 정확한 표현식을 제안하였으나, 표현식이 너무 복잡하여 실제 적용하기가 어렵고 이 방법으로는 결정구간을 찾는데 어려움이 있다. <표 5>를 살펴보면 정규분포의 경우와 마찬가지로 모든 경우에 대해 수정된 CBST 방법은 CBST 방법과 거의 유사한 결과를 나타내며, 참값인 Stadje(1987)의 방법과도 큰 차이가 없는 정확한 값을 제공해 줌을 알 수 있다.

또한 관리상태($\lambda=\lambda_0=1$)의 평균런길이가 A_0일 때의 결정구간 h가 <표 6>에 계산되어 있다. 또한 주어진 h를 사용하여 Stadje(1987)의 방법으로 $E(T;1) \equiv A_0^*$를 계산하여 A_0와 비교함으로써 h의 정확성을 알아보았다. 그 결과 모든 경우에 오차가 2% 이내로 나타났으며, 따라서 정규분포의 경우보다 h의 정확성이 더 높음을 알 수 있다. 이것은 지수분포의 경우 l이 식 (4.2)와 같이 정확하게 계산될 수 있기 때문이라 생각된다.(기각품질수준 λ_1의 다른 여러 값에 대해서도 유사한 결과를 얻었음.)

<표 5> 지수분포의 경우 평균런길이 비교

λ_1	h	λ	Stadje의 방법	CBST 방법	수정된 CBST 방법
1.2	2	1.0	348.59	350.67	350.20
		1.2	85.24	85.45	85.57
	3	1.0	1207.84	1213.97	1212.81
		1.2	144.84	145.06	145.18
1.4	3	1.0	424.15	428.27	430.20
		1.4	47.93	48.04	47.92
	4	1.0	1259.18	1270.63	1275.73
		1.4	67.23	67.35	67.23
1.6	3	1.0	252.53	256.08	257.15
		1.6	26.99	27.06	27.00
	4	1.0	741.54	751.40	754.23
		1.6	37.34	37.42	37.35
1.8	4	1.0	534.78	544.15	544.04
		1.8	25.50	25.57	25.56
	5	1.0	1497.63	1523.06	1522.77
		1.8	32.46	32.51	32.50

Gan(1994)은 정규분포에 대한 누적합관리도의 최적설계를 제시했던 것(Gan(1991))과 유사하게 수치해석적 방법을 이용, 관측값의 분포가 지수분포일 때 결정구간 h를 계산하여 λ_1, A_0, 그리고 h에 대한 그래프를 제시하였다. Gan(1994)의 그래프에서 대략적인 h를 구하여 이 논문의 값과 비교한 결과 거의 동일함을 알 수 있었다.(Gan(1994)의 p114-115 <그림 3a>-<그림 3b>에서 $k=\ln\lambda_1/(\lambda_1-1)$ 의 관계를 이용, 즉 $\lambda_1=1.2$ 일 때는 $k \doteq 0.91$, $\lambda_1=1.4$ 일 때는 $k \doteq 0.84$, h를 구한 후 이 h에 λ_1-1을 곱해준 값이 이 논문에서의 h임.)

<표 6> 지수분포의 경우 주어진 상수 A_0에 대한 결정구간 h

λ_1	A_0	h	A_0^*	(오차 : %)
1.2	100	1.195	99.43	(0.57)
	200	1.612	199.13	(0.44)
	300	1.888	298.45	(0.52)
	400	2.098	397.92	(0.52)
	500	2.269	497.88	(0.42)
	600	2.412	597.01	(0.50)
	700	2.537	697.09	(0.42)
	800	2.647	796.90	(0.39)
	900	2.745	896.16	(0.43)
	1000	2.834	995.63	(0.44)
1.4	100	1.809	98.25	(1.75)
	200	2.346	196.62	(1.69)
	300	2.686	295.70	(1.43)
	400	2.936	394.46	(1.39)
	500	3.134	493.04	(1.39)
	600	3.299	592.00	(1.33)
	700	3.440	690.88	(1.30)
	800	3.563	789.57	(1.30)
	900	3.672	887.98	(1.34)
	1000	3.771	987.32	(1.27)

(A_0^* = 주어진 h에 대해 Stadje의 방법으로 계산된 $E(T;1)$ 값 , 오차 = $\dfrac{|A_0^*-A_0|}{A_0}\times 100$)

5. 결론

제조공정에서 발생하는 품질특성치의 변동은 우연원인(random cause)과 이상원인(assignable cause)으로 나누어 생각하는데 공정에 우연원인만이 존재하는 경우를 관리상태(in-control)라

하고, 공정에 우연원인 외에 이상원인이 발생한 상태를 이상상태(out-of-control)인 것으로 판단한다. 따라서 통계적 공정관리는 이상원인이 발생하면 이를 신속하게 탐지하고 그 원인을 찾아내어 공정을 다시 관리상태를 유지하도록 하는 것이 주된 목적이다. Page(1954)가 제안한 누적합관리도는 통계적 공정관리에서 아주 유용하면서도 빈번히 사용되는 도구인 관리도중에 하나이다.

이상원인이 발생하여 공정을 중지할 때까지 관측된 표본의 수를 런길이(run length)라 정의하고 그 기대값을 평균런길이(average run length)라 하며, 관리도의 효율은 이 평균런길이를 사용하여 평가한다. 가장 효율적인 관리도는 공정이 관리상태일 때 평균런길이가 주어진 상수 A_0를 만족하면서 공정이 이상상태일 때의 평균런길이를 최소화하는 관리도를 의미하며, 이를 만족하는 관리모수를 설정하는 과정을 관리도의 통계적 설계라고 한다.

이 논문에서는 축차확률비검정에 대해 박창순(1992)이 제안한 CBST 방법을 누적합관리도에 수정, 적용하여 평균런길이를 근사하는 방법과 이 방법을 이용하여 누적합관리도의 통계적 설계, 즉 누적합관리도의 관리모수인 결정구간 h를 설정하는 방법을 제안하였다. 또한 관측값이 정규분포와 지수분포를 따를 경우에 적용하여 제안된 방법의 정확성을 비교하였다. 그 결과 이 논문에서 제안된 방법은 정확한 평균런길이의 값과 공정이 관리상태일 때의 평균런길이 A_0를 잘 만족하는 결정구간 h를 제공하는 것으로 나타났다. 이 논문의 방법을 Gan(1991, 1994)의 방법과 비교해 보면, Gan의 방법에 비해 아주 간단한 프로그램 작업과 적은 컴퓨터 메모리를 사용하면서도 동일한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있었다.

참고문헌

[1] Gan, F. F. (1991). An Optimal Design of CUSUM Quality Control Charts, *Journal of Quality Technology*, Vol. 23, No. 4, 279-286.

[2] Gan, F. F. (1994). Design of Optimal Exponential CUSUM Control Charts, *Journal of Quality Technology*, Vol. 26, No. 2, 109-124.

[3] Goel, A. L., and Wu, S. M. (1971). Determination of A.R.L. and a Contour Nomogram for CUSUM Charts to Control Normal Mean, *Technometrics*, Vol. 13, No. 2, 221-230.

[4] Khan, R. A. (1978). Wald's Approximations to the Average Run Length in CUSUM Procedures, *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 2, 63-77.

[5] Kim, B. C., Park, C. S., Park, Y. H., and Lee, J. H. (1994). A Heuristic Approach for Approximating the ARL of the CUSUM Chart, *Journal of the Korean Statistical Society*, Vol. 23, No. 1, 89-102.

[6] Lee, J. H., Park, C. S., and Kim, B. C. (1994). An Estimation Method for the Excess over the Boundaries in the SPRT and its Applications, *Sequential Analysis*, Vol. 13, No. 2, 127-143.

[7] Moustakides, G. V. (1986). Optimal Stopping Times for Detecting Changes in Distributions, *Annals of Statistics*, Vol. 14, 1379-1387.

[8] Page, E. S. (1954). Continuous Inspection Schemes, *Biometrika*, Vol. 41, 100-114.

[9] Park, C. S. (1987). A Corrected Wiener Process Approximation for CUSUM ARLs, *Sequential Analysis*, Vol. 6, No. 3, 257-265.

[10] Park, C. S. (1992). An Approximation Method for the Characteristics of the Sequential Probability Ratio Test, *Sequential Analysis*, Vol. 11, No. 1, 55-72.

[11] Park, C. S., and Kim, B. C. (1990). A CUSUM Chart Based on Log Probability Ratio Statistic, *Journal of the Korean Statistical Society*, Vol. 19, No. 2, 160-170.

[12] Regula, G. A. (1976). Optimal CUSUM Procedures to Detect a Change in Distribution for the Gamma Family, *Ph. D. Thesis, Case Western Reserve University*, Cleveland, Ohio.

[13] Reynolds, M. R., Jr. (1975). Approximations to the Average Run Length in Cumulative Sum Control Charts, *Technometrics*, Vol. 17, No. 1, 65-71.

[14] Stadje, W. (1987). On the SPRT for the Mean of an Exponential Distribution, *Statistics and Probability Letters*, Vol. 5, 389-395.

[15] Wald, A. (1947). *Sequential Analysis*, Wiley, New York.

An Approximation Method for the ARL and the Decision Interval in CUSUM Control Charts

Jae Heon Lee[3) , Chang Soon Park[4)

Abstract

Cumulative sum (CUSUM) control charts are widely used in industry for the statistical process control. The statistical design procedure in CUSUM charts tells how to choose the decision interval value. The decision interval is primarily determined by the desired in-control ARL - that is, by the acceptable frequency of false out-of-control signals.

In this paper we propose a new approximation method for calculating the ARL and determining the decision interval. The performance of the proposed method is examined by evaluating the accuracy of estimated ARLs and decision intervals in normal and exponential cases.

3) Full-time Lecturer, Department of Industrial Information Engineering, Kwangju University, Kwangju, 503-703, Korea.

4) Professor, Department of Applied Statistics, Chung-Ang University, Seoul, 156-756, Korea.