⊠연구논문

수정 아레니우스 모형에서 가속수명시험에 대한 조건부 신뢰구간*

박병구 · 윤상철
경북대학교 자연과학대학 통계학과

Conditional Confidence Intervals for Accelerated Life Testing in Modified Arrhenius Model

Byung-Gu Park · Sang-Chul Yoon
Dept. of Statistics, Kyungpook National University

Abstract

In the context of accelerated life tests, procedures are given for estimating the parameters in the modified Arrhenius model and for estimating mean life at a given future stress level. The conditional confidence intervals are obtained by conditioning on ancillary statistics and pivotal quantity. Using the data of Tobias and Trindada(1986), we illustrate conditional confidence interval for parameters under use condition in the modified Arrhenius model.

1. 서론

가속수명시험은 시험경비나 시험시간을 단축시키기 위하여 실제 사용조건보다 열악한 조건에서 제품의 수명을 단축시키거나 성능을 급속히 저하시키는 다양한 시험방법으로 구성된다. 이 가속화시험의 목적은 짧은 기간에 적절한 시험절차를 통하여 자료를 얻은 후 실제 사용조건에서의 제품의 수명 또는 성능을 추정하는데 있다. 이런 문제에서 제품의 수명과 한 개 또는 그 이상의 스트레스 변수들 사이의 관계, 예를 들면 어떤 전기 절연체의 수명연구에서 수명과 실험온도 사이의 관계를 연구할 수 있

* 이 논문은 1997년도 교육부 기초과학 연구소 지원 연구 과제 연구비에 의하여 연구되었음.

다. 수명과 스트레스 변수간의 관계의 추정으로 실제 사용조건에서의 수명을 예측할 수 있다. McCool(1980), Meeker와 Hahn(1985) 등은 모수적 방법으로 관심 있는 신뢰도, 백분위수와 모수들의 정확한 신뢰구간을 구하였다. 또한 Lawless(1976)는 지수-역승법칙(exponential-inverse power rule) 모형에서 제2종 중도절단된 자료와 보조통계량을 사용하여 실제 사용조건의 평균수명을 구하였다. 그러나 대부분의 연구자들은 모수의 추정이나 최적설계 문제를 다루었지만 (Escobar와 Meeter(1993), Nelson(1970, 1990)) 보조통계량을 기초로 모수에 대한 조건부 신뢰구간의 연구는 미흡한 실정이다. 이런 관점에서 회귀모형의 성질로부터 수정 아레니우스 모형의 모수를 추론하고자 한다. 수정 아레니우스 모형은 스트레스 수준 x_i에서

$$\theta_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i) \tag{1}$$

이다. 여기서 $x_i = x_i^* - \bar{x}$은 온도, $\bar{x} = \sum_{i=1}^{N} r_i x_i^* / \sum_{i=1}^{N} r_i$, β_1와 β_2는 미지인 모수이며 $x_i^* = (bK_i)^{-1}$, $b = 8.617 \times 10^{-5}$는 볼쯔만(Boltzmann's) 상수이고 K_i은 켈빈(Kelvin) 절대온도이다.

이 연구에서는 제2종 중도절단 자료를 이용하여 수정 아레니우스 모형의 모수에 대한 최우추정 절차와 조건부 신뢰구간의 추정 절차를 다루고자 한다. 여기서 대수수명은 스트레스의 선형함수로 가정한다. 제2절에서는 회귀모형에서 조건부 신뢰구간을 포함하는 일반적인 형태의 성질들을 제시하고 보조통계량과 pivotal 양을 기초로 하여 수정 아레니우스 모형에 대한 조건부 신뢰구간을 추정하며, 제3절에서는 Tobias와 Trindada(1986)의 자료를 이용하여 실제 사용조건에서의 모수에 대한 조건부 신뢰구간을 예시한다.

2. 수정 아레니우스 모형에 대한 조건부 신뢰구간

수정 아레니우스 모수에 대한 신뢰구간을 회귀모형의 성질을 이용하여 구하고자 한다.

먼저 다음의 중회귀모형을 생각해 보자.

$$Y_i = \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \cdots, N. \tag{2}$$

여기서 Y_i는 i번째 시험에서의 관측값, $\boldsymbol{\beta}$는 $p \times 1$벡터로서 미지의 모수를 나타내며 ε_i는 서로 독립인 오차로서 확률밀도함수 $f(\varepsilon_i)$을 따르는 변수라고 가정한다. 따라서

Y_i의 확률밀도함수는

$$h(y_i) = f(y_i - \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{\beta}) \tag{3}$$

로 표현할 수 있고

$$\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_N)', \ \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p)',$$
$$\varepsilon_i = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_N)', \quad X = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N)' : N \times p \text{ 행렬}$$

를 사용해서 (2)식을 간략히 표시하면

$$\boldsymbol{Y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

이다.

$\hat{\boldsymbol{\beta}}$을 $\boldsymbol{\beta}$의 최우추정량이라 하고 $\boldsymbol{\beta_u} = (\beta_{u1}, \beta_{u2}, \cdots, \beta_{up})'$를 $\boldsymbol{\beta}$의 참값이라면 다음의 성질을 가진다. (Park과 Yoon(1996))

1. $\boldsymbol{Z} = \hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta_u}$는 pivotal 양이다.
2. $a_i = Y_i - \boldsymbol{x}_i \hat{\boldsymbol{\beta}}, \ i = 1, 2, \cdots, N$은 보조통계량이다.
3. $\dfrac{d\log f_i(\varepsilon_i)}{d\varepsilon_i}$는 일대일 함수이고 $\dfrac{d^2\log f(\varepsilon_i)}{d\varepsilon_i^2} (\neq 0)$가 연속이면 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_{N-p})$는 보조통계량이고 $N-p$개만이 독립이다.
4. 보조통계량 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_{N-p})$가 주어졌을 때 $\boldsymbol{Z}$의 조건부 확률밀도함수는

$$k(\boldsymbol{a}, X) \prod_{i=1}^{N} f(a_i + x_i' \boldsymbol{Z}) \tag{4}$$

로 표현된다.

수정 아레니우스 모형이 위의 회귀모형에서 $p=2$인 경우임을 먼저 보이겠다. (2)식에서 $p=2$이면 $\boldsymbol{x}_i' = (1, x_i)$, $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_1, \beta_2)$이다. 여기서 ε_i는 극단값 분포(extreme value distribution)를 따르는 확률변수이라 하면 (3)식으로부터 Y_i의 확률밀도함수는

$$h(y_i) = \frac{1}{\Gamma(r_i)} \exp\left(r_i\{y_i - \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{\beta}\} - \exp\{y_i - \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{\beta}\}\right), \quad -\infty < y_i < \infty .$$

가 된다.

β_1와 β_2의 최우추정량을 각각 $\hat{\beta}_1$과 $\hat{\beta}_2$ 이라 하고 β_{u1}와 β_{u2}는 β_1과 β_2의 참값이라 하자. 위 성질들로부터 $\boldsymbol{Z}=(\hat{\beta}_1-\beta_{u1},\ \hat{\beta}_2-\beta_{u2})$는 pivotal 양이고, $a_i=Y_i-\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2 x_i$, $i=1,2,\cdots,N$는 보조통계량이며, 보조통계량 $\boldsymbol{a}$는 $(N-2)$개만 독립이다. 그리고(4)식에서 보조통계량 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_{N-2})$가 주어졌을 때 $\boldsymbol{Z}=(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta_u})$의 조건부 확률밀도함수는

$$k(\boldsymbol{a},X)\prod_{i=1}^{N}f(a_i+z_1+z_2x_i) \tag{5}$$
$$=k(\boldsymbol{a},X)\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\Gamma(r_i)}\exp(r_i\{a_i+z_1+z_2x_i\}-\exp\{a_i+z_1+z_2x_i\}),\ -\infty< z_1,z_2<\infty$$

로 나타낼 수 있다. 단 $z_1=\hat{\beta}_1-\beta_{u1}$, $z_2=\hat{\beta}_2-\beta_{u2}$이고 $k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{X})$는 정규화 상수(normalized constant)이다. (1)식의 $x_i=x_i^*-\bar{x}$와 $\bar{x}=\sum_{i=1}^{N}r_ix_i^*/\sum_{i=1}^{N}r_i$를 이용하면 $\sum_{i=1}^{N}r_ix_i=0$이다. 따라서 (5)식은

$$f(z_1,z_2\mid \boldsymbol{a})=k_0(\boldsymbol{a},X)\exp\left(rz_1-\exp z_1\sum_{i=1}^{N}(a_i+z_2x_i)\right) \tag{6}$$

로 간단히 표현된다. 단 $r=\sum_{i=1}^{N}r_i$이고 $k_0(\boldsymbol{a},X)=\left(\prod_{i=1}^{N}1/\Gamma(r_i)\right)\exp\left(\sum_{i=1}^{N}r_ia_i\right)$이다.

$p=2$인 경우의 예로써, 수명 시험에서 n_i은 스트레스 수준 x_i에서의 표본의 개수이고 r_i번째 $(<n_i)$, $i=1,2,\cdots,N$, 의 고장시간에서 시험을 마친다고 하면 스트레스 수준 x_i에서 수명 t의 확률밀도함수는

$$f(t,\ \boldsymbol{\beta})=\frac{1}{\theta_i}\exp\left(-\frac{t}{\theta_i}\right)$$

이며 여기서 $\theta_i=\exp(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})$, $\boldsymbol{x}_i'=(1,x_i)$, $\boldsymbol{\beta}'=(\beta_1,\beta_2)$이다.

스트레스 수준 x_i에서 관찰된 수명시간을 $t_{i1}\le t_{i2}\le\cdots\le t_{ir_i}$, $i=1,2,\cdots,N$이라 하면 $T_1,T_2,\cdots,T_N$은 β_1과 β_2에 대한 결합충분통계량이다. 여기서

$$T_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij} + (n_i - r_i)\, t_{ir_i}$$

는 i번째 시험에서의 총시험시간이다. $T_1, T_2, \cdots, T_N$의 결합밀도함수는 (Epstein과 Sobel(1954))

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(r_i)\theta_i^{r_i}} T_i^{r_i - 1} \exp\left(-\frac{T_i}{\theta_i}\right), \quad 0 < T_i < \infty \tag{7}$$

이다. 따라서 (1)식과 $Y_i = \log T_i,\ i = 1, 2, \cdots, N$을 이용하면 (7)식을

$$\begin{aligned} L_n(\boldsymbol{\beta}) &= \left\{ \prod_{i=1}^{N} \frac{\exp\,(y_i(r_i - 1))}{\Gamma(r_i)\theta_i^{r_i}} \exp\left(- \frac{\exp(y_i)}{\theta_i} \right) \right\} \left(\prod_{i=1}^{N} \exp y_i \right) \\ &= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(r_i)} \{ \exp(r_i(y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i)) \} \exp\{ -\exp(y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i) \} \qquad (8) \\ &= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(r_i)} \exp\left\{ r_i(y_i - \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{\beta}) - \exp(y_i - \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{\beta}) \right\} \end{aligned}$$

로 나타낼 수 있다.

수정 아레니우스 모형 (1)식을 이용하여 유도한 (8)식에 $\boldsymbol{x}_i' = (1, x_i)$와 $\boldsymbol{\beta}_u' = (\beta_{u1}, \beta_{u2})$를 대입하여 변형하면 (5)식 또는 (6)식의 형태와 같음을 보일 수 있다. 따라서 (6)식으로 부터 β_{u1}와 β_{u2}에 대한 각각의 신뢰구간을 구하기 위해 보조통계량 $\boldsymbol{a}$가 주어졌을 때 Z_1와 Z_2의 각각의 주변분포함수를 유도하고자 한다.

Z_2의 주변확률밀도함수는 $u = \exp(z_1) \sum_{i=1}^{N} \exp(a_i + z_2 x_i)$의 변환을 사용하여 (6)식으로부터

$$h(z_2 \mid \boldsymbol{a}) = \frac{k_1(\boldsymbol{a}, X)}{\left(\sum_{i=1}^{N} \exp(a_i + z_2 x_i) \right)^r} \tag{9}$$

이 된다. 여기서 $k_1(\boldsymbol{a}, X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} \exp(a_i + z_2 x_i) \right)^r dz_2$ 이다. 그리고 Z_1의 주변분포함수는

$$P(Z_1 \leq t \mid \boldsymbol{a}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} k_2(\boldsymbol{a}, X) \exp\left(r z_1 - \exp \sum_{i=1}^{N} \exp(a_i + z_2 x_i) \right) dz_1\, dz_2$$

이다. 여기서 $u = \exp(z_1)$의 변환을 사용하면

$$P(Z_1 \leq t \mid \boldsymbol{a}) = k_2(\boldsymbol{a}, X) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_r\left(- \sum_{i=1}^{N} \exp(a_i + z_2 x_i + t) \right)}{\left(- \sum_{i=1}^{N} \exp(a_i + z_2 x_i) \right)^r} dz_2 \tag{10}$$

로 표현된다. 단 $G_r(m) = (1/\Gamma(r)) \int_{-\infty}^{m} u^{r-1} \exp(-u) du$는 불완전 감마 함수이다.

지금부터 β_{u2}에 대한 신뢰구간을 구하자. Z_2의 주변확률함수 (9)식에서 N이 커짐에 따라 (9)식의 분모가 다소 커지는 경향이 있기 때문에 β_{u2}의 신뢰구간을 구하기가 대단히 어렵다. 계산을 쉽게 하기 위해 z_1과 z_2을 z로 바꾸고 Lawless(1982)의 방법을 이용하여 $f(z \mid \boldsymbol{a})$비를

$$f(z \mid \boldsymbol{a}) = \frac{h(z \mid \boldsymbol{a})}{h(0 \mid \boldsymbol{a})} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} \exp(a_i)}{\sum_{i=1}^{N} \exp(a_i + z x_i)} \right)^r$$

로 정의한다. 그러면 $\boldsymbol{a}$가 주어졌을 때 Z_2의 분포함수는

$$\begin{aligned} P(Z_2 \leq t \mid \boldsymbol{a}) &= \int_{-\infty}^{t} h(z \mid \boldsymbol{a}) dz = h(0 \mid \boldsymbol{a}) \int_{-\infty}^{t} f(z \mid \boldsymbol{a}) dz \\ &= h(0 \mid \boldsymbol{a}) F(t \mid \boldsymbol{a}) \end{aligned} \tag{11}$$

로 표현된다. 단 $F(t \mid \boldsymbol{a}) = \int_{-\infty}^{t} f(z \mid \boldsymbol{a}) dz$ 이다.

$$\begin{aligned} F(\infty \mid \boldsymbol{a}) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(z \mid \boldsymbol{a}) dz \\ &= [h(0 \mid \boldsymbol{a})]^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} h(z \mid \boldsymbol{a}) dz \\ &= [h(0 \mid \boldsymbol{a})]^{-1} \end{aligned}$$

이므로 (11)식은

$$P(Z_2 \le t \mid \boldsymbol{a}) = \frac{F(t \mid \boldsymbol{a})}{F(\infty \mid \boldsymbol{a})}$$

가 된다. 따라서 β_{u2}에 대한 90% 조건부 신뢰구간은

$$P(\hat{\beta}_2 - t_2 \le \beta_{u2} \le \hat{\beta}_2 - t_1) = 0.90$$

이다. 여기서 t_1과 t_2는 $P(Z_2 \le t_1 \mid \boldsymbol{a}) - 0.05 = 0$와 $P(Z_2 \le t_2 \mid \boldsymbol{a}) - 0.95 = 0$을 이용하여 수치적으로 구한다.

마찬가지로 β_{u1}에 대한 신뢰구간을 구하기 위해 Lawless(1982)의 $f(z \mid \boldsymbol{a})$비를 이용하면

$$\begin{aligned} P(Z_1 \le t \mid \boldsymbol{a}) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(z \mid \boldsymbol{a})\, G_r\left\{ \sum_{i=1}^{N} \exp(a_i + z x_i + t) \right\} dz \\ &= h(z \mid \boldsymbol{a}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(z \mid \boldsymbol{a})}{h(0 \mid \boldsymbol{a})}\, G_r\left\{ \sum_{i=1}^{N} \exp(a_i + z x_i + t) \right\} dz \\ &= \frac{1}{F(\infty \mid \boldsymbol{a})} \int_{-\infty}^{\infty} f(z \mid \boldsymbol{a})\, G_r\left\{ \sum_{i=1}^{N} \exp(a_i + z x_i + t) \right\} dz \end{aligned}$$

이다. 따라서 β_{u1}에 대한 90% 조건부 신뢰구간은

$$P(\hat{\beta}_1 - t_2 \le \beta_{u1} \le \hat{\beta}_1 - t_1) = 0.90$$

이다. 단 t_1과 t_2는 $P(Z_1 \le t_1 \mid \boldsymbol{a}) - 0.05 = 0$와 $P(Z_1 \le t_2 \mid \boldsymbol{a}) - 0.95 = 0$에서 수치적으로 구한다.

3. 사례 비교

이 절에서는 Tobias와 Trindada(1986)의 온도에 대한 자료를 이용하여 수정 아레니우스 모형을 기초로 모수 $\boldsymbol{\beta}_u$의 조건부 신뢰구간과 pivotal 양의 확률밀도함수를 예시한다.

사례 1. Tobias와 Trindade(1986)에 의해 논의된 자료를 사용한다. 이 자료는 세 개의 온도 스트레스 수준, $K_1 = 358^o K$, $K_2 = 378^o K$, $K_3 = 398^o K$로 주었을 때 지수분포 관찰값으로 구성되어 있고 아래의 <표 1>과 같다. 여기서 실제 사용 시험온도 $K_u = 300^o K$이고 $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1$이며 수정 아레니우스 모형의 실제 모수는 $\theta_u = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_u)$이다.

< 표 1 > Tobias와 Trindade자료 : $N=3$, $n = \sum_{i=1}^{3} n_i = 21$인 경우

Stress	n_i	r_i	x_i
$358^o K$	7	3	2.0921
$378^o K$	7	5	0.3770
$398^o K$	7	7	-1.1658

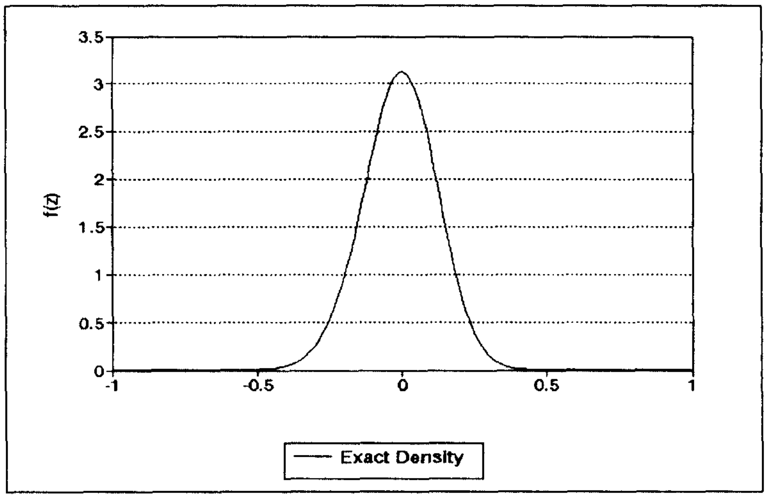
β_1과 β_2에 대한 최우추정값은 각각 $\widehat{\beta_1} = 2.8326$, $\widehat{\beta_2} = 0.9485$이고, 보조통계량 $a_1 = 0.9520$, $a_2 = 1.7688$, $a_3 = 1.8787$이며, 총시험시간은 각각 $T_1 = 320.1886$, $T_2 = 142.4379$, $T_3 = 36.8016$이다. β_{u2}에 대한 90% 조건부 신뢰구간은 $0.6064 \le \beta_{u2} \le 1.3400$이고 β_{u1}에 대한 90% 조건부 신뢰구간은 $2.4823 \le \beta_{u1} \le 3.3583$이며 평균수명은 $\theta_u = 40417.2790$이다. <그림 1>은 조건부 확률밀도함수 $Z_2 | \boldsymbol{a}$를 나타낸다.

사례 2. Tobias와 Trindade(1986)의 아레니우스 모형을 따르는 다섯 개의 온도 스트레스 수준, $K_1 = 318^o K$, $K_2 = 338^o K$, $K_3 = 358^o K$, $K_4 = 378^o K$, $K_5 = 398^o K$로 주었을 때 지수 분포 관찰값으로 구성된 자료는 <표 2>와 같다. 여기서 실제 사용시험온도 $K_u = 300^o K$이고 $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 1$이다.

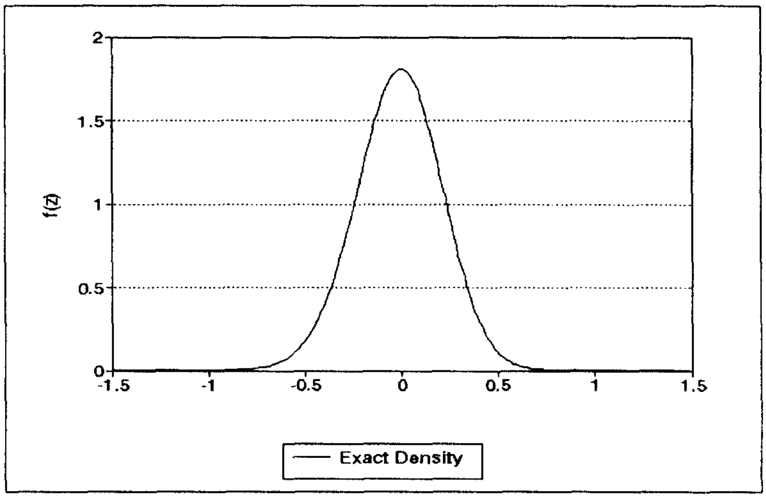
< 표 2 > Tobias와 Trindade의 자료 : $N=5$, $n = \sum_{i=1}^{5} n_i = 25$인 경우

Stress	n_i	r_i	x_i
$318^o K$	5	1	4.7483
$338^o K$	5	2	2.5889
$358^o K$	5	3	0.6708
$378^o K$	5	4	-1.0443
$398^o K$	5	5	-2.5871

β_1, β_2에 대한 최우추정값은 각각 $\widehat{\beta_1}=2.9667$, $\widehat{\beta_2}=0.9995$이고, 보조통계량 $a_1=-0.1428$, $a_2=0.7882$, $a_3=1.2577$, $a_4=1.0547$, $a_5=1.2656$로 이며, 총시험시간은 각각 다음과 같다. $T_1=1107.0440$, $T_2=418.6660$, $T_3=123.4506$, $T_4=22.2213$, $T_5=7.0429$이다. β_{u2}에 대한 90% 조건부 신뢰구간은 $0.6831\le\beta_{u2}\le1.1072$이고 β_{u1}에 대한 90% 조건부 신뢰구간은 $2.0617\le\beta_{u1}\le3.0492$이며 평균수명은 $\theta_u=26664.7900$이다. <그림 2>는 조건부 확률밀도함수 $Z_2\mid \boldsymbol{a}$를 나타낸다.



< 그림 1 > 수정 아레니우스 모형에 대한 $Z_2=\widehat{\beta_2}-\beta_{u2}$의 주변분포



< 그림 2 > 수정 아레니우스 모형에 대한 $Z_2=\widehat{\beta_2}-\beta_{u2}$의 주변분포

참고문헌

[1] Epstein, B. and Sobel, M.(1954), "Some theorems relevant to life testing from an exponential distribution," *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 25, pp. 378-381.

[2] Escobar, L.A. and Meeter, Jr. W.Q.(1993), "A Review of Recent Research and Current Issues in Accelerated Testing," *International Statistical Review*, Vol. 61, pp. 147-168.

[3] Lawless, J.F.(1976), "Conditional Interval Estimation in the Inverse Power Law Model," *Applied Statistics*, Vol. 25, pp. 128-138.

[4] McCool, J.I.(1980), "Confidence Limits for Weibull Regression with Censored Data," *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 29, pp. 145-150.

[5] Meeker, W.Q. and Hahn, G.J.(1985), "How to Plan an Accelerated Life Test-Some Practical Guide lines," *ASQC Basic References and Quality Control*, Vol. 10, pp. 952-972.

[6] Nelson. W.(1970), "Statistical Methods for Accelerated Life Test Data-The Inverse Power Law Model," *General Electric Company*, Report No. 71-C- 011.

[7] Nelson, W.(1990), *Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analyses*, Wiley, New York.

[8] Park, B.G. and Yoon, S.C.(1996), "Confidence Intervals for Parameters in Accelerated Life Testing," *Journal of Statistical Theory and Methods*, Vol. 7, 21-35.

[9] Tobias, P.A. and Trindade, D.C.(1986), *Applied Reliability*, Van Nostrand Reinhold, New York.