

---

# 순환적 PRS 시스템 모델을 이용한 극초단펄스의 스펙트럼 분석

오 용 선\*

## Spectral Analyses of Ultrashort Pulses Using Recursive Partial-Response Signaling System Model

Yong S. Oh<sup>\*</sup>

### 요 약

본 논문에서는, 부분응답 전송시스템의 일반화된 모델을 수정하여 순환적 구조로 설정하고, 이를 극초단펄스의 형성과정에 적용함으로써, 펄스의 폭에 따라 그 스펙트럼을 용이하게 얻어낼 수 있는 새로운 방법을 제안하였다. 이 방법은, 시간영역에서 폭이 매우 좁기 때문에 그 주파수영역의 정확한 형태를 평가하기 어려운 극초단펄스의 스펙트럼 분석을 위하여 편리하게 사용될 수 있다. 또한, 여기서 제시하는 방법은 순환적 알고리즘을 제공하므로, 연속미분법이나 콘볼루션에 의한 방법 등 기존의 알고리즘에 비하여 수치해석적으로 용이하며 이론적 접근에 있어서도 매우 편리하게 이용될 수 있다. 만일, 극초단펄스의 기본형태가 절단형 Fourier 급수로 정확히 표현되거나, 정형화된 펄스에 의하여 근사화될 수 있다면, 본 논문의 방법은 매우 편리하게 적용된다. 기본형태를 나타내는 Fourier 급수가 소량의 항에서 절단될수록 스펙트럼은 단순한 연산에 의하여 얻어진다. 또한, 다양한 형태의 극초단펄스를 표현하기 위한 방법으로, 최소대역 부분응답 전송시스템의 보편적 형태인 9-Type을 여기에 적용하고, 차수를 증가시켜 FWHM 폭을 현저히 감소시키는 형태를 찾아, 그 스펙트럼을 유도하는 일반적 알고리즘을 제시하였다.

### Abstract

In this paper, a novel method for obtaining spectra of short pulses is proposed. This method will be well-applied to perform spectral analyses of ultrashort laser pulses which are known to be difficult to evaluate their exact forms in frequency domain because of their narrow-width characteristics in time domain. It must be noted that the method can be represented by a recursive formula derived from the PRS(partial-response signaling) model, and thus more

---

\* 목원대학교 정보통신공학과

접수일자 : 1997년 9월 8일

easily available for numerical solutions than the conventional methods such as consecutive differentiations and convolutions. The pulses whose fundamental frames can be exactly determined or approximately represented by truncated Fourier series have well-behaving conditions for applications of this new method. Moreover, the transversal 9-type PRS model can offer various approximations for spectral analyses of ultrashort pulses currently used in transmission systems.

## 1. 서 론

최근, 초고속 정보통신망의 확산과 더불어 그 물리계층의 전송선로 상에서 디지털 정보를 표현하기 위한 수단으로 극초단펄스(ultrashort pulse)에 대한 관심이 고조되고 있다. 선로의 전송속도가 수십 혹은 수백 Gbps 이상 되면, 외부조건에 의한 잡음과 왜곡 뿐 아니라 이웃한 전송심볼 사이에서 발생하는 방해가 더욱 심각한 문제로 대두되며, 이를 해결하기 위해서는 극히 좁은 폭의 펄스를 사용하는 전송시스템을 필요로 한다. 이에 대한 최근의 연구는, 광섬유를 통과하는 극초단펄스의 발생, 전송 및 검파 등 광펄스 신호처리 기술의 개발에 초점이 맞추어지고 있다[1,2].

이러한 극초단펄스를 취급함에 있어서 나타나는 가장 난해한 문제점 중의 하나는 그 스펙트럼의 형태가 정확히 알려지지 않는다는 사실에 기인한다. 물론, 복잡한 광파시스템에 의하여 발생되는 극초단펄스의 스펙트럼을 정확히 산출하거나, 시간에 따라 변화하는 펄스의 스펙트럼을 추적하는 것은 매우 어려운 일일 것이다. 그러나, 만일 이러한 측정에 대한 기준이 마련되고, 그 폭과 형태에 따라 스펙트럼을 예측할 수 있다면 극초단펄스의 측정 및 신호처리 과정에서 매우 편리할 것이며, 펄스의 발생과 다중화 등에서 획기적 진보의 기반을 형성할 수 있을 것이다.

본 논문에서는, 기존에 대역효율적인 전송방식으로 널리 알려진 부분응답 전송시스템(partial-response signaling)[3]의 일반적 모델을 순환형으로 수정하여, 차수의 증가에 따라 그 폭이 좁아지는 고차원펄스(high-order pulse)의 스펙트럼을 체계적으로 산출하고[4], 이를 기반으로 극초단펄스의 스펙트럼을 추적하는 새로운 방법을 제안하고자 한다.

먼저, 수정된 모델을 적용하여 순환의 회수에 따라 점차로 폭이 좁아지는 고차원펄스의 형태를 마련하고, 이를 극초단펄스에서 측정되는 FWHM (full-width half maximum) 폭에 따라 적합시킨다. 다음으로, 설정된 모델을 해석하여, 고차원펄스의 스펙트럼을 차수에 따라 체계적으로 산출할 수 있는 순환식과 각 펄스형태에 따르는 파라미터를 산출할 수 있는 목록을 개발한다. 이러한 일련의 과정은 소위 대표공식(representative formula)이 유도과 뼈대공식(frame formula)의 개발로 체계화될 수 있다. 순환관계에 의한 스펙트럼의 측정은 기존의 방식에 비하여 이론적으로나 수치해석적으로 유리하나, 실질적인 극초단펄스의 형태에 적합시킬 수 있는 고차원펄스를 제공하지는 못한다. 만일, 분석하고자 하는 극초단펄스의 FWHM 폭이 주어진다면, 우리는 이를 고차원펄스의 차수와 적합시켜 그 근사적 스펙트럼을 얻어낼 수 있을 것이다.

미지의 다양한 극초단펄스 형태를 제공하기 위하여, 최소대역전송을 위하여 사용되고 있는 부분응답 전송시스템의 9가지 모델을 이 방법에 적용함으로써, 차수에 따라 그 FWHM 폭을 현저히 감소시키는 예를 찾고, 이로부터 실질적 적응성을 판단하였다.

본 논문의 나머지 부분은 다음과 같이 구성된다. 제II장에서는, 극초단펄스를 표현하는 고차원펄스의 형식을 정의하고, FWHM 폭을 적합시켜 스펙트럼을 측정할 수 있는 기반을 마련한다. 이어서, 제III장에서는, 모델의 해석을 기반으로 스펙트럼을 구하는 대표적 순환식(대표공식)과 파라미터를 얻을 수 있는 목록(look-up table)을 개발하며, 실질적으로 스펙트럼을 산출하는 방법을 제안한다. 제IV장에서는, 여러 가지 극초단펄스를 근사화할 수 있는 다양한 펄스형태와 그 스펙트럼을 제공하기 위하여, 기존의 9-type 부분응답 전송시스템 모델에 의하여 형성되는 고차원펄스

들을 제시하기로 한다. 제 V 장은, 향후의 과제를 포함하여 본 논문의 결과를 정리하였다. 또한, 부록 1 과 부록 2 에서는, 대표적 순환식과 목록에 의한 스펙트럼 분석을 위한 뼈대공식을 각각 유도하고 있다.

## II. 펄스의 표현과 순환형 모델

극초단펄스의 스펙트럼을 얻기 위해서는 이를 근사화하는 펄스를 정의하고, 그 펄스신호의 Fourier 변환을 유도하는 대표적 순환식을 마련한 후, FWHM 폭에 따라 모델 및 차수를 적합시키는 과정으로 진행한다.

먼저, 주기함수(periodic function)를  $n$ -제공하고, 여기에 원점에 중심을 둔 게이트(gate)를 곱하여, 다음과 같이 시간영역에서의  $n$ -차원 펄스를 정의한다.

$$p_n(t) = A \{u(t)\}^n \prod \left( \frac{t}{2\tau} \right), \text{ for } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

여기서, 펄스의 형태를 결정하는 함수  $u(t)$ 는 하나의 주기함수이며, 여기에 폭이  $2\tau$ 인 게이트를 곱하여 시간영역을 한정함으로써 펄스를 표현한다. 따라서 식(1)은 모든 형태의 펄스를 표현할 수 있다. 만일, 차수  $n$ 이 증가할수록 펄스  $p_n(t)$ 의 FWHM 폭이 감소한다면, 이는 고차원펄스로 정의되며 극초단펄스의 다양한 형태를 근사화할 수 있다[5].

결국, 극초단펄스의 스펙트럼을 유도하는 일은 식(1)로 표현된 펄스의 Fourier 변환을 일반적 형태로 얻어내는 일과 펄스의 차수에 따른 폭과 극초단펄스의 FWHM 폭을 비교하는 과정으로 귀결된다.

식(1)에 주어진  $n$ -차원 펄스의 스펙트럼을 유도하는 순환식을 얻기 위하여 그림 1과 같은 모델을 설정한다. 모델은 크게 두 부분으로 구성되어 있다. 전달함수  $K(f)$ 로 표시된 부분은  $2N$ 개의 지연요소(delay element)와  $2N+1$  개의 계수곱셈기(coefficient multiplier)가 격자형으로 연결되며, 이들 각각의 출력은 하나의 합산기에 의하여 통합되어 있다. 한편, 전달함수  $G_n(f)$ 로 표시된 부분은  $(n-1)$ -차원 모델의 전체 주파수응답인  $H_{n-1}(f)$

와 동일한 대역제한여파기(bandlimiting filter)이다.

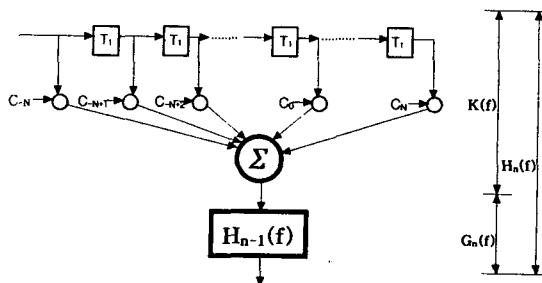


그림 1. 펄스 스펙트럼을 유도하기 위한 순환형 모델  
Fig. 1. The recursive model for deriving the spectra of pulses

주지하는 바와 같이, 대역제한 여파기의 전달함수는 그 바로 이전 차수의 전체 전달함수와 동일하므로, 그림 1의 모델은 원래의 부분응답 전송시스템 모델을 순환형으로 수정한 것이라고 볼 수 있다.

## III. 스펙트럼 분석을 위한 순환식과 파라미터 목록

그림 1의 모델로부터, 1-차원 초기 전달함수를

$$G_1(f) = H_0(f) = A \prod (T_2 f) \quad (2)$$

라 두자. 여기서  $T_2$ 는 지연소  $T_1$ 과 구별하기 위하여 사용되었다. 이는 나이퀴스트 속도를 유지하는 최소대역 전송여파기의 식과 일치하며 원래 부분응답 전송시스템의 대역제한여파기를 그대로 사용한 것이다[3]. 한편, 지연소  $T_1$ 으로 이루어진 트랜스버설여파기(transversal filter)의 시스템함수

$$k(t) = \sum_{r=-N}^N C_r \delta(t - rT_1) \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow K(f) = \sum_{r=-N}^N C_r \exp(-j2\pi f r T_1)$$

를 이용하여 순환적으로 차수를 증가시켜 가면,  $n$ -차 시스템함수는 다음과 같은 정리로 요약될 수 있다.

<정리 1>

$$P(n) : H_n(f) = A \left\{ \sum_{r=-N}^N C_r \exp(-j2\pi f r T_1) \right\}^n \Pi(T_2 f)$$

$$\Leftrightarrow h_n(t) = \frac{A}{T_2} \left( \sum_{r=-N}^N C_r \right)^n \left\{ \text{sinc} \left( \frac{t}{T_2} - \frac{T_1}{T_2} \sum_{s=1}^n r_s \right) \right\} \quad (4)$$

for  $n = 1, 2, 3, \dots$

여기서 기호 ' $\Leftrightarrow$ '은 신호와 스펙트럼의 관계를 나타내는 Fourier 변환쌍을 표시하며, 식의 표시를 단순화하기 위하여 다중합(depth of summations) 표시방법을 사용하였다. 이에 대한 정의를 포함하여 <정리1>의 증명은 부록1에 제시하였다.

<정리1>의 변환쌍에 쌍대성(duality)을 적용하고, 해석을 위하여 설정된 파라미터를  $T_1 = 1/T_0$ ,  $T_2 = 1/2\tau$ 로 두어 식(4)를 다시 쓰면, 식(1)에 주어진  $n$ -차원 펄스와 관련하여 그 신호형태와 스펙트럼을 동시에 유도할 수 있는 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$p_n(t) = A \left\{ \sum_{r=-N}^N C_r \exp(-jr\omega_0 t) \right\}^n \Pi\left(\frac{t}{2\tau}\right) \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow P_n(f) = 2A\tau \left( \sum_{r=-N}^N C_r \right)^n \left\{ \text{sinc} \left( 2\tau f + \frac{2\tau}{T_0} \sum_{s=1}^n r_s \right) \right\}$$

여기서  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ 이며, 이 식은  $n = 1, 2, 3, \dots$ 인 모든 차수에 대하여 성립한다.

식(1)과 식(5)를 비교하여 보면, 주기함수  $u(t)$ 가 절단형(truncated) Fourier 급수로 표시되었음을 알 수 있다. 한편, 모든 주기함수는 Fourier 급수로 완전하게 표현될 수 있으므로 이들을 비교하기 위하여 다음과 같이 표시하여 보자.

$$u(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_r \exp(-jr\omega_0 t),$$

$$u_N(t) = \sum_{r=-N}^N C_r \exp(-jr\omega_0 t), \quad (6)$$

where  $= \frac{2\pi}{T_0}$

이 두 개의 식은, 합의 상하한  $r$ 의 범위만을 달리하고 있음을 볼 수 있다. 이 때, 임의의 펄스가 유한한  $N$ 에 관하여  $u(t) = u_N(t)$ 를 만족하면, 본 논문이 제안하는 방법에 의하여 정확한 스펙트럼을

유도할 수 있으며, 이러한 펄스를 '정형화된 펄스(formalized pulse)'라 부르기로 한다. 일반적으로 정형화되지 않은 펄스는 본 논문의 방법에 의하여 스펙트럼의 근사치를 유도할 수 있다.

정형화된 펄스이기 위한 식  $u(t) = u_N(t)$ 를 만족하기 위한 충분조건은

$$T_0 u(t) = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} u(z) S_N(z-t) dz \quad (7)$$

where

$$S_N(z-t) = \frac{\sin \left\{ \left( N + \frac{1}{2} \right) \omega_0 (z-t) \right\}}{\sin \left\{ \frac{\omega_0}{2} (z-t) \right\}}$$

와 같이 주어짐이 알려져 있다[6].

만일, 우리가 분석하고자 하는 극초단펄스가 정형화되지 않았다면, 본 논문의 방법은 정확한 스펙트럼을 유도하지 못한다. 그러나, 그 부정형성의 정도에 따라 스펙트럼의 근사치를 얻어내는 데에는 매우 편리하게 사용될 수 있는 것이다.

펄스의 기본형태가 유한한  $N$ 에 관하여  $u(t) = u_N(t)$ 를 만족하거나 혹은 식(7)을 만족한다면, 식(5)로 주어진 스펙트럼은 다음과 같이 좀 더 편리한 관계식으로 나타낼 수 있다.

<정리 2>

$$Q(n) : P_n(f) = 2A\tau \sum_{i=0}^n b_{n,i} \text{sinc}(2\tau f + d_{n,i})$$

where

$$t_n = 2nN$$

$$b_{n,i} = \sum_{x=0}^{2N} C_{N-x} b_{n-1, i-(2N-x)} \quad (8)$$

with  $b_{0,0} = 1$

$$b_{p,q} = 0, \text{ for } q < 0 \text{ or } q > 2pN$$

$$d_{n,i} = \frac{2\tau}{T_0} (i - nN), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

이 정리에 대한 증명은 부록2에 제시하였다.

<정리2>에 주어진 스펙트럼의 식은 <정리1>의 식보다 매우 단순화되어 있음을 볼 수 있다. 즉, <정리1>의

식에서 다중합으로 주어졌던 부분이 <정리2>의 식에서는 사라지고, 단지 펄스의 형태와 차수에 따라 식(8)에 주어진 세 가지 파라미터를 결정함으로써 스펙트럼이 유도된다는 것이다. 더욱이, 이들 파라미터는 펄스의 기본형이 주어지면 차수에 따라 순환적으로 발생될 것이므로, 우리는 이를 찾아보기 목록(look-up table)의 형태로 정리할 수 있다. 저자의 논문 [5]에는 가장 흔히 사용되는 여현펄스(cosine pulse)와 상승여현펄스(raised cosine pulse)에 대하여 차수에 따르는 파라미터 목록과 펄스형태의 변화를 제시한 바 있다. 사실, 이들은 극초단 레이저펄스의 형태를 가장 보편적으로 근사화할 것으로 예측되는 펄스들 중 일부이다.

#### IV. PRS 9-Type 모델에 의한 근사화

그림1에 주어진 모델의 원형은 최소대역 전송을 위한 부분응답 전송시스템의 일반화된 형태이다. 전송된 바와 같이, 그림1은 펄스의 스펙트럼을 유도하기 위하여 이를 순환형으로 수정한 것이다.

Pasupathy의 논문 [3]에는 부분응답 전송시스템의 9 가지 보편적 형태를 제안하고 있다. 이 장에서는 이들 9-type 모델 중 다양한 극초단펄스의 형태를 근사화할 수 있는 것들을 선정하여 스펙트럼과 함께 제시하고자 한다.

##### 1. Type-1 : $F(D) = 1 + D$

이 형태는 여현펄스의 전형적인 예이며, 가장 많은 종류의 극초단펄스를 근사화할 것으로 예측된다. 그  $n$ -차 펄스와 스펙트럼은 다음과 같이 주어진다.

$$p_n(t) = A \left( \cos \frac{\pi t}{2\tau} \right)^n \Pi \left( \frac{t}{2\tau} \right)$$

$$\Leftrightarrow P_n(f) = 2A\tau \sum_{i=0}^{2n} M_n B_{n,i} \cdot \text{sinc} \left( 2\tau f + \frac{1}{2} D_{n,i} \right) \quad (9)$$

여기서, 파라미터  $M_n, B_{n,i}, D_{n,i}$  등은 차수  $n$ 에 따라 찾아보기 목록으로 만들 수 있으며, 우리는

이를 펄스의 형태와 함께 [5]에 제시하였다.

##### 2. Type-3 : $F(D) = 1 - D^2$

이 형태는 상승여현펄스의 전형적인 예이며, 위에서 설명한 Type-1과 궁극적으로 동일한 펄스형태를 준다. 이에 대한 스펙트럼은 다음과 같이 주어진다.

$$p_n(t) = A \left( 1 + \cos \frac{\pi t}{\tau} \right)^n \Pi \left( \frac{t}{2\tau} \right)$$

$$\Leftrightarrow P_n(f) = 2A\tau \sum_{i=0}^{2n} M_n B_{n,i} \cdot \text{sinc} (2\tau f + d_{n,i}) \quad (10)$$

여기서 사용된 파라미터들도 펄스의 형태와 함께 찾아보기 목록으로 제시하였다[5].

##### 3. Type-7 : $F(D) = (1 + D)^2(1 - D)^2$

이 형태는 Twin-pulse로 불리우며, 대칭적으로 두 개의 펄스를 발생시키는 경우에 유용하다. 그  $n$ -차 펄스와 스펙트럼은 다음과 같이 주어진다.

$$p_n(t) = A \left( \sin^2 \frac{\pi t}{2\tau} \right)^n \Pi \left( \frac{t}{2\tau} \right)$$

$$\Leftrightarrow P_n(f) = 2A\tau \sum_{i=0}^{2n} M_n B_{n,i} \cdot \text{sinc} (2\tau f + 2D_{n,i}) \quad (11)$$

차수  $n$ 에 따른 파라미터  $M_n, B_{n,i}, D_{n,i}$  값들은 펄스의 형태와 함께 표1에 정리하였다.

##### 4. Type-8 : $F(D) = (1 + D)(2 - D)$

이 형태는 대칭적으로 발생되는 두 개의 펄스가 그 대칭축에 흔적을 남기는 경우에 유용하며, 그  $n$ -차 펄스와 스펙트럼은 다음과 같이 주어진다.

$$p_n(t) = A \left( 5 + \cos \frac{\pi t}{\tau} - 4 \cos^2 \frac{\pi t}{\tau} \right)^n \cdot \Pi \left( \frac{t}{2\tau} \right)$$

$$\Leftrightarrow P_n(f) = 2A\tau \sum_{i=0}^{4n} M_n B_{n,i} \cdot \text{sinc} (2\tau f + d_{n,i}) \quad (12)$$

표 1. (Type-7) 펄스를 위한 look-up table

Table 1. The look-up table for Type-7 pulses

$$p_n(t) = A \left( \sin^2 \frac{\pi t}{2\tau} \right)^n \cdot \Pi \left( \frac{t}{2\tau} \right) \Leftrightarrow P_n(f) = 2A\tau \sum_{i=0}^{2n} M_n B_{n,i} \cdot \text{sinc}(2\tau f + 2D_{n,i})$$

n	M <sub>n</sub>	B <sub>n,i</sub>	D <sub>n,i</sub>
0	1	1	0
1	1/4	-1 2 -1	-1 0 1
2	1/4 <sup>2</sup>	1 -4 6 -4 1	-2 -1 0 1 2
3	1/4 <sup>3</sup>	-1 6 -15 20 -15 6 -1	-3 -2 -1 0 1 2 3
4	1/4 <sup>4</sup>	1 -8 28 -56 70 -56 28 -8 1	-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4
·	·	·	·
·	·	·	·

표 2. (Type-8) 펄스를 위한 look-up table

Table 1. The look-up table for Type-8 pulses

$$p_n(t) = A \left( 5 + \cos \frac{\pi t}{\tau} - 4 \cos^2 \frac{\pi t}{\tau} \right)^n \cdot \Pi \left( \frac{t}{2\tau} \right) \Leftrightarrow P_n(f) = 2A\tau \sum_{i=0}^{4n} M_n B_{n,i} \cdot \text{sinc}(2\tau f + d_{n,i})$$

n	M <sub>n</sub>	B <sub>n,i</sub>	d <sub>n,i</sub>
0	1	1	0
1	1/2	-2 1 6 1 -2	-2 -1 0 1 2
2	1/2 <sup>2</sup>	4 -4 -23 8 46 8 -23 -4 4	-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4
·	·	·	·
·	·	·	·

표 3. (Type-9) 펄스를 위한 look-up table

Table 1. The look-up table for Type-9 pulses

$$p_n(t) = A \left( 1 - \cos \frac{2\pi t}{\tau} + 4 \sin^2 \frac{2\pi t}{\tau} \right)^n \cdot \Pi \left( \frac{t}{2\tau} \right) \Leftrightarrow P_n(f) = 2A\tau \sum_{i=0}^{4n} M_n B_{n,i} \cdot \text{sinc}(2\tau f + d_{n,i})$$

n	M <sub>n</sub>	B <sub>n,i</sub>	D <sub>n,i</sub>
0	1	1	0
1	1/2	-2 -1 6 -1 -2	-2 -1 0 1 2
2	1/2 <sup>2</sup>	4 4 -23 -8 46 -8 -23 4 4	-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4
·	·	·	·
·	·	·	·

파라미터  $M_n, B_{n,i}, d_{n,i}$  등과 펄스의 형태를 표2에 제시하였다.

5. Type-9 :  $F(D) = (1 - D^2)(2 + D^2)$

이 형태는 두 개씩 대칭적으로 발생하는 네 개의 다발적 펄스를 근사화할 때 유용하다. 또한, 양측의 두 펄스는 대칭축에 흔적을 남기고 있다. 그  $n$ -차 펄스와 스펙트럼은 다음과 같이 주어진다.

$$p_n(t) = A \left( 1 - \cos \frac{2\pi t}{\tau} + 4 \sin^2 \frac{2\pi t}{\tau} \right)^n \cdot \Pi \left( \frac{t}{2\tau} \right) \quad (13)$$

$$\Leftrightarrow P_n(f) = 2A\tau \sum_{i=0}^{2n} M_n B_{n,i} \cdot \text{sinc}(2\tau f + d_{n,i})$$

이 스펙트럼의 파라미터  $M_n, B_{n,i}, d_{n,i}$  등은 펄스의 형태와 함께 표3에 제시하였다.

여기에 나타내지 않은 네 가지 형태는, 최소대역 전송을 위한 시스템으로는 유용하나 그 펄스의 형태가 차수에 따라 FWHM 폭을 감소시키지 아니하므로 극초단펄스의 형태를 근사화할 수 없다.

V. 결 론

미래의 초고속 전송방식의 디지털 단위펄스로 각광받고 있는 극초단펄스는 매우 좁은 폭과 광대역 스펙트럼을 갖기 때문에 이들의 형태를 정확히 측정하기는 어렵다. 본 논문에서는 이러한 난점을 극복하기 위하여, 차수의 증가에 따라 FWHM 폭이 현저히 감소하는 고차원펄스들을 정형화하여 극초단펄스의 형태로 근사화하고, 이들의 스펙트럼을 체계적으로 얻을 수 있는 알고리즘을 개발하였다. 또한, 각각의 스펙트럼에 대하여 필요한 파라미터를 찾아보기 목적으로 정리함으로써 복잡한 계산을 피하고 기본관계식으로부터 직접 스펙트럼의 형태를 유도할 수 있는 방법을 제시하였다.

향후, 본 논문을 통하여 제안된 펄스형태들과 스펙트럼은 극초단펄스를 이용한 초고속 전송시스템

의 개발에 있어서 발생, 전송, 검파, 다중화 등 다양한 신호방식을 연구할 때 매우 유용할 것으로 사료된다. 이러한 극초단펄스에 대한 광범위한 적용이 본 연구의 활용방안 및 후속 연구과제로 제시된다. 특히, [5]에 제시하였던 Type-1, Type-2와 본 논문에서 제시된 Type-7, Type-8 등은 지금까지 잘 알려진 극초단펄스의 형태들과 매우 유사하여 주목된다.

부록 1. <정리 1>에 대한 증명

먼저, 정리의  $H_n(f), n=1, 2, 3, \dots$ 는 식(2)를 초기조건으로 하는 간단한 귀납법으로 쉽게 입증될 수 있으므로, 여기서는  $h_n(t), n=1, 2, 3, \dots$ 에 관한 증명만을 제시하기로 한다. 이것도 다음과 같이 수학적귀납법을 사용하여 입증할 수 있다.

Basis step :  $n=1$ 일 때, 식(3)과 식(2)의 역변환을 이용하여 다음과 같은 시스템응답을 얻을 수 있다.

$$h_1(t) = k(t) * h_0(t) = \sum_{r=-N}^N C_r h_0(t - rT_1) \quad (1-1)$$

$$= \frac{A}{T_2} \sum_{r=-N}^N C_r \text{sinc} \left( \frac{t}{T_2} - \frac{T_1}{T_2} r \right)$$

이는 <정리 1>의 P(1)이 성립함을 말해준다.

Induction step : <정리 1>에서 P(m)이  $m \geq 1$ 에 대하여 성립한다고 가정하면, 우리는 다음과 같은 함수를 얻는다.

$$h_m(t) = \frac{A}{T_2} \left( \sum_{r=-N}^N C_r \right)^m \quad (1-2)$$

$$\left\{ \text{sinc} \left( \frac{t}{T_2} - \frac{T_1}{T_2} \sum_{s=1}^m r_s \right) \right\}$$

여기에 식(3)을 적용하여 한 번 더 순환한 형태를 구하면,  $(m+1)$ 에 대하여

$$\begin{aligned}
 h_{m+1}(t) &= k(t) * h_m(t) = \sum_{r=-N}^N C_r h_m(t - rT_1) \\
 &= \sum_{r=-N}^N C_{r_{m+1}} \left[ \frac{A}{T_2} \left( \sum_{r=-N}^N C_r \right)^m \right. \\
 &\quad \left. \left\{ \text{sinc} \left( \frac{t}{T_2} - \frac{T_1}{T_2} r_{m+1} - \frac{T_1}{T_2} \sum_{s=1}^m r_s \right) \right\} \right] \quad (1-3) \\
 &= \frac{A}{T_2} \left( \sum_{r=-N}^N C_r \right)^{m+1} \\
 &\quad \left\{ \text{sinc} \left( \frac{t}{T_2} - \frac{T_1}{T_2} \sum_{s=1}^{m+1} r_s \right) \right\}
 \end{aligned}$$

와 같은 결과를 얻을 수 있다. 이는, <정리 1>의 P(m+1)도 성립함을 말해준다.

그러므로, 수학적귀납법에 의하여 <정리 1>의 P(n)은 모든  $n=1, 2, 3, \dots$ 에 대하여 성립한다.

**부록 2. <정리 2>에 대한 증명**

Basis step :  $n=1$ 일 때, 다중합의 개념과 식(5)를 이용하여 제1차 스펙트럼에 관한 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$P_1(f) = 2A\tau \sum_{r=-N}^N C_r \text{sinc} \left( 2\tau f + \frac{2\tau}{T_0} r_1 \right) \quad (2-1)$$

여기서 변수  $r_1 = i - N$  라 두면

$$P_1(f) = 2A\tau \sum_{i=0}^N b_{1,i} \text{sinc} (2\tau f + d_{1,i}) \quad (2-2)$$

와 같이 쓸 수 있으며, 여기서 각각의 파라미터는

$$\begin{aligned}
 t_1 &= 2N \\
 b_{1,i} &= C_{i-N} = \sum_{x=0}^{2N} C_{N-x} b_{0,i-(2N-x)} \\
 d_{1,i} &= \frac{2\tau}{T_0} (i - N), \quad \text{for } i=0, 1, 2, \dots, 2N.
 \end{aligned}$$

와 같이 계산된다. 이는 <정리 2>의 Q(1)이 성립함을 말해준다.

Induction step : 만일, <정리 2>의 Q(k)가  $k \geq 1$ 에

대하여 성립한다고 가정하면, 제k차 스펙트럼에 관한 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 P_k(f) &= 2A\tau \left( \sum_{r=-N}^N C_r \right)^k \left\{ \text{sinc} \left( 2\tau f + \frac{2\tau}{T_0} \sum_{s=1}^k r_s \right) \right\} \quad (2-3) \\
 &= 2A\tau \sum_{i=0}^N b_{k,i} \text{sinc} (2\tau f + d_{k,i})
 \end{aligned}$$

여기서 각각의 파라미터는

$$\begin{aligned}
 t_k &= 2kN \\
 b_{k,i} &= \sum_{x=0}^{2N} C_{N-x} b_{k-1,i-(2N-x)} \\
 d_{k,i} &= \frac{2\tau}{T_0} (i - kN), \quad \text{for } i=0, 1, 2, \dots, 2kN.
 \end{aligned}$$

로 계산된다.

식(5)에 주어진 대표공식의 제  $(k+1)$  차 스펙트럼은

$$\begin{aligned}
 P_{k+1}(f) &= 2A\tau \left( \sum_{r=-N}^N C_r \right)^{k+1} \\
 &\quad \left\{ \text{sinc} \left( 2\tau f + \frac{2\tau}{T_0} \sum_{s=1}^{k+1} r_s \right) \right\} \quad (2-4)
 \end{aligned}$$

와 같은 나타낼 수 있다. 다중합의 순환적 개념을 적용하고, 식(2-3)의 천이된 상태를 식(2-4)에 대입하면 다음과 같은 스펙트럼을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 P_{k+1}(f) &= 2A\tau \sum_{r_{k+1}=-N}^N C_{r_{k+1}} \left( \sum_{r=-N}^N C_r \right)^k \\
 &\quad \left[ \text{sinc} \left( 2\tau \left( f + \frac{r_{k+1}}{T_0} \right) + \frac{2\tau}{T_0} \sum_{s=1}^k r_s \right) \right] \\
 &= \sum_{r_{k+1}=-N}^N C_{r_{k+1}} P_k \left( f + \frac{r_{k+1}}{T_0} \right) \quad (2-5) \\
 &= 2A\tau \sum_{r_{k+1}=-N}^N C_{r_{k+1}} \left\{ \sum_{i=0}^N b_{k,i} \right. \\
 &\quad \left. \text{sinc} \left( 2\tau f + \frac{2\tau}{T_0} r_{k+1} + d_{k,i} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

여기서  $t_k, b_{k,i}, d_{k,i}$  등은 식(2-3)의 밑에 주어진 것과 동일한 값으로 계산된다. 이제, 식(2-5)에 나타난 두 합을 교환하고, 파라미터  $t_k$  와  $d_{k,i}$  의 값을 대입하면 다음과 같은 스펙트럼을 얻는다.



$$P_{k+1}(f) = 2A\tau \sum_{i=0}^{2kN} b_{k,i} \left[ \sum_{r_{k-1}=-N}^N C_{r_{k-1}} \operatorname{sinc}\left\{2\tau f + \frac{2\tau}{T_0} (i - kN + r_{k+1})\right\} \right] \quad (2-6)$$

마지막으로, 식(2-6)의 [ ] 안에 주어진 합을 변수  $r_{k+1}$ 에 대하여 전개하고, 다시 외부의 합을 변수  $i$ 에 관하여 전개한다. 사실, 이러한 전개는 매우 복잡하고 많은 항을 갖는 수식으로 나타나지만, 이를  $\operatorname{sinc}(\cdot)$  함수의 지연요소에 따라 결합하면, 다음과 같은 간단한 식으로 정리된다.

$$P_{k+1}(f) = 2A\tau \sum_{i=0}^{k-1} b_{k+1,i} \operatorname{sinc}(2\tau f + d_{k+1,i}) \quad (2-7)$$

여기서 각각의 파라미터는

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= 2(k+1)N \\ b_{k+1,i} &= \sum_{x=0}^{2N} C_{N-x} b_{k,i-(2N-x)} \\ d_{k+1,i} &= \frac{2\tau}{T_0} \{i - (k+1)N\}, \\ &\text{for } i=0, 1, 2, \dots, 2(k+1)N. \end{aligned}$$

와 같이 계산된다. 이는 <정리 2>의  $Q(k+1)$  또한 성립함을 말해준다.

그러므로, 수학적귀납법에 의하여 <정리 2>의  $Q(n)$ 은 모든  $n=1, 2, 3, \dots$ 에 관하여 성립한다.

### 참 고 문 헌

- [1] T.E.Bell, J.A.Adam, and S.J.Lowe, "Technology 1996, Communications," IEEE Spectrum, pp.30-41, Jan.1996.
- [2] M.Saruwatari, K.Nakagawa, S.Kawanishi, and A.Takada, "Advanced Optical Communications Technologies Utilizing Ultrashort Optical Pulses," Springer Series Vol.48, Ultrafast Phenomena VI, pp.164-168, 1988.
- [3] P.Kabal and S.Pasupathy, "Partial - Response Siganling," IEEE trans. on Commun., Vol.COM-23, pp.921-934, Sep.1975.
- [4] C.E.Kang and Y.S.Oh, "The Look-up Table for Deriving the Fourier Transforms of Cosine-Pulses," IEEE trans. on Educ., Vol.37, No.3, pp.306 -311, Aug.1994.
- [5] C.E.Kang and Y.S.Oh, "Deriving the Fourier Transforms of High Order Pulse Signals," to be published in IEEE trans. on Educ., Nov.1997.
- [6] H.Stark and F.B.Tuteur, Modern Electrical Communications-Theory and Systems, Prentice-Hall, pp.27-29, 1979.
- 오 용 선(Yong S. Oh)  
1976. 3 - 1983. 2 연세대학교 공과대학 전자공학과 (공학사)  
1983. 3 - 1985. 2 연세대학교 대학원 전자공학과(공학석사)  
1985. 3 - 1992. 2 연세대학교 대학원 전자공학과(공학박사)  
1984. 3 - 1986. 7 삼성반도체통신(주) 시스템개발실 연구원  
1987. 1 - 1988. 2 3J TECH. INC. 선임연구원  
1988. 3 - 현 재 목원대학교 전자·정보통신공학부 교수, 한국해양정보통신학회, 한국통신학회, 대한전자공학회, IEEE 정회원  
관심분야 : 디지털 통신, 펄스 전송, 해양정보통신