工業經營學會誌 第 20卷 第 43輯 1997年 8月 67

최소비용문제의 해법 효율화와 통합구현†

-Performance Improvement and Integrated Implementation for Minimum Cost Flow Problem-

정 호 연*
Chung, Ho Yeon

Abstract

In this paper we develop the integrated software that can compare algorithms of the minimum cost flow problem using PC. The chosen algorithms are the network simplex method, dual network simplex method, and out-of-kilter method, which methods correspond to primal, dual, and primal-dual approach respectively. We also present the improved methods obtaining the initial solution to increase the efficiency of algorithms, and experiment results shown the difference between the entering(dropping) selection rules.

1. 서 론

최소비용문제는 네트워크이론 중에서도 유통량문제에 속하는 가장 기본적인 모형으로서 최단경로문제, 최대유통량문제, 수송문제, 할당문제 등을 포함하는 보다 일반화된 문제이다[2,10].

이러한 최소비용문제의 전산 패키지로는 Grigoriadis와 Hsu가 개발한 RNET, Kennington과 Helgason이 개발한 NETFLO, Aashtiani와 Magnanti가 개발한 KILTER, Bertsekas와 Tseng이 개발한 RELAX 등이 알려져 있다[4,5,6,7]. 이들 패키지들중 일부는 프로그램 코드가 공개된 것도 있지만 대부분 대형 컴퓨터용으로 개발 되어 있어 사용자가 쉽게 이용할 수 있는 소형컴퓨터에서 사용하기 위해서는 많은 수정이 필요한 실정이다. 또한 각 패키지 별로 단일 해법만을 이용하여 최소비용문제의 해를 구하고 있기 때문에 해법들 간의 비교를 위해서는 많은 수의 프로그램을 확보해야 하는 어려움이 있다. 특히 각 패키지별로 사용하고 있는 자료구조나 입·출력 방식이 서로 달라 최소비용문제의 해법간의 비교나 해법과정의 이해가 쉽지 않다.

따라서 본 연구에서는 보편화되고 있는 소형 컴퓨터를 이용하여 누구나 쉽게 사용할 수 있는 최소비용문제의 프로그램을 개발하고, 해법별 구조와 계산기법 등을 비교·분석할 수 있는 방안을 제시하고자 한다. 이를 위해 본 연구에서는 Primal 방법에 해당되는 네트워크 단체법, Dual 방법에 해당되는 네트워크 쌍대 단체법, 그리고 Primal-Dual 방법에 해당되는 Out-of-Kilter법을 선택하여, 해법의 효율성을 증대시키기 위한 초기해 구하는 개선된 방법을 제시하고, 해를 개선시킬 때 사용하는 진입호와 탈락호 선정 방법에 따른 차이점 등을 분석해 본다.

2. 최소비용문제의 통합패키지 방안

여기에서는 네트워크 단체법의 2국면법과 대수법(Big-M법), 네트워크 쌍대 단체법, 원-쌍대법을 하나로 통합하기 위한 각 해법의 구성요소를 분석하고, 그 통합 방안을 제시하고자 한다. 먼저 본 연구에서 선택한 최소비용문제의 해법을 각 단계별로 분석해 보면 다음 [표 1]과 같다.

---

† 이 논문은 1996년도 전주대학교 학술연구 조성비에 의하여 연구된 것임
* 전주대학교 산업공학과

[표 1] 각 해법별 단계

네트워크단체법	네트워크쌍대단체법	원-쌍대법
초기해	초기해	초기해
↓	↓	↓
진입호 선정	탈락호 선정	out-of-kilter호
↓	↓	↓
탈락호 선정	진입호 선정	해수정
↓	↓	(유통량수정, 쌍대값 수정)
해수정	해수정	
↓	↓	
기저나무 수정	기저나무 수정	

각 해법을 통합하기 위해서는 각 해법을 구성하는 구성 요소들을 분석하고, 그 요소들을 표준화하여 공유하여야 한다. [표 2]에서 보면 자료입력, 문제출력, 최적해 출력은 네트워크 단체법, 네트워크 쌍대 단체법, 원-쌍대법에서 모두 공유할 수 있으나 초기해 구하는 방법은 각 해법별로 약간의 수정을 요한다. 특히 네트워크 단체법과 네트워크 쌍대 단체법은 해법과정에서 항상 기저나무를 유지하기 때문에 진입호 선정하는 방법이나 탈락호 선정하는 방법만 다를 뿐 나머지 함수들은 서로 공유될 수 있다. 그러나 원-쌍대법은 해법과정에서 기저나무를 유지하지 않고 out-of-kilter호를 in-kilter호가 되도록 유통량 수정단계나 쌍대값 수정단계를 적용하기 때문에 별도의 부함수를 구성하여 통합하였다.

[표 2] 최소비용문제의 프로그램 구성

해법 / 단계	네트워크 단체법		네트워크 쌍대단체법	원-쌍대법
	2국면법	Big-M법		
자료입력	○	○	○	○
문제출력	○	○	○	○
초기해	○	△	△	△
진입호	○	○	×	-
탈락호	○	○	×	-
해수정	○	○	△	×
최적해 출력	○	○	○	○
out-of-kilter 호	-	-	-	○

○ : 공유가능 △ : 제어변수에 의한 소폭 수정 통합 × : 부함수 교체통합

해법을 구성하고 있는 각 단계들의 통합은 각 함수내에서 제어변수(control variable)를 도입하여 통합하였다. 각 단계별 부함수의 구성요소들의 통합은 [표 3]과 같다.

[표 3] 최소비용문제의 해법별 구성요소의 통합

부 함 수	하 부 함 수
초기해(INICYCLE)	INICYCLE, INIPHASE2, INIBIGM, INIDUAL
진입호(PRICE)	PRICE, PRICEN, CCBARN, DPRICE
탈락호(CHUZA)	CHUZA, DCHUZA
해수정(UPSOL)	UPSOL, DUPSOL
out-of-kilter호(OK)	OK, INKILTER

3. 최소비용문제의 해법 효율화 방안

3.1 초기해 계산방법

최소비용문제를 풀기 위해서는 각 해법별로 초기해(initial tree solution)가 있어야 한다[4,8]. 네트워크 단체법에서 초기해를 구하는 방법으로 2국면법(2-phase method)과 대수법(Big-M)이 있고, 네트워크 쌍대 단체법의 초기해를 구하는 방법이 있다. 본 연구에서는 초기해를 구성할 때 가능한한 인공호(artificial arc)를 줄이는 방향으로 구성하게 하여 전체적인 계산횟수를 줄일 수 있었다.

3.1.1 네트워크 단체법에서 2국면법을 사용하여 초기해 찾는 방법

단계1 : (인공마디 도입)

전체 마디수가 N일 때 인공마디 N+1을 도입

단계2: (인공호 도입)

(1) 모든 호 (i,j)에 대한 유통량을 하한값으로 설정한다.

$$x_{ij} = l_{ij} \quad \forall (i,j) \in A$$

(2) 마디 i에 대하여

$\sum_j x_{ji} > \sum_j x_{ij}$ 이면 마디 i와 인공 마디 N+1을 연결 한다.

$$x_{i,n+1} = \sum_j x_{ji} - \sum_j x_{ij}, \quad l_{i,n+1} = 0, \quad u_{i,n+1} = \infty, \quad c_{i,n+1} = 1$$

$\sum_j x_{ji} \leq \sum_j x_{ij}$ 이면 마디 N+1과 마디 i를 연결한다.

$$x_{n+1,i} = \sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji}, \quad l_{n+1,i} = 0, \quad u_{n+1,i} = \infty, \quad c_{n+1,i} = 1$$

단계3: (나무형성)

인공호를 포함한 나무를 형성한다.

3.1.2 네트워크 단체법에서 대수법(Big-M)을 사용하여 초기해 찾는 방법.

단계1: (인공 마디 도입)

전체 마디수가 N일 때 인공마디 N+1 을 도입

단계2: (인공호 도입)

(1) 모든 호 (i,j)에 대한 유통량을 하한값으로 설정한다.

$$x_{ij} = l_{ij} \quad , \forall (i,j) \in A$$

(2) 마디 i 에 대하여

$\sum_j x_{ji} > \sum_j x_{ij}$ 이면 마디 i와 인공마디 N+1을 연결한다.

$$x_{i,n+1} = \sum_j x_{ji} - \sum_j x_{ij} \ , \quad l_{i,n+1} = 0 \ , \quad u_{i,n+1} = \infty, \quad c_{i,n+1} = \infty$$

$\sum_j x_{ji} < \sum_j x_{ij}$ 이면 마디 N+1과 마디 i를 연결한다.

$$x_{n+1,i} = \sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji}, \quad l_{n+1,i} = 0, \quad u_{n+1,i} = \infty, \quad c_{n+1,i} = \infty$$

단계3: (나무형성)

인공호를 포함한 나무를 형성한다.

3.1.3 원-쌍대법의 초기해 계산방법

단계1: (인공마디 도입)

전체 마디수가 N 일 때 인공마디 N+1을 도입한다.

단계2: (인공호 도입)

(1) 모든 마디 i 의 쌍대변수값을 0 으로 놓는다. 즉, PI[i] = 0.0

모든 호 (i, j) 의 유통량을 0 으로 놓는다. $x_{ij} = 0, \forall (i, j) \in A$

(2) 인공마디 N+1과 공급지 i를 연결한다.

$l_{n+1,i} = b_i$, $u_{n+1,i} = b_i$, $c_{n+1,i} = 0$, $x_{n+1,i} = 0$

수요지 i와 인공마디 N+1을 연결한다.

$l_{i,n+1} = | b_i |$, $u_{i,n+1} = | b_i |$, $c_{i,n+1} = 0$, $x_{i,n+1} = 0$

3.1.4 네트워크 쌍대 단체법의 초기해 계산방법

단계1: (인공 마디 도입)

전체 마디수가 N 일 때 인공마디 N+1을도입

단계2: (인공호 도입)

(1) 모든 마디 i 에 대한 쌍대변수값을 0 으로 놓는다.즉, PI[i] = 0.0

만일 $c_{ij} \geq 0$ 이면 $x_{ij} = l_{ij}$, $c_{ij} < 0$ 이면 $x_{ij} = u_{ij}$ 로 놓는다.

(2) 마디 i 에 대하여

$\sum_j x_{ji} > \sum_j x_{ij}$ 이면 마디 i와 인공마디 N+1을 연결한다.

$x_{i,n+1} = \sum_j x_{ji} - \sum_j x_{ij}$, $l_{i,n+1} = 0$, $u_{i,n+1} = 0$, $c_{i,n+1} = 0$

$\sum_j x_{ji} \leq \sum_j x_{ij}$ 이면 마디 N+1과 마디 i를 연결한다.

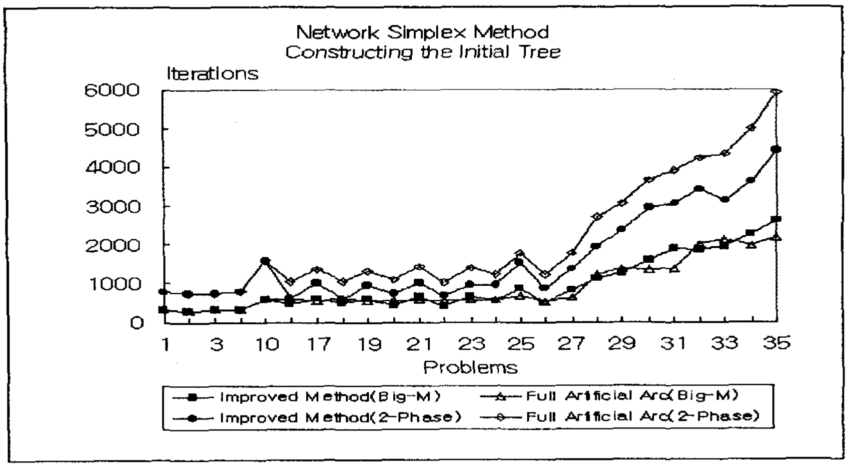
$x_{n+1,i} = \sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji}$, $l_{n+1,i} = 0$, $u_{n+1,i} = 0$, $c_{n+1,i} = 0$,

(3) (나무 형성)

인공호를 포함한 나무를 형성한다.

3.1.5 실험 결과

실험은 SUN SPARC ULTRA 170(주메모리 64MB)을 사용하여 NETGEN[9]에서 생성시킨 25개의 문제를 대상으로 수행하였다. 먼저 네트워크 단체법의 2국면법을 사용하여 초기해를 구할 때 초기나무를 인공호로만 구성하는 경우와 인공호의 수를 최소로 사용하여 구성한 경우의 연산횟수를 비교하였다. 중개지가 존재하는 문제에 대하여 실험한 결과가 [그림 1]에 나타나 있다. 여기에서 보면 초기나무를 구성할 때 인공호의 수를 최소로 사용하여 구성한 경우가 인공호로만 구성한 경우보다 연산횟수에서 보다 우수하였다.



[그림1] 초기해 구하는 방법의 비교

3.2. 네트워크 단체법의 진입호 선정방법

3.2.1 진입호 선정방법

최소비용문제를 풀 때 진입호의 선정 방법에 따라 수행횟수나 계산속도에 많은 차이가 있을 수 있다. 본 연구에서는 다음과 같은 진입호 선정 방법을 고려하였다.

(1) 최소 할인가법 (most negative selection rule)

비기저호에 대한 할인가 중에서 가장 작은 할인가를 갖는 호를 진입호로 선택한다.

(2) 최초 할인가법 (first negative selection rule)

비기저호에 대한 할인가 중에서 음의 할인가를 갖는 최초의 호를 진입호로 선택한다.

(3) 다종평가 (multiple pricing selection rule)

진입호를 선택하는 과정에서 한번에 여러개의 진입 후보자를 선택하여 그 중에서 가장 작은 것을 선택한다.

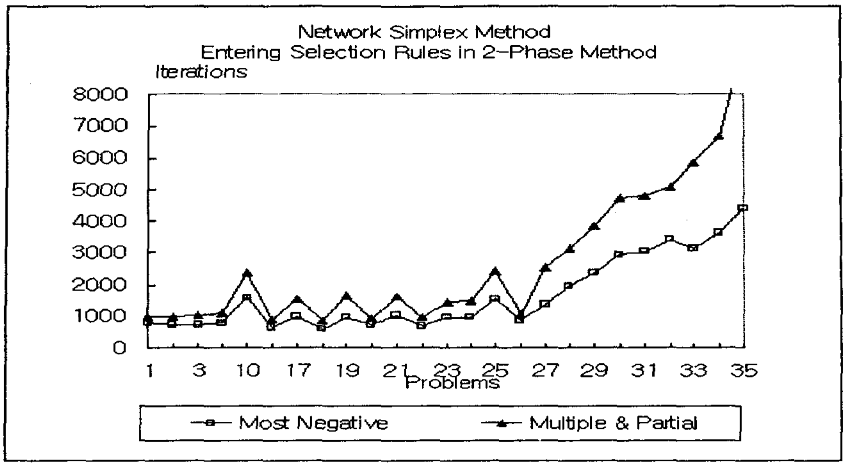
(4) 부분 평가 (partial pricing selection rule)

전체 호의 집합을 여러 부분 호의 집합으로 구분한 뒤 매번 모든 호에 대해 할인가를 구하는 대신 미리 선택한 부분 호의 집합에 대해서 진입호를 선택한다.

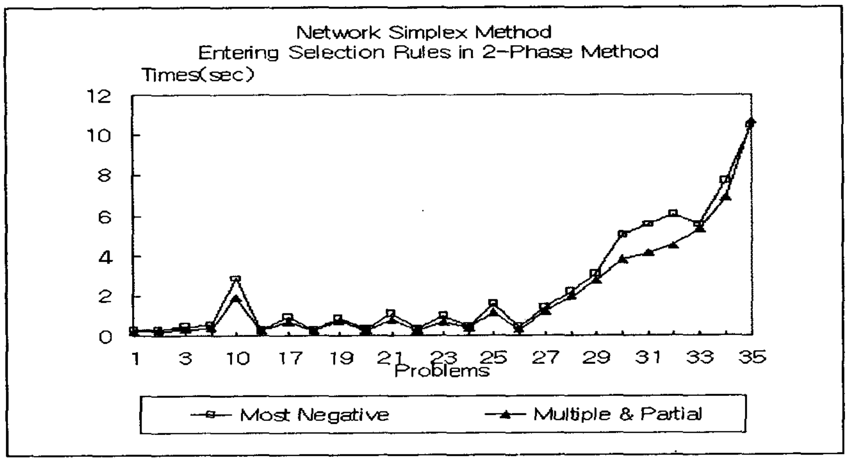
3.2.2 실험 결과

여기서는 초기해를 구하는 방법인 2국면법과 대수법에 대하여 각각 최소 할인가법(MNR), 최초 할인가법(FNR), 그리고 다종평가와 부분평가를 혼합한 다종 부분평가(M&P)의 3가지 진입호 선택방법을 사용하여 실험하였다. 실험은 NETGEN[9]에서 생성시킨 25개의 문제를 가지고 실험하였다.

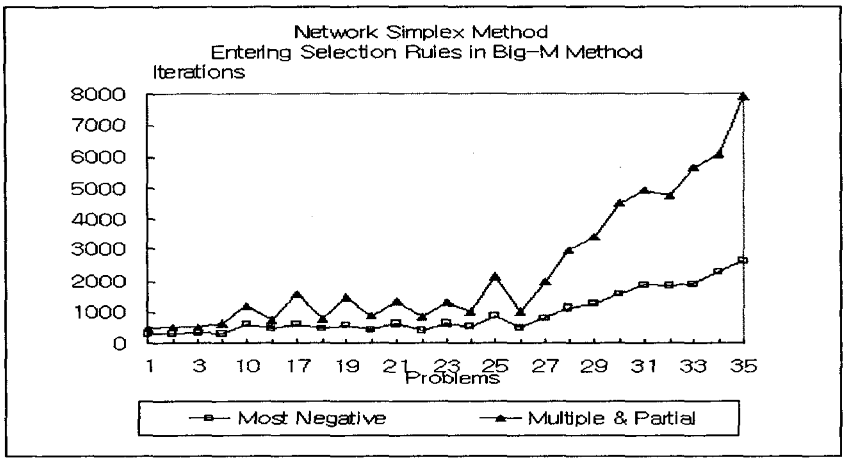
실험결과를 보면 최소 할인가법(MNR)이 연산횟수면에서 2국면법과 대수법 모두에서 가장 우수하였고, 다음으로 다종 부분평가(M&P)방법이 우수하였다. 그러나 계산속도면에서는 2국면법과 대수법에서 다종 부분평가법이 더 우수하였다. 최초 할인가법(FNR)은 최소 할인가법이나 다종 부분평가 방법보다 훨씬 많은 연산횟수나 계산시간이 소요되어 비효율적인것으로 나타나 그림상에 표기하지 않았다. 또한 대수법으로 초기 기저 가능해를 구한 상태에서 최소 할인가법을 적용하는 것이 2국면법으로 초기 기저 가능해를 구한 상태에서 최소 할인가법을 적용하는 것보다 우수하였다.



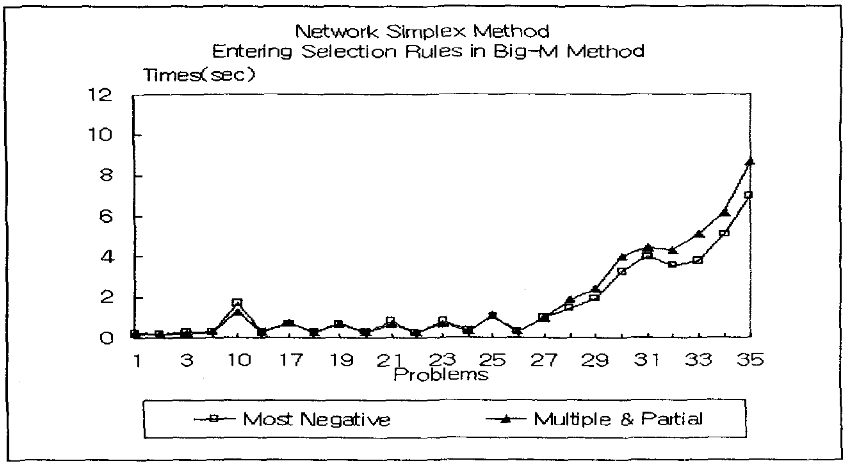
[그림2] 진입호 선정 방법간의 연산횟수 비교(2국면법)



[그림 3] 진입호 선정 방법간의 계산시간 비교(2국면법)



[그림 4] 진입호 선정 방법간의 연산횟수 비교(대수법)



[그림 5] 진입호 선정 방법간의 계산시간 비교(대수법)

3.3 네트워크 쌍대 단체법의 탈락호 선정방법

3.3.1 탈락호 선정방법

네트워크 쌍대 단체법에서 고려한 탈락호의 선정 방법은 다음과 같다[3,4,5,7].

(1) 최초 위반호 (first violating arc selection rule)

용량 상하한 조건을 만족하지 않는 최초의 기저호를 탈락호로 선정한다.

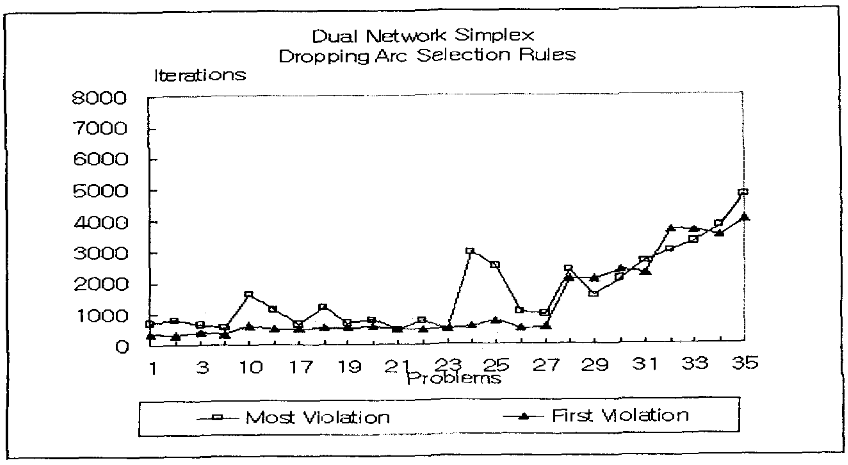
(2) 최대 위반호 (most violating arc selection rule)

용량 상하한 조건에서 가장 크게 벗어난 기저호를 탈락호로 선정한다.

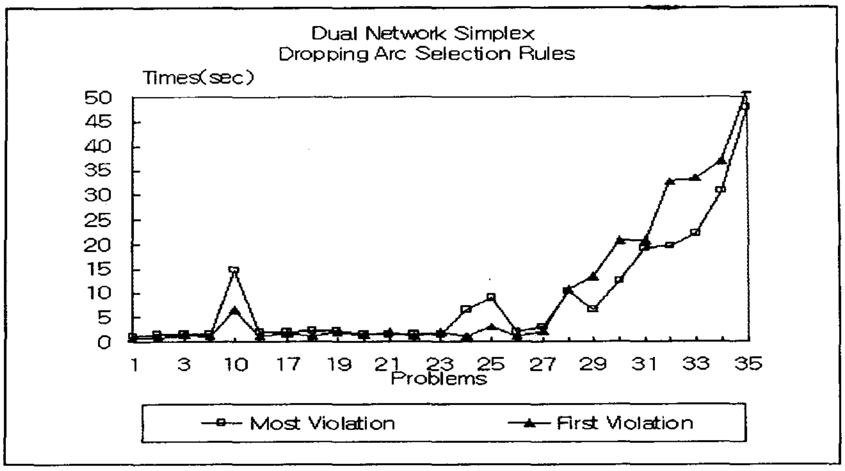
3.3.2 실험결과

네트워크 쌍대 단체법에서도 탈락호의 선택방법에 따라 수행횟수나 계산 효율성에 큰 차이가 날 수 있다. 여기서는 탈락호 선택 방법으로 최초 위반호(FVR)법과 최대 위반호(MVR)법을 사용하여 실험을 하였다.

[그림 6]에 나타난 결과를 보면 25개의 문제에 대하여 76%에서 최초 위반호(FVR)법을 사용하여 탈락호를 선정하는 것이 더 우수한 것으로 나타났다.



[그림 6] 탈락호 선택 방법간의 연산횟수 비교



[그림 7] 탈락호 선택 방법간의 계산시간 비교

3.4 해의 정체

대형 네트워크 문제를 풀다보면 퇴화(degeneracy 현상이 대단히 많이 발생한다[5,6,13]. 이러한 현상이 발생하면 해를 개선시키지 못하고 오랜 시간 동안 정체하게 된다. 따라서 퇴화시 적절한 진입호 선정 방법을 연구 하였다.

3.4.1 해의 정체 현상을 방지하기 위한 방법

네트워크 단체법에서 진입호 선정 방법으로 최초 할인가법(first negative selection rule)을 사용하면 다른 방법보다 훨씬 많은 연산 횟수와 계산시간이 소요된다. 이것은 음의 할인가를 갖는 최초의 호를 진입호로 선정하여도 탈락호 선정시 고려되는 최소 비율 점검(minimun ratio test)값이 0이 되어 해를 하나도 개선시키지 못하는 정체 현상이 발생되었기 때문이다 [6,11,13].

일반적으로 네트워크 단체법에서 정체 현상을 일으키는 퇴화의 조건은 다음과 같다[1].

[정리 1] 네트워크 단체법의 수행 과정에서 선택된 진입호를 (i,j)라 하자. 그 때 형성되는 환 C에 다음과 같은 호(r,s)가 존재하면 다음 단계에서 해는 정체된다.

(1) $x_{ij}=l_{ij}$ 일 때, 호(r,s)가 순방향이면서 $x_{rs}=u_{rs}$ 또는 호(r,s)가 역방향이면서 $x_{rs}=l_{rs}$

(2) $x_{ij}=u_{ij}$ 일 때, 호(r,s)가 순방향이면서 $x_{rs}=l_{rs}$ 또는 호(r,s)가 역방향이면서 $x_{rs}=u_{rs}$

(증명)

네트워크 단체법의 수행 과정에서 진입호로 선정된 호 (i,j)를 기저나무 T에 연결하면 환 C가 형성된다. 이 때 환 C 에 속해 있는 호 중에서 호 (i,j)와 같은 방향인 호(순방향)에 대하여 $\theta_1=\min\{u_{rs}-x_{rs}\}$, 호 (i,j)와 반대 방향인 호(역방향)에 대하여 $\theta_2=\min\{x_{rs}-l_{rs}\}$ 만큼 유통량을 보낼 수 있다. 이 때 가능성을 유지하는 범위내에서 최대로 보낼 수 있는 최대 허용 증가량 θ는 $\theta=\min\{\theta_1,\theta_2,u_{ij}-l_{ij}\}$ 가 된다. 그런데 환 C 중에서 호 (i,j)와 같은 방향인 호(r,s)가 $x_{rs}=u_{rs}$ 이거나 호 (i,j)와 반대방향인 호(r,s)가 $x_{rs}=l_{rs}$ 이면 최대 허용 증가량 $\theta=0$ 이 된다. $Z=Z-\bar{c}\times\theta$ 에서 θ 가 0 이므로 해는 정체 현상을 일으킨다.

$x_{ii}=u_{ii}$ 인 경우에서도 동일하다. ■

위의 [정리 1]에 따라 해의 정체를 벗어날 수 있는 탈락호를 갖는 진입호를 선택해 주어야 한다. 다음의 [종정리]에 의해 해의 정체를 벗어나는 진입호를 선택할 수 있다.

[종정리 2] 진입호를 (i, j)라 할 때 기저나무 T에 호 (i, j)를 연결하여 나타나는 환 C에 다음과 같은 호(r, s)가 존재하면 해는 개선된다.

(1) $x_{ij} = l_{ij}$ 일 때, 호(r, s)가 순방향이면서 $x_{rs} \neq u_{rs}, \forall (r, s) \in T$ 이고 호(r, s)가 역방향이면서 $x_{rs} \neq l_{rs}, \forall (r, s) \in T$

(2) $x_{ij} = u_{ij}$ 일 때, 호(r, s)가 순방향이면서 $x_{rs} \neq l_{rs}, \forall (r, s) \in T$ 이고 호(r, s)가 역방향이면서 $x_{rs} \neq u_{rs}, \forall (r, s) \in T$

(증명)

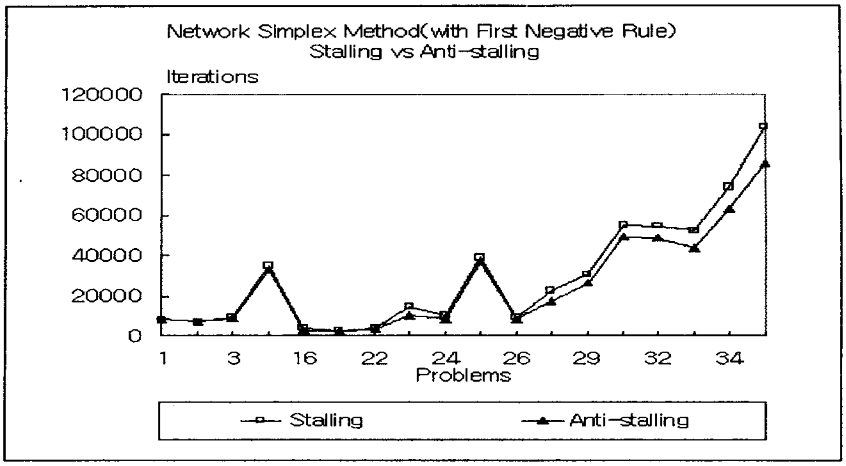
네트워크 단체법의 수행과정에서 진입호로 선정된 호 (i, j)를 기저나무T에 연결하면 환 C가 형성된다. 이 때 환 C에 속해 있는 호 중에서 호 (i, j)와 같은 방향인 호에 대하여 $\theta_1 = \min\{u_{rs} - x_{rs}\}$, 호 (i, j)와 반대 방향인 호에 대하여 $\theta_2 = \min\{x_{rs} - l_{rs}\}$ 만큼 유통량을 보낼 수 있다. 따라서 가능성을 유지하는 범위내에서 최대로 보낼수 있는 최대 허용 증가량 θ는 $\theta = \min\{\theta_1, \theta_2, u_{ij} - l_{ij}\}$ 가 된다. 이 때 만일 환 C중에서 호 (i, j)와 같은 방향인 호(r, s)가 $x_{rs} \neq u_{rs}, \forall (r, s) \in T$ 이면서 호 (i, j)와 반대 방향인 호(r, s)도 $x_{rs} \neq l_{rs}, \forall (r, s) \in T$ 이면, $\theta_1 > 0$ 이 되고 $\theta_2 > 0$ 이 된다. 또한 호 (i, j)의 유통량 x_{ij}도 고정된 값을 갖지 않기 때문에 $u_{ij} - l_{ij} > 0$ 이 된다. 따라서 θ는 $\theta > 0$이 된다. 그러므로 $Z = Z - \bar{c} \times \theta$ 에서 θ가 양수이므로 해는 개선된다. $x_{ij} = u_{ij}$ 인 경우에서도 동일하다. ■

해가 정체 현상을 일으킬 때 위의 종정리를 적용하여 진입호를 선택할 수 있다. 이것의 의미는 해가 정체 현상을 일으킬 때 정체 현상을 벗어날 수 있는 호가 존재 하는가를 확인한 후 이를 진입호로 선택하자는 것이다. 만일 [종정리]와 같은 진입호가 없을 경우에는 최초의 음의 할인가를 갖는 호를 진입호로 선정한다.

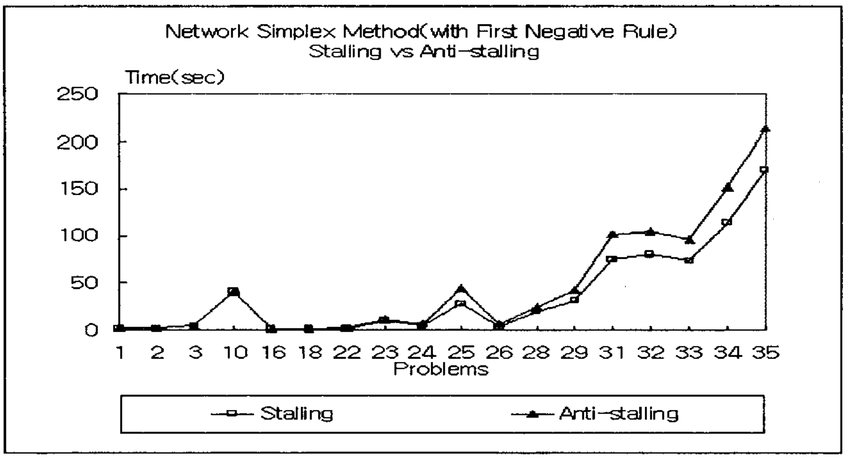
퇴화 현상이 심한 문제에 대해 위의 진입호 선택 방법을 사용한 결과 연산횟수와 계산시간을 크게 줄일 수 있었다.

3.4.2 실험 결과

퇴화현상이 심한 최초 할인가법(FNR)문제에 대해 위의 Anti-stalling 기법을 사용한 실험 결과가 다음 그림에 나타나 있다. 실험 결과를 보면 Anti-stalling기법을 사용한 경우가 사용하지 않은 경우보다 문제 크기가 커짐에 따라 연산횟수가 줄어 들었음을 알 수 있다. 그러나 계산시간은 오히려 문제 크기가 커짐에 따라 늘어나고 있다. 그 이유는 탈락호 선정시 고려되는 최소비율 검정값이 0이되어 해를 개선시킬 수 없을 때 해를 개선시킬 수 있는 호를 찾아서 진입호로 선정하기 때문에 이에 소요되는 시간이 많이 소요되기 때문으로 풀이된다.



[그림 8] 정체방지기법을 사용한 경우의 연산횟수 비교



[그림9] 정체방지기법을 사용한 경우의 계산시간 비교

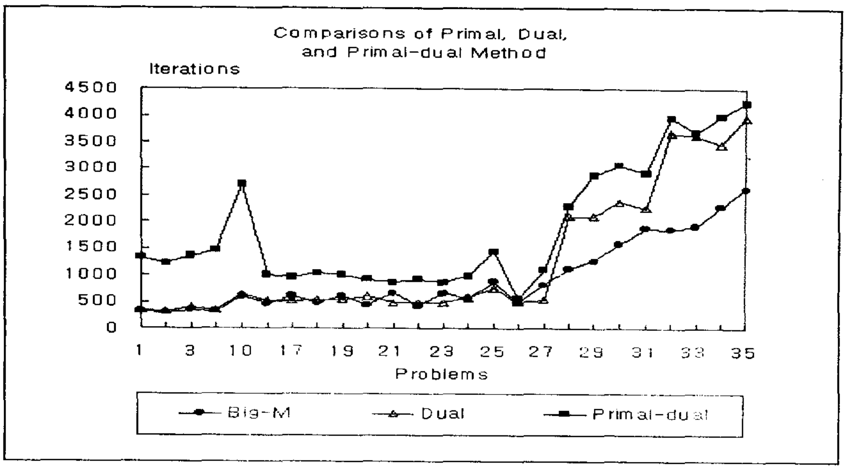
3.5 해법간의 비교

3.5.1 해법간의 비교

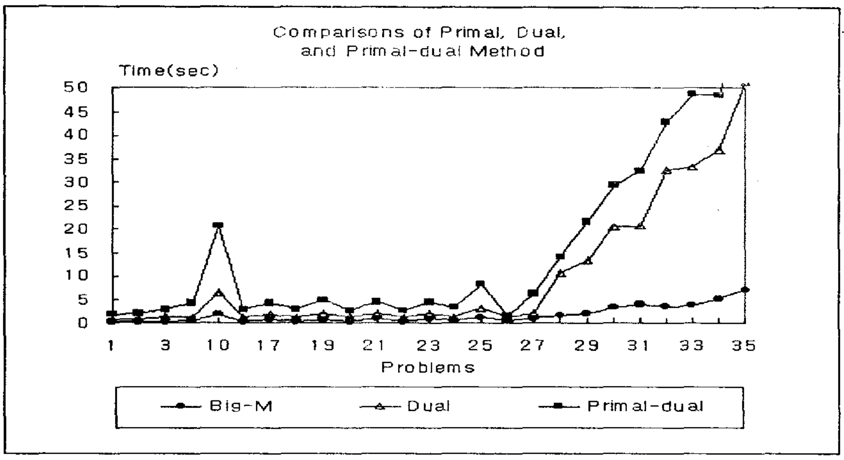
네트워크 단체법, 네트워크 쌍대 단체법, 원-쌍대법 간의 효율성을 알아보기 위해 각 해법 중에서 가장 좋은 결과를 제공한 기법들의 계산 결과를 비교하였다([표 4]참조).

3.5.2 실험결과

NETGEN 에서 생성시킨 문제에 대한 실험 결과, 대수법을 사용한 네트워크 단체법이 연산횟수나 계산시간 측면에서 전반적으로 우수하였다.



[그림 10] Primal, Dual, Primal-Dual 방법간의 연산횟수 비교



[그림 11] Primal, Dual, Primal-Dual 방법간의 계산시간 비교

4. 결 론

본 연구에서는 보편화되고 있는 소형컴퓨터를 이용하여 누구나 쉽게 사용할 수 있는 최소비용문제의 프로그램을 개발하고, 해법별 구조와 계산 효율을 향상시킬 수 있는 몇 가지의 방안을 비교・분석하였다.

먼저 Primal 방법에 해당되는 네트워크단체법, Dual 방법에 해당되는 네트워크 쌍대 단체법, 그리고 Primal-Dual 방법에 해당되는 Out-of-Kilter법을 선택하여, 이들을 하나로 통합한 통합패키지를 만들었다. 이 때 공유 가능한 함수는 최대한 하나로 공유시켜 프로그램의 중복을 피했으며, 해법의 효율성을 증대시키기 위해 개선된 초기해 구하는 방법을 제시하였으며, 해를 개선시킬 때 사용하는 진입호와 탈락호 선정방법에 따른 차이점 등을 비교 분석하였다.

실험결과 속도나 연산횟수면에서 네트워크 단체법이 네트워크 쌍대 단체법이나 원-쌍대법보다 우수한 것으로 나타났으며, 초기해 구하는 방법에서는 대수법이 2국면법보다 우수하였다. 또한 진입호 선정방법으로는 최소할인가법이 다른 방법보다 전반적으로 우수하였다.

[표 4] 최소비용문제의 해법별 연산횟수와 계산시간 비교

(연산횟수/계산시간)

문제	네트워크 단체법				네트워크 쌍대 단체법		원-쌍대법
	Big_M		2-Phase				
	MNR	M&P	MNR	M&P	MVR	FVR	
stndrd01	319	485	782	991	702	347	1325
	0.24	0.19	0.3	0.22	1.18	0.66	1.79
stndrd02	301	515	733	994	789	322	1221
	0.22	0.17	0.33	0.25	1.51	0.72	2.11
stndrd03	336	525	728	1037	643	407	1355
	0.33	0.22	0.45	0.34	1.51	1.23	2.79
stndrd04	323	643	780	1084	557	344	1460
	0.34	0.29	0.51	0.39	1.5	1.12	4.28
stndrd10	607	1191	1584	2351	1615	633	2694
	1.71	1.24	2.88	1.89	14.64	6.49	20.73
stndrd16	468	763	637	898	1117	516	1008
	0.29	0.24	0.33	0.26	2.08	1.01	2.79
stndrd17	604	1579	1000	1544	636	515	953
	0.68	0.74	0.94	0.67	1.96	1.84	4.2
stndrd18	481	788	592	857	1206	548	1035
	0.3	0.25	0.29	0.24	2.26	1.12	2.79
stndrd19	597	1470	960	1628	691	546	1010
	0.68	0.67	0.89	0.71	2.16	1.99	4.93
stndrd20	442	873	734	928	781	592	926
	0.29	0.26	0.38	0.27	1.48	1.33	2.64
stndrd21	653	1339	1017	1599	489	480	861
	0.84	0.71	1.08	0.76	1.62	2.03	4.34
stndrd22	413	852	693	949	770	479	924
	0.28	0.28	0.36	0.28	1.52	1.02	2.71
stndrd23	655	1314	966	1444	452	488	865
	0.84	0.71	1	0.7	1.51	2.05	4.44
stndrd24	555	1021	959	1480	2940	572	973
	0.36	0.34	0.48	0.44	6.48	1.18	3.4
stndrd25	885	2138	1535	2439	2508	755	1433
	1.05	1.09	1.56	1.15	9.07	3.13	8.32
stndrd26	500	1015	865	1056	1021	509	562
	0.34	0.34	0.47	0.32	1.93	1.05	1.66
stndrd27	819	1978	1365	2514	959	542	1106
	0.98	1.01	1.42	1.22	3.1	2.09	6.31
stndrd28	1117	2963	1942	3149	2357	2099	2299
	1.5	1.87	2.2	1.95	10.25	10.76	14.11
stndrd29	1264	3416	2356	3817	1559	2096	2879
	1.93	2.44	3.17	2.79	6.68	13.42	21.56
stndrd30	1583	4499	2939	4719	2104	2373	3059
	3.24	3.99	5.01	3.85	12.46	20.52	29.29
stndrd31	1885	4910	3042	4796	2643	2263	2923
	4.01	4.44	5.56	4.15	19.13	20.62	32.43
stndrd32	1854	4762	3417	5074	2977	3681	3963
	3.57	4.3	6.04	4.49	19.6	32.74	42.85
stndrd33	1930	5624	3146	5843	3246	3627	3677
	3.77	5.13	5.56	5.33	22.18	33.26	48.6
stndrd34	2276	6085	3625	6652	3780	3455	3981
	5.11	6.18	7.68	6.84	30.75	36.89	48.46
stndrd35	2619	7920	4427	9567	4783	3968	4248
	7.01	8.7	10.5	10.7	47.87	51.22	65.91

참고문헌

[1] 정호연, 최소비용문제의 비정점 최적해에 대한 감도분석과 해법 효율화에 관한 연구, 서울대학교 공학박사 학위논문, 1994

[2] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin, Network Flows, Prentice-Hall, Inc., 1993

[3] A. I. Ali, R. Padman, and H. Thiagarajan, "Dual Algorithms for Pure Network Problems," Oper. Res., Vol. 37, No.1 (1989), pp 159-171

[4] F. Glover, D. Karney , D. Klingman, and A. Napier , "A Computational Study in Start Procedures, Basis Change Criteria,and Solution Algorithms for Transportation Problems," Management Sci. , Vol. 20 (1974), pp 793-813

[5] F. Glover, D. Karney, and D. Klingman, "Implementation and Computational Comarisons of Primal, Dual and Primal-Dual Computer Codes for Minimum Cost Network Flow Problem."Networks, Vol. 4 (1974), pp 191-212

[6] D. Goldfarb and J. Hao, S. Kai, " Anti-Stalling Pivot Rules for the Network Simplex Algorithm", Networks, Vol. 20 (1990), pp 79-91

[7] R. V. Helgason and J. L. Kennington, "An Efficient Procedure for Implementing a Dual Simplex Network Flow Algorithm," AIIE Transactions, Vol . 9, No.1 , (1977), pp 63-68

[8] Jeff L. Kennington, Richard V. Helgason, Algorithms for Network Programming, John Wiley & Sons, Inc., 1980

[9] D. A. Klingman, A. Napier, and J. Stutz, "NETGEN : A Program for Generating Large Scale Capacitated Assignment,Transportation, and Minimun Cost Flow Network Problems," Management Sci. Vol. 20, (1974), pp 814-821

[10] Katta G. Murty , Network Programming, Prentice - Hall,Inc., 1992

[11] Don T. Phillips, A. Garcia-Diaz, Fundamentals of Network Analysis,Prentice-Hall, Inc., 1981

[12] J. F. Shapiro, "A Note on the Primal-Dual and Out-of-Kilter Algorithms for Network Optimization Problems", Networks, Vol. 7 (1977), pp 81-88

[13] Robert Tarjan, "Efficiency of the Primal Network Simplex Algorithm for Minimum-Cost Circulation Problem", Mathematics of Oper. Res., Vol. 16, No.2 (1991), pp 272-291