응용통계연구 제10권 2호
1997년 9월 pp. 403-411

퍼지 선형회귀모형과 응용[1)]

이 성 호[2)], 홍 덕 헌[3)]

요 약

본 연구에서는 시스템을 지배하는 변수들에 대한 자료가 부정확하거나 애매모호한 경우에 통계적 회귀모형의 대안으로서 제안된 퍼지 회귀모형과 그 모수 추정을 살펴 본다. 그리고 사례연구를 통하여 퍼지 회귀모형의 장단점을 이해하고 결과를 비교해 본다.

1. 머리말

1965년 Zadeh교수에 의해 소개된 퍼지이론은 지난 30년동안 폭발적으로 발전하였고 최근 일본 전자업체의 성공적 응용 사례는 퍼지이론에 대한 관심을 한층 불러 일으켰다. 통계학자들의 퍼지집합에 대한 견해는 학자들마다 분야마다 서로 다른 견해를 보이고 있다. 그 대표적 최근 논문으로서 Laviolette외(1995) 논문과 이에 대한 토론논문등은 학자들 사이에 큰 차이를 잘 보여주고 있다. 한편 많은 통계학자들의 반론에도 불구하고 실제 응용에 있어서는 퍼지이론이 장점을 갖는 많은 분야에서 통계적 분석방법을 대체한 퍼지 분석방법이 제안되고 있다.

현실세계에서 시스템 구조를 지배하는 변수들에 대한 자료는 가끔 부정확하거나 애매모호한 경우가 실제 없지 않다. 예를 들어 인간의 판단에 의거하는 자료를 사용할 때 불분명한 경우가 많다. 이러한 경우에 퍼지이론이 변수들간 관계를 규명하기 위해 사용될 때 퍼지 분석 방법은 애매모호한 것을 표현하기에 용이하므로 통계이론보다 자료분석에 보다 합리적인 방법인 것으로 주장되고 있다.

그러나 본 연구에서는 광범위한 통계이론과 퍼지이론을 전반적으로 논하는데 있지 않고 여기서는 통계적 자료 분석방법중 널리 사용되는 통계적 회귀모형에 대응되는 퍼지 회귀모형에 관하여 퍼지이론 적용의 장단점 및 문제점을 살펴보고 저자들에 의해 제안된 새로운 퍼지 회귀모형과 그 사례연구를 소개하고자 한다.

---

1) 본 연구는 대구대학교의 일부 재정지원에 의하여 수행되었음.
2) (712-714) 경북 경산시 진량면 내리리 15번지, 대구대학교 자연과학대학 통계학과 부교수.
3) (712-702) 경북 경산시 하양읍, 대구효성카톨릭대학교 기계자동차공학부 부교수.

2. 퍼지연산과 퍼지 회귀모형

2.1. 퍼지연산

먼저, 퍼지집합 및 연산에 대한 기본설명은 이 광형외(1991)를 참고하고 여기서는 퍼지 회귀모형을 세울 때 필요한 개념만 간략히 소개하고자 한다. 퍼지숫자 A는 실수 R의 볼록 부분집합 (Convex subset)으로서 정규화된 소속함수를 갖는 퍼지집합이고 $A=(a,b,\alpha,\beta)_{LR}$ 로 표시한다. 여기서 소속함수

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & ,a \le x \le b \\ L(\frac{a-x}{\alpha}) & ,a-\alpha \le x \le a,\ \ \alpha > 0 \\ R(\frac{x-b}{\beta}) & ,b \le x \le b+\beta,\ \ \beta > 0 \end{cases}$$

이고 함수 L(·) 과 R(·)는 [0,1] →[0,1]인 비증가 연속함수이고 L(0)=R(0)=1 , L(1)= R(1)=0 이다. 이러한 퍼지숫자를 LR형 퍼지숫자라 부르고 $a=b$, L(·)=R(·) 이면 대칭 퍼지 숫자라 부르고 $A=(a,\alpha)_L$ 로 표시한다. 이러한 퍼지숫자 가운데 삼각 퍼지숫자가 많이 사용되는데 본 사례 연구에서도 삼각 퍼지숫자를 대상으로 하고 있다. 삼각 퍼지숫자 $A=(a,\alpha,\beta)$의 소속함수

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-(a-\alpha)}{\alpha} & ,a-\alpha \le x \le a \\ \frac{a+\beta-x}{\beta} & ,a \le x \le a+\beta \\ 0 & ,elsewhere \end{cases}$$

이다. 이러한 퍼지숫자간의 연산은 소속함수 $\mu_A(\cdot)$간 연산을 의미하며 퍼지 회귀모형에 적용하는 연산으로서는 t-norm(triangular norm)을 들 수 있다. t-norm T는 구간 [0,1]에서 값을 연산할 때 T:[0,1] x [0,1]→[0,1]인 함수로서 결합법칙 [T(T(x,y),z) = T(x,T(y,z))], 교환법칙 [T(x,y) = T(y,x)]을 만족하고 비감소 함수이면서 모든 x∈[0,1]에 대하여 T(x,1)=x, T(x,0)=0을 만족하는 함수 T를 말한다. $min(a,b)$, $a \cdot b$, $max(0,a+b-1)$, 그리고 $T_w(a,b)$,

$$T_w(a,b) = \begin{cases} a & ,b=1 \\ b & ,a=1 \\ 0 & ,elsewhere \end{cases}$$

는 t-norm들이며 특히 $T_w(a,b) \le T(a,b) \le min(a,b)$의 관계를 갖고 있다. T_w-norm은 뒤에 새로운 퍼지 회귀모형 제안에 사용된다. T-norm에 의한 퍼지숫자 A,B의 합 C=A⊕B 와 곱 D=A⊗B 는 Zadeh의 확장원칙 (Zadeh's extension principl)에 의해 다음과 같이 정의 된다.

$$\mu_C(z) = sup_{z=x+y}\ T(\mu_A(x),\mu_B(y)), \quad \mu_D(z) = sup_{z=xy}\ T(\mu_A(x),\mu_B(y)) .$$

2.2 퍼지 회귀모형

퍼지 회귀모형은 종속변수를 정확히 측정할 수 없을 때 하나의 대안으로서 Tanaka외 (1982)에 의해 소개되었고 그 이후로 많은 연구결과가 주로 Fussy Sets and System에 발표되었다. 지금까지 연구결과를 모델과 모수추정 차원에서 대별해 본다면 Tanaka외 (1982)에 의해 종속변수만 퍼지숫자인 퍼지 회귀모형이 소개된 이래 Tanaka(1987)에 의해 모델은 같으나 모수추정 방법에서 다른 기준을 제시하였고, Sakawa와 Yano(1992)에 의해 종속변수와 독립변수 모두를 퍼지숫자인 모델을 제시하고 모수 추정문제를 다룬 것으로 요약할 수 있다. 먼저 Tanaka(1987) 모델을 소개하면 다음과 같다.

$$Y_i^* = A_0 \oplus A_1 x_{i1} \oplus A_2 x_{i2} \oplus \cdots \oplus A_p x_{ip}, \ i = 1, 2, \cdots, n$$

여기서 A_j, $j=0,1,\cdots,p$, 는 퍼지숫자이고 x_{ij}는 모두 퍼지숫자가 아닌 실수이다. 그리고 퍼지숫자간 덧셈(⊕)은 T-norm중에서 *min(a,b)*를 사용하고 앞에서 소개한 $\mu_C(z) = sup_{z=x+y} min(\mu_A(x), \mu_B(y))$를 사용하였다(이 연산은 퍼지이론에서 가장 자 주 사용되어진다).

이 모델에 대한 이해를 돕기 위하여 한가지 최근 예를 들어보자(Chang외 (1996) 참조). 일정한 거리에서 비디오 디스플레이 터미날에서 나오는 문자를 읽을때 글자크기에 관한 영향을 분석하고자 한다. 그러면 독립변수인 문자크기는 정확히 측정할 수 있지만 종속변수가 되는 사람들의 반응, 즉 개인간 읽기능력은 시력, 나이, 여건, 피로정도등 여러 요인에 달려 있으므로 정확히 수량화하기가 쉽지 않다. 그리하여 그들은 종속변수값이 불분명하고 애매모호하다고 판단하고 다른 통계적 분석방법보다 퍼지 회귀모형을 제안하고 분석하였다. 그러나 이러한 퍼지 회귀모형은 Redden과 Woodall (1996)이 지적한 것 처럼 통계적 회귀모형과는 여러 면에서 부족하고 기본적으로 연구되어야 할 면이 많다. 이 문제는 모수추정 문제에서 거론하기로 한다.

Sakawa와 Yano (1992)는 Tanaka (1987) 모델을 일반화 하였다.

$$Y_i^* = A_0 \oplus (A_1 \otimes X_{i1}) \oplus \cdots \oplus (A_p \otimes X_{ip}), \ i = 1, 2, \cdots, n$$

여기서, A_j, X_{ij}는 모두 퍼지숫자들이고 Y_i도 물론 퍼지숫자이다. 여기서 퍼지숫자간 덧셈, 곱셈은 앞 Tanaka모형과 같지만 곱셈은 심각한 문제를 일으킨다. 즉, min(a,b) norm 을 사용하면 퍼지숫자간 곱셈은 그 결과가 덧셈과는 달리 폐쇄된 형태(Closed form)로 나오지 않는다(이광형외 (1991) 1권 6.3절 참조).

따라서 이 모델에서 Y_i의 소속함수에 대한 명확한 형태(explicit form)는 모델을 이용하여 바로 구할 수 없고 또한 일반화시킬 수도 없다.

Hong과 Lee는 Sakawa와 Yano (1992)와 같은 모델을 사용하였지만 퍼지숫자간 연산은 min(a,b) norm을 사용하지 않고 T_w norm을 사용하였다. 그 이유는 T_w norm을 사용하면 Y_i^*가 폐쇄된 형태(Closed form)로 모델에서 바로 얻어질 수 있기 때문이고 또한 회귀 모형에서 그 연산이 나름대로 의미를 갖고 있기 때문이다(Hong과 Lee를 참조). 이 모델을 이용한 사례연구가 4장에서 주어진다.

3. 모수추정

통계적 회귀모형에서는 관측치와 추정치간 차이는 여러 요인이 있지만 그것을 오차항으로 놓고 모수추정은 오차항의 자승합을 최소화하는 최소자승추정법을 그 기본으로 하고 있으며 그외 많은 다양한 방법과 이론적 고찰이 오래동안 이루어져 왔다. 그러나 퍼지 회귀모형은 통계적 회귀모형과는 달리 그 기본 차이를 시스템 구조를 설명하는 변수나 모수들의 부정확함 또는 애매모호함에 중점을 두고 있다. 따라서 퍼지 회귀모형은 출발점에 있어서 통계적 회귀모형과는 다른 시각이다. Tanaka (1987)가 제안한 모수 추정방법은 주어진 조건아래 모델을 통해서 예측된 퍼지숫자 Y_i^* , $i=1,2,\cdots,n$. 의 애매모호한 정도를 나타내는 구간 (또는 폭의 합)을 최소화하는 추정치를 구하는 것이다. 이 추정방법은 기본적으로 선형계획문제와 같은 구조를 갖게 되며 시뮬레이션에 의해 근사값을 구하게 된다. 이러한 모수추정 방법을 놓고서 볼 때 퍼지회귀 모형의 많은 문제점이 지적되고 있는데 Tanaka (1987)의 사례연구를 통하여 살펴보자. 그는 아래와 같은 모형과 모수추정을 제안하였다.

$$Y_i^* = A_0 \oplus A_1 x_{i1} \oplus \cdots \oplus A_p x_{ip}, \quad i=1,2,\cdots,n$$

여기서 Y_i^*, A_j는 편의상 모두 삼각 퍼지숫자로서 $\alpha_j=\beta_j$인 대칭삼각 퍼지숫자 $A_j=(a_j, \alpha_j)$를 사용하였다. 그러면 퍼지숫자간 연산에 의해 $Y_i^*=(\sum_{j=0}^{p} x_{ij}a_j, \sum_{j=1}^{p} |x_{ij}| \alpha_j)$인 대칭삼각 퍼지숫자가 되고 이때 자료에 의해 주어진 관측치로서 퍼지숫자 Y_i는 $Y_i=(y_i, e_i)$로서 Y_i^*와는 다르다. 그러면 모수추정은 퍼지한 정도를 나타내는 한 지표인 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(|x_{ij}|\alpha_j)$를 최소화하되 Y_i와 Y_i^* 에 있어서 소속관계는 주어진 h (threshold 라 부른다), $0<h<1$, 값 이상에서는 Y_i의 구간이 Y_i^*의 구간에 포함되어야 한다는 조건을 만족시키는 추정치 (a_j, α_j)를 구하는 것이다. 이 방법은 결국 아래의 선형계획 문제로 요약될 수 있다 :

$$\text{minimize} \qquad J=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} |x_{ij}|\alpha_j$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad y_i &\le \sum_{j=0}^{p} a_j x_{ij} - (1-h)e_i + (1-h)\sum_{j=1}^{p} |x_{ij}|\alpha_j, \\ y_i &\ge \sum_{j=0}^{p} a_j x_{ij} + (1-h)e_i - (1-h)\sum_{j=1}^{p} |x_{ij}|\alpha_j. \end{aligned}$$

위의 퍼지 회귀모형은 $\alpha_j=0$인 퍼지 회귀계수 추정치 (Tanaka와 Watada (1988) 와 사례연구 참조)를 낳기도 하고 또한 스케일에 좌우되는 약점외에도 대표적으로 다음과 같은 질문에 통계적 회귀모형처럼 그 해답을 제시하지 못하거나 이견이 있다(Redden과 Woodall (1996) 참조).

(i) 어떤 독립변수를 포함시킬 것인가?

(ii) Y_i^*의 구간이 미지의 참값 Y_t의 구간 추정치가 될 수 있을까(소속 정도와 우도의 차이)?

(iii) 주어진 독립변수 값들에 대한 종속변수의 평균값의 추정치(통계적 회귀모형에서는 $E(Y|X=x)$)를 어떻게 할 것인가?

Sakawa와 Yano (1992) 역시 위의 문제들에 대한 언급은 없다. 단지 독립변수를 퍼지숫자화한 보다 일반화된 모형을 제안하고 폐쇄된 형태로 표현되지는 못하지만 h수준 절단을 이용한 모수추정 문제를 다루었다.

Hong과 Lee의 퍼지 회귀모형에서 모수추정은 아래의 선형계획 문제로 요약될 수 있다.

$$\text{minimize} \qquad J=\sum_{i=1}^{n} max_{1\le j\le p}(\,|a_j|\,\gamma_{ij},\ |x_{ij}|\,\alpha_j)$$

s.t.

$$y_i \le \sum_{j=1}^{p} a_j x_{ij}-(1-h)e_i+(1-h)\,max_{1\le j\le p}(\,|a_j|\,\gamma_{ij},\ |x_{ij}|\,\alpha_j),$$

$$y_i \ge \sum_{j=1}^{p} a_j x_{ij}+(1-h)e_i-(1-h)\,max_{1\le j\le p}(\,|a_j|\,\gamma_{ij},\ |x_{ij}|\,\alpha_j)$$

여기서 퍼지숫자 A_i, X_{ij}는 모두 대칭 삼각퍼지숫자들이고 $A_i=(a_i, \alpha_i)$이고 $X_{ij}=(x_{ij}, \gamma_{ij})$이다.

4. 사례연구

본 절에서는 Tanaka와 Watada (1988)의 예제를 놓고서 Hong과 Lee의 모형에 의한 모수추정과 Tanaka와 Watada의 결과를 비교해 보고자 한다.

아래 자료는 Tanaka와 Watada (1988)의 사례연구 자료로서 Y_i는 달러에 의한 엔화의 환율을 표시하는 퍼지숫자 (y_i, e_i)이고 x_i=산출가격지수(output price index) / 투입가격지수(input price index) 이고 기준연도는 1975년이다. 그리고 x_1은 석유산업, x_2는 화학공업, x_3는 철강업, x_4는 전자산업, x_5는 자동차산업 부문이다.

(표1)에서, e_i는 $e_i=y_i\times 0.05$에 의해 만들어진 것으로 판단된다. 즉 원자료는 퍼지숫자가 아니다. 평균치 y_i를 갖고서 퍼지숫자화 하기 위하여 일괄적으로 0.05를 곱하여 인위적으로 퍼지숫자화한 것으로 여겨진다.

앞에서 설명한 Tanaka모델에 의한 앞 13개 자료에 의한 모수추정치는 다음과 같다 (Tanaka and Watada (1988)참조).

A_0=(626.0, 0), A_1=(−1.50, 0), A_2=(6.28, 0),
A_3=(−6.32, 0.21), A_4=(−1.85, 0), A_5=(1.28, 0).

그러나 동일한 자료에 대한 Moskowitz와 Kim (1993)의 결과는 다음과 같다. 즉 퍼지회귀모형에서 결과는 모수추정 과정에서 암시되는 것처럼 약간의 차이가 날수 있다.

A_0=(635.31, 0), A_1=(−1.47, .0.02), A_2=(6.85, 0),
A_3=(−6.83, 0.07), A_4=(−1.87, 0), A_5=(0.41, 0).

(표1)

	Sample number i	Year quarter	Input data x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Fuzzy $Y_i=(y_i, e_i)$(Yen)
Training data	1	1979Ⅲ	106.1	89.3	111.6	83.3	89.1	(218.75, 10.94)
	2	Ⅳ	98.1	84.1	104.4	78.0	88.8	(238.37, 11.92)
	3	1980 Ⅰ	89.2	76.7	100.1	70.8	87.5	(243.38, 12.17)
	4	Ⅱ	96.8	71.1	95.9	71.3	81.7	(233.20, 11.66)
	5	Ⅲ	101.7	68.9	92.7	70.4	80.5	(220.19, 11.01)
	6	Ⅳ	102.9	69.9	95.5	71.1	80.6	(210.76, 10.54)
	7	1981 Ⅰ	98.9	70.9	96.6	73.7	81.5	(205.44, 10.27)
	8	Ⅱ	94.4	70.4	95.4	74.8	83.4	(219.45, 10.99)
	9	Ⅲ	94.8	68.5	93.0	75.1	84.1	(231.80, 11.59)
	10	Ⅳ	98.1	68.8	93.4	75.5	83.8	(224.93, 11.25)
	11	1982 Ⅰ	96.5	69.0	92.3	76.3	84.9	(233.05, 11.65)
	12	Ⅱ	96.1	68.6	89.7	76.6.	85.4	(244.14, 12.21)
	13	Ⅲ	93.9	68.2	86.8	76.2	85.1	(258.62, 12.93)
Checking data	14	1982Ⅳ	95.9	67.4	86.4	75.1	85.1	(260.22, 13.01)
	15	1983Ⅱ	106.1	67.5	87.7	74.3	83.9	(235.67, 11.78)

참고로 이 모델에 대한 기본 통계적 회귀분석 결과는 아래와 같다.

(표2) Analysis of Variance

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Prob>F
Model	5	2378.30358	475.66072	14.164	0.0015
Error	7	235.07492	33.58213		
Total	12	2613.37851			
Root MSE		5.79501	R-square	0.9100	
Dep Mean		229.41385	Adj R-sq	0.8458	
C.V.		2.52601			

Parameter Estimates

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H0: Parameter=0	Prob > |T|
INTERCEP	1	351.700850	194.90889382	1.804	0.1141
X1	1	-0.796880	0.90495777	-0.881	0.4078
X2	1	3.877397	1.57602932	2.460	0.0435
X3	1	-4.670089	1.12480328	-4.152	0.0043
X4	1	-1.118851	1.06791382	-1.048	0.3296
X5	1	2.437727	2.43685442	1.000	0.3505

위 모수 추정치들에 대한 통계적 유의성 검정결과에 의하면 상수항, X_1, X_4, X_5는 회귀모형에 포함여부가 의문시되고 모델 수정을 고려 할 것이다. 그러나 퍼지 회귀모형에서는 아직 그러한 기준이 없다. 한편 두 결과를 비교해 본다면 Tanaka와 Watada (1988) 모수 추정치는 이들 변수들에 대한 α_j는 모두 '0' 으로 퍼지숫자가 아닌 실수치이다. 하지만 이 사실이 모델 포함여부에 대한 판단기준이 될 이론적 근거는 아직 없다. 앞으로 퍼지 회귀모형이론 주창자들에 의해 연구되어야 할 과제이다.

Hong과 Lee에 의해 제안된 퍼지 회귀모형에 의한 모수 추정치는 다음과 같다. 여기서는 변수 X_{ij} 들을 퍼지숫자화 하기 위하여 $\gamma_{ij}=x_{ij}\times 0.07$을 사용하여 인위적으로 만들어 보았다. 결과는 아래와 같다.

$$A_0=(475.85,\ 21.56),\quad A_1=(-1.92,\ 0.13),\quad A_2=(2.72,\ 0.19),$$
$$A_3=(-3.55,\ 0.25),\quad A_4=(0.03,\ 0.0),\quad A_5=(0.95,\ 0.07).$$

추정과정은 먼저 퍼지숫자의 중심을 찾은 다음 폭을 최대화하는 값을 구하는 방법을 택하였다. 이 방법에 의하면 A_4는 거의 설명력이 없으므로 모델에서 제외시킬 수 있다. 검증자료 (14번째와 15번째 자료)에 의해 $h=0.2$에 대한 구간을 비교해 보면

(표3)

	원자료에 의한 구간	추정식에 의한 구간
14	(249.81, 270.63)	(234.97, 269.39)
15	(226.25, 245.09)	(214.32, 249.26)

(표3)에서 퍼지숫자 $Y_{14}^*=(252.28,\ 21.51)$, $Y_{15}^*=(231.79,\ 21.84)$와 같다. 원자료에 의한 구간이 추정식에 의한 구간에 포함되어야 하는데 14번째 자료에 대한 구간은 오른쪽 끝이 미미하나마 부족하다. 하지만 Hong과 Lee의 퍼지 회귀모형은 만족할 만한 결과를 보여준 것으로 판단되어진다.

5. 맺는말

사례연구를 통하여 Tanaka와 Watada (1988)의 결과와 Hong과 Lee의 모델에 의한 결과를 살펴 보았다. 퍼지 회귀모형은 응용사례가 발표되고 있지만 모델의 유의성에 대한 공식 검정절차가 없고 통계적 회귀모형이론과 비교해 볼때 아직 부족한 점이 많다. 또한 아직까지 필요한 이론이 다수 정립되지 않은 상태라 모수 추정도 각자 프로그램 방식에 의존하는 만큼 불편하다. 추정결과도 사례연구에서 본 것처럼 어느 정도의 오차를 보이는 것도 사실이다. 따라서 퍼지 회귀모형에서는 이러한 문제점들이 앞으로 해결되어야 할 과제들이고, 통계학자들은 퍼지 회귀이론이 설득력을 갖는 상황에 사용할 수 있는 통계적 분석기법의 개발 및 보급을 위해 노력해야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] 이광현, 오길록 (1991). 퍼지이론 및 응용 1권: 이론, 홍릉과학출판사, 서울
[2] Chang, P.T, Lee, E.S. and Konz, S.T. (1996). Applying fuzzy linear regression to VDT legibility, *Fuzzy sets and Systems* 80, 197-204.
[3] Hong, D.H and Lee, S.H. Possibilistic linear regression with fuzzy variables (submitted for publication).
[4] Laviolette, M, Seaman, J.W. Barrett, J.D and Woodall, W.H. (1995). A Probabilistic and statistical view of fuzzy methods, *Technometrics* 37, 249-261.
[5] Moskowitz, H and Kim, K (1993). On assessing the H value in fuzzy linear regression, *Fuzzy Sets and Systems* 58, 303-327.
[6] Peters, G. (1994). Fuzzy linear regression with fuzzy intervals, *Fuzzy Sets and Systems* 63, 45-55.
[7] Redden, D.T. and Woodall, W.H. (1994). Properties of certain fuzzy linear regression methods, *Fuzzy Sets and Systems* 64, 361-375.
[8] Redden, D.T. and Woodall, W.H. (1996). Further examination of fuzzy linear regression. *Fuzzy Sets and Systems* 79, 203-21 .
[9] Sakawa, M. and Yano, H. (1992). Fuzzy linear regression and its application, in: Kacprzyk, J. and Fedrizzi, M. Eds., *Studies in Fuzziness, Fuzzy Regression* Analysis, Vol.1 (Omnitech Press, Warsaw, Poland, 61-80.
[10] Sakawa, M. and Yano, H. (1992). Multiobjective fuzzy linear regression analysis for fuzzy input-output data, *Fuzzy Sets and Systems* 47, 173-181.
[11] Savic, D. and Pedryzc, W. (1991). Evaluation of fuzzy linear regression models, *Fuzzy Sets and Systems* 39, 51-63.
[12] Tanaka, H. (1987). Fuzzy data analysis by possibilistic linear models, *Fuzzy Sets and Systems* 24,363-375.
[13] Tanaka, H. and Ishibuchi, H. (1991). Identification of possibilistic linear systems by quadratic membership functions of fuzzy parameters, *Fuzzy Sets and Systems* 41, 145-160.
[14] Tanaka, H, Uegima, S. and Asai, K. (1982). Linear regression analysis with fuzzy model, *IEEE Trans. Systems Man Cybernet* 12, 903-907.
[15] Tanaka, H. and Watada, J. (1988). Possibilistic linear systems and their application to the linear regression model, *Fuzzy Sets and Systems* 27, 275-289.
[16] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets, *Infor. Control* 8, 338-353.

Fuzzy linear regression model and its application

Sungho Lee[4], Dug Hun Hong[5]

Abstract

Fuzzy linear regression model introduced by Tanaka et al. (1982) has been proposed and developed as an alternative to statistical linear regressin when our understanding of a phenomenon is imprecise or vague. In this paper we review fuzzy linear regression model and its parameter estimation and examine its strengths and weaknesses through case study. In addition another fuzzy linear model is introduced and applied to an economic study.

4) Department of Statistics, Taegu University, Kyungsan, Kyungbuk 712-714, Korea.
5) School of Mechanical and Automotive Engineering, Catholic University Of Taegu Hyosung, Kyungbuk 712-702, Korea.