

모델화한 비대칭형 막기공에서 뉴턴 유체의 속도분포에 관한 이론해석

전 명 석* · 김 재 진

한국과학기술연구원 고분자부 분리막실
(1997년 5월 16일 접수)

Theoretical Analysis on the Velocity Profile of Newtonian Fluids within Modelled Asymmetric Membrane Pores

Myung-Suk Chun* and Jae-Jin Kim

Membranes Lab., Polymer Division, Korea Institute of Sci. and Tech., Seoul 130-650, KOREA
(Received May 16, 1997)

요 약 : 비대칭형 막기공을 통한 뉴턴 유체의 발산흐름(diverging flow)에 대한 심도있는 해석 결과를 제시하였다. 막기공 모델의 일반적 형태인 슬릿 slit)과 원뿔 cone)형 채널에 대해 미동흐름(creeping flow)을 적용하여 유속분포 관계식을 구하였다. 유속분포의 고찰로부터 발산각도 $\alpha \rightarrow 0$ 인 경우는 윤활근사법(lubrication approximation)이 적용되어 Poiseuille 흐름으로 되는 것을 확인하였고, 발산각도가 증가할수록 벽면부근에서의 유속분포는 결핍(depletion)됨과 아울러 전체유속은 감소하였다. 구해진 속도분포와 압력분포의 관계식으로부터 투과유량에 대한 이론식을 도출하였다. 예측된 결과는 기공의 비대칭성이 증가할수록 그에 따른 투과유량은 점차 증가하는 거동을 보였다. 본 연구의 이론결과는 궁극적으로 막여과에의 응용 측면과 밀접하게 연관되어 있다.

Abstract : The extended analysis on the diverging flow through asymmetric membrane pores has been performed in this study. More rigorous equations of velocity profile relevant to the divergent slit and cone shaped channels, which are widely used as a general pore model, have been obtained by employing a creeping flow approach of Newtonian fluids. As a degree of asymmetry (i.e., diverging angle) is increased, the predicted flow function shifts toward the center region due to the incorporated wall effect, so that the overall velocity profile becomes decreased. It is true, as expected, that when the divergent channel is in the low diverging angle limit, the channel flow results in the Poiseuille fashion by utilizing a lubrication approximation. The flow rate equation of each type of channel has been developed from the combined solution of velocity profile and pressure fields. The effect of diverging flow on the flow rate enhancement has been remarkably predicted, in which the flow rate increases with the increase of pore asymmetry. The advantage of our theoretical results lies in the analytical expression for the diverging flow behavior through pore channels as well as its ability to play a fundamental role on the related membrane filtrations such as microfiltration and ultrafiltration.

1. 서 론

막기공의 평균크기가 대략 $0.1 \sim 10 \mu\text{m}$ 인 정밀 여과(microfiltration)나 $0.001 \sim 0.1 \mu\text{m}$ 인 한외여과

(ultrafiltration)에서는 공통적으로 분리 구동력인 압력차이에 의해 원하고자 하는 입자를 분리하고 있다. 이와 같은 막여과 프로세스에 있어서의 분리메카니즘의 규명은 수력적 원리에 의한 막기공에서의 유체와

입자의 흐름을 이해하는 것이 핵심적 관건이다. 그것은, 수력적 특성의 기본인 유체의 속도분포에 대한 예측은 투과플럭스(permeation flux)와 배제율(rejection)은 물론이고, 막의 오염(fouling), 그리고 더 나아가 모듈설계에 이르기까지 밀접하게 연관되어 있기 때문이다[1,2,3].

다공성인 정밀여과나 한외여과막이 실지로 갖는 기공의 구조(morphology)는 매우 복잡하고 불규칙하고 또한 3차원적으로 상호연결되어 있다. 각종 전자현미경에 의해 정밀하게 관측된 이들 막기공의 구조를 종합화해서 분석해 보면, 가장 일반적인 fibrous network인 lacy 형태, percolating foam인 open cellular 형태, 그리고 주로 스킨층(skin layer)에서 흔한 nodular 형태의 범주로 크게 분류된다[4]. 이같은 기공구조의 불규칙성에도 불구하고 해석의 복잡성으로 인해 현실적으로는 기공을 단순화한 물리적 모델로 가정해서 문제를 구성해야 한다. 막기공을 통한 흐름현상에 대해서는 일찍이 오래 전부터 지금까지 많은 자연과학 연구자들의 흥미있는 물리적인 관심대상으로 다양하고 심도있는 연구결과가 축적되어 왔음을 알 수 있다[5,6,7]. 가장 일반적인 기공모델로서 균일(uniform)한 실린더형 기공들의 규칙적 배열(parallel array)을 설정하고 Hagen-Poiseuille 법칙[8]을 적용하는 것이 지배적이다.

대부분의 막여과에서 점도 η 인 뉴턴 유체의 기공 내부에서의 흐름은 레이놀즈수(Reynolds number, Re)가 극히 작은 미동흐름(creeping flow)에 해당하는데, 이 경우 압력구동흐름(pressure-driven flow)에서의 속도분포는 다음 운동방정식으로 구해진다.

$$\eta \nabla^2 v = \nabla p \tag{1}$$

하지만, 이러한 가정이 무리없이 적용될 수 있는 경우는 track-etched 방식에 의한 폴리카보네이트 대칭막과 같이 극히 일부분에만 해당된다. 대다수의 비대칭형 정밀여과 및 한외여과막에서는 윤기있는(shiny) 최상부의 스킨층에서 기공크기가 가장 작고 하부 지지층(support layer)으로 내려갈수록 기공은 차츰 커져서 결국에는 거대기공(macroid)을 형성한다[9]. 즉, 유체가 통과하는 빈 공간(space)은 기하학적으로는 α 각도만큼 점차 벌어지는 원뿔 (즉, cone이나 funnel) 형태이고 유체의 운동은 일종의 발산흐름(diverging flow)이라 할 수 있다. 비평행(nonparallel)한 슬릿(slit)에서의 일차원 발산흐름인 이른바 Hamel 흐름에 관해서는 오래 전부터 관심의 대상이 되어온 바 있다

[10,11]. 전산기에 의한 수치해 연구가 발전함에 따라 막기공에 대한 추계적(stochastic) 모델등의 적용으로 복잡한 기하학적 구조에서의 유체흐름에 관한 새로운 연구결과들이 많이 나오고 있으나, 방대한 계산과정으로 인해 막분야의 연구와 이해에 직접 적용되는 것과는 현실적인 거리가 있다고 볼 수 있다.

따라서, 본 연구의 목적은 임의의 발산각도와 기공 내의 채널입구와 출구크기의 비(ratio)를 갖는 비대칭형 기공에 대한 층류(laminar flow)해석으로 실제적인 막 구조에 한층 적합한 이론적인 결과를 제시함에 있다. 수력학적인 막기공 모델로 가장 흔히 받아들여지고 있는 슬릿형 및 실린더형 기공에서의 발산흐름에 대한 유속분포와 투과유량 관계식을 도출하였다. 본 연구에서 새로이 제시된 모델 관계식은 보편성을 갖는 수력학적 해석에 대한 정확성을 한 단계 높이는 데 유효 적절히 기여하리라 사료된다.

2. 비평행 슬릿(nonparallel slit)형 막기공을 통한 발산흐름(diverging flow)

2.1. 미동흐름(creeping flow)에 대한 유속분포 해석

우리는 유체의 흐름에 관한 기본개념을 기초로 하여 비대칭형 막기공을 Fig. 1과 같이 슬릿형 채널로 모델화 할 수 있다. 여기서, 발산각도 α 로 벌어진 두 평판사이에서의 비압축성(incompressible) 뉴턴 유체 흐름을 해석하기 위해 (r, θ, z) 의 실린더형 좌표계(cylindrical coordinate)를 설정한다. 이 경우, 유체는 전적으로 반경방향흐름 (즉, $v_\theta = v_z = 0$) 이므로 연속방정식(continuity equation)은

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = 0 \tag{2}$$

으로, 이를 적분하면 rv_r 은 θ 만의 함수이므로 반경방향속도(lateral velocity) v_r 은

$$v_r = \frac{\lambda(\theta)}{r} \tag{3}$$

이다. 반경방향속도의 부호가 (-)이면 방향이 반대인, 즉 흐름이 점차로 좁아지는 수렴성 흐름(converging flow)이다[11]. 한편, 나비에-스톡스(Navier-Stokes) 식에서 r 및 θ 방향성분은 각각 다음과 같다.

$$r\text{-component: } v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$+ \frac{\eta}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} \right] \quad (4a)$$

$$\theta\text{-component: } 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{2\eta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \quad (4b)$$

양 벽면에서는 다음의 no-slip 조건을

$$\lambda(+a) = \lambda(-a) = 0 \quad (5)$$

만족하고, 단위 두께당 투과유량 $q (= q'/W)$ 는 다음의 물질수지관계를 만족한다.

$$q = \int_{-a}^a v_r r d\theta \quad (6)$$

무차원(dimensionless) 변수를 도입하면 (4a)와 (4b) 식에서 운동방정식(momentum equation)인 다음의 3차 상미분방정식(ordinary differential equation)과 경계조건(boundary condition)식을 얻을 수 있다 (뒤의 부록A를 참고하기 바람).

$$\frac{d^3 \Lambda}{d\omega^3} + \frac{d\Lambda}{d\omega} (Re \Lambda + 4a^2) = 0 \quad (7)$$

$$BC1: \Lambda = 0 \quad \text{at } \omega = \pm 1 \quad (8a)$$

$$BC2: \int_{-1}^1 \Lambda(\omega) d\omega = 1 \quad (8b)$$

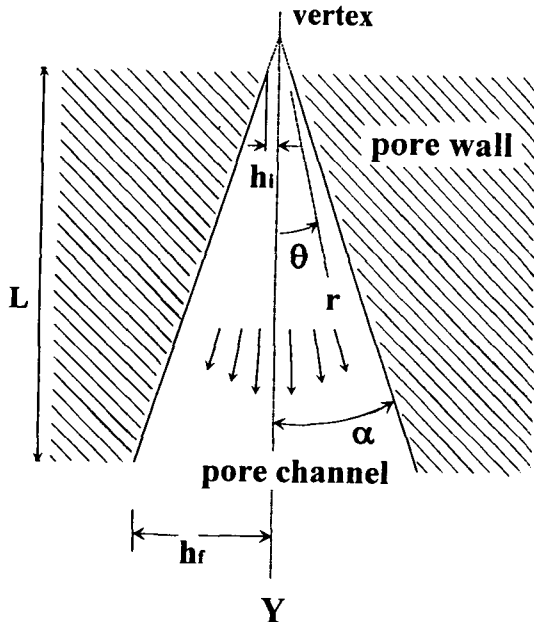


Fig. 1. Schematic illustration of nonparallel divergent slit pore.

여기서, $\omega (= \theta/a)$ 는 무차원 각도, $\Lambda (= \lambda a/q)$ 는 무차원 흐름함수(flow function), 그리고 $Re (= 2\rho q a/\eta)$ 는 레이놀즈수에 해당한다.

(7)식은 Re 값의 모든 범위에 해당하는 발산흐름에 적용되지만 여기서는 대부분의 막여과 과정에서 주로 일어나는 미동흐름의 경우만을 다루기로 한다. 미동흐름에서는 $Re \rightarrow 0$ 인데, 이는 Re 수가 갖는 물리적 의미에서 관성력(inertial force)이 점성력(viscous force)에 비해 무시할 수 있을 정도로 작다는 의미이다. 이 경우에는 지배방정식인 운동방정식이 선형(linear)이므로 일반적인 해법으로 구해지는 엄밀해(exact solution)가 존재한다는 사실이 잘 밝혀져 있다. 즉, (7)식으로부터

$$\frac{d^3 \Lambda}{d\omega^3} + 4a^2 \frac{d\Lambda}{d\omega} = 0 \quad (9)$$

인데, 앞서의 경계조건에서 Λ 에 관한 해석적 해(solution)를 다음과 같이 구할 수 있다[12].

$$\Lambda(\omega) = \frac{\alpha(\cos 2a\omega - \cos 2a)}{(\sin 2a - 2a \cos 2a)} \quad (10)$$

슬릿형 기공내의 임의의 위치 r 인 지점에서 채널중심부터 벽면까지의 길이를 h 로 놓으면, $q = 2 \langle v_r \rangle h(r) = 2 \langle v_r \rangle r \sin \alpha$ 에서 반경방향 속도분포는 다음과 같다.

$$v_r = \langle v_r \rangle \frac{2 \sin \alpha (\cos 2a\omega - \cos 2a)}{(\sin 2a - 2a \cos 2a)} \quad (11)$$

한편, $\alpha \rightarrow 0$ 이면 윤활근사법(lubrication approximation)을 적용하여[13]

$$\Lambda(\omega) = \frac{3(1 - \omega^2)}{4} \quad (12)$$

을 구하게 된다. 호의 길이(arc length) $r' (\approx r\theta)$ 로부터 이미 잘 알려져 있는 일차원 평판(1-dimensional plane) Poiseuille 흐름에서의 속도분포를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$v_{r,slit} = \frac{3}{2} \langle v_r \rangle \left[1 - \left(\frac{r'}{h} \right)^2 \right] \quad (13)$$

유속분포의 변화 거동을 살펴보기 위해 여러 발산 각도 α 에 대해 얻어진 결과를 Fig. 2에 보였다. 무차원 흐름함수(flow function) Λ 의 분포도에서 발산

각도가 대략 60°까지는 큰 변화를 보이지 않지만, 60° 이상부터는 양측 벽면에서의 흐름분포는 감소하고 대신에 중심부근에서의 흐름분포가 급격히 증가됨을 볼 수 있다. 평균속도 $\langle v_r \rangle$를 도입하여 차원화된 유속으로 그려보면 발산각도가 증가할수록 전체유속은 감소됨을 확인할 수 있는데, 마찬가지로 60° 이상에서는 양측 벽면부근에서의 유속감소가 심화됨을 보여준다.

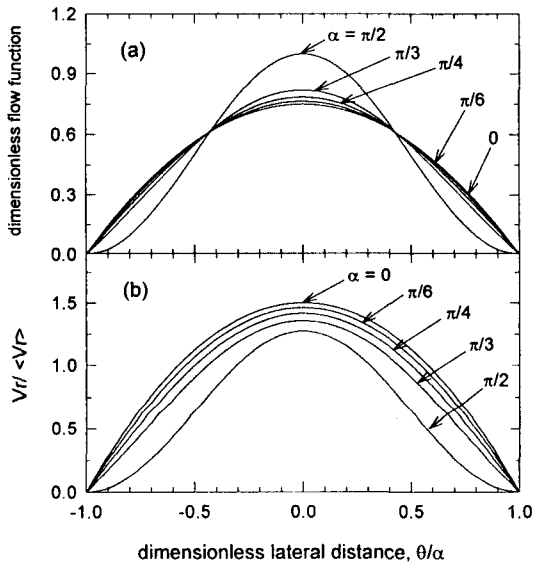


Fig. 2. Theoretical results for the (a) dimensionless flow function $\Lambda (= \lambda \alpha / q)$, and (b) dimensionless velocity profile in divergent slit pores with different diverging angles α .

2.2. 투과유량 예측

$\alpha \rightarrow 0$ 이면 (12)와 (13)식으로부터 슬릿형 채널에서의 축성분인 Y방향을 따른 투과유량 q는 기본적으로 다음과 같다.

$$q = \frac{2}{3\eta} \frac{\partial p}{\partial Y} (\cos \theta) \left(\frac{h}{\sin \theta} \right)^3 \quad (14)$$

그러면, $(h-h_i)/Y = (h_f-h_i)/L$ 인 관계에서

$$q = \frac{2h^3}{3\eta} \frac{\partial p}{\partial h} \left(\frac{h_f-h_i}{L} \right) \left(\frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \right) \quad (15)$$

이고, 압력 p는 실린더형 좌표계에서의 r 및 θ 방향에 대한 압력구배식을 적분하여 얻어지는 압력분포식으

로부터 다음과 같이 얻게 된다[12].

$$\begin{aligned} p &= p_\infty - \frac{1}{2r^2} \left(\rho \lambda^2 + \eta \frac{d^2 \lambda}{d\theta^2} \right) \\ &= p_\infty + \frac{\eta q}{2r^2 \alpha^3} \left(\frac{\partial^3 \Lambda(1)}{\partial \omega^3} + 4\Lambda \alpha^2 \right) \\ &= p_\infty + \frac{2\eta q}{r^2} \left(\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} \right) \quad (16) \end{aligned}$$

(16)식을 (15)식에 대입한 후 적분하면

$$\begin{aligned} q &= \frac{2h_i^3 (p_i - p_f)}{3\eta L} \left[\frac{\Omega \cos \alpha (\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)}{(\cos 2\alpha) (\sin^3 \alpha)} \right] \\ &= q_{slit} \left[\frac{\Omega \cos \alpha (\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha)}{(\cos 2\alpha) (\sin^3 \alpha)} \right] \quad (17) \end{aligned}$$

을 얻는데, 여기서 Ω 는 기하학적 보정계수(geometric correction factor)로서

$$\Omega = \frac{2(h_f/h_i)^2}{(h_f/h_i) + 1} \quad (18)$$

으로 유도된다. (17)식은 평행한 슬릿형 채널에서의 Poiseuille 법칙에 따른 투과유량에 대한 발산각도와 기하학적 보정계수로 대변되는 발산흐름의 효과를 정량적으로 나타내 주고 있다.

3. 원뿔(circular cone)형 막기공에서의 발산흐름(diverging flow)

3.1. 미동흐름(creeping flow)에 대한 유속분포 해석

2절에서 다룬 슬릿형 채널과 달리 원뿔형 채널에서의 발산흐름은 완전한 구 내부중심의 정점(vertex)에서 반경방향인 r방향으로 흘러나가는 경우의 일부분에 해당되므로, 이에 대한 해석을 위해 Fig. 3과 같이 (r, θ, φ) 의 구형좌표계(spherical coordinate)를 설정하였다. 구형좌표계에 대한 나비어-스톡스식에서는 θ 성분항의 영향으로 인하여 운동방정식에 대한 적절한 수식변환으로 (7)식과 같은 간단한 형태의 상미분 방정식을 얻기가 용이하지 않다. 구형좌표계에 대해서는 Gegenbauer 함수에 의한 유선함수(stream function) Ψ 의 완전해가 정의되어 있는데[7], $v_\theta = 0$ 이고 r방향에 무관하므로,

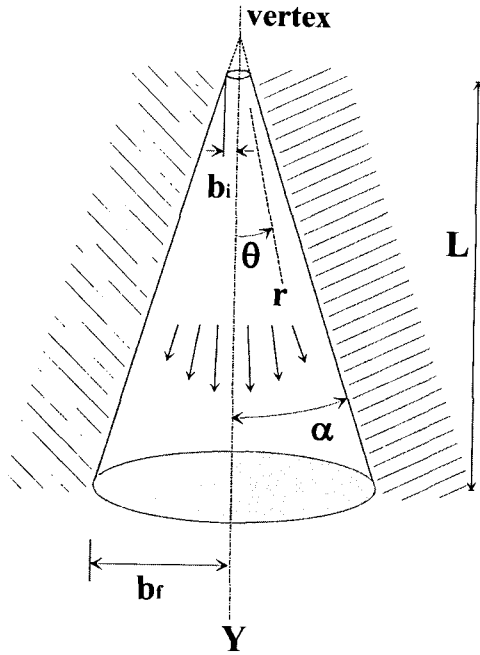


Fig. 3. Schematic illustration of divergent cone shaped pore.

$$\Psi = \Psi(\theta) \tag{19}$$

임을 알 수 있다. 한편, 경계조건으로 채널의 중심축 ($\xi = \cos \theta = 1$)과 벽면 ($\xi = \cos \alpha$)에서 각각

$$BC1: \Psi = 0 \quad \text{at } \xi = 1 \tag{20a}$$

$$BC2: \frac{d\Psi}{d\xi} = 0 \quad \text{at } \xi = \xi_0 \tag{20b}$$

을 만족한다. 그러면,

$$\Psi(\xi) = A_0 - B_1\xi + D_3(1 - \xi^2)\xi \tag{21}$$

으로 주어지는데, 여기서

$$A_0 = B_1 = -\frac{q'}{\pi} \frac{1 - 3\xi_0^2}{(1 - \xi_0)^2(1 + 2\xi_0)} \tag{22}$$

$$D_3 = \frac{A_0}{1 - 3\xi_0^2} \tag{23}$$

부피 투과유량 q' 는

$$-\frac{q'}{2\pi} = \Psi(\xi_0) \tag{24}$$

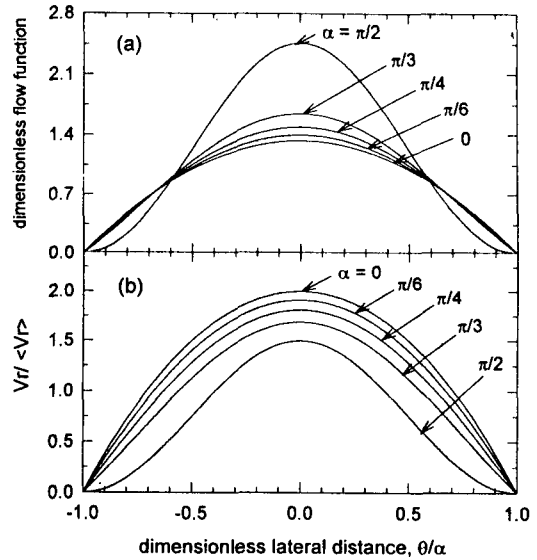


Fig. 4. Theoretical results for the (a) dimensionless flow function $\Lambda (= \lambda \alpha / q)$, and (b) dimensionless velocity profile in cone shaped pores with different diverging angles α .

이다. 한편, 반경방향속도 v_r 은 제1차와 제2차 Legendre 함수인 $P_n(\xi)$ 와 $Q_n(\xi)$ 에 의해

$$\begin{aligned} v_r = & - \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^{n-2} + B_n r^{-n-1} \\ & + C_n r^n + D_n r^{-n+1}) P_{n-1}(\xi) \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} (A'_n r^{n-2} + B'_n r^{-n-1} \\ & + C'_n r^n + D'_n r^{-n+1}) Q_{n-1}(\xi) \end{aligned} \tag{25}$$

으로 나타난다. Legendre 함수의 특성으로부터[14]

$$v_r = \frac{3q'}{2\pi r^2} \frac{\xi^2 - \xi_0^2}{(1 - \xi_0)^2(1 + 2\xi_0)} \tag{26}$$

으로 유도되는데, 기공내의 임의의 위치에서 채널중심부터 벽면까지의 길이를 b 로 하면 $q' = \pi b^2 \langle v_r \rangle = \pi (r \sin \alpha)^2 \langle v_r \rangle$ 에서

$$v_r = \langle v_r \rangle \frac{3 \sin^2 \alpha}{2} \frac{\cos^2 \theta - \cos^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2(1 + 2 \cos \alpha)} \tag{27}$$

이다. 마찬가지로 $\alpha \rightarrow 0$ 인 경우의 유효관사법을 적용

하면 이미 알려져 있는 원통관에 대한 Poiseuille 흐름의 속도 분포식을 얻게 된다.

$$v_{r, cyl} = 2 \langle v_r \rangle \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right] \quad (28)$$

Fig. 4는 여러 발산각도에 대한 유속분포의 변화로 슬릿형 기공에서와 마찬가지로 거동을 보여준다. 즉, 무차원 흐름분포와 차원화된 유속분포에 있어서 발산각도가 대략 60° 이상부터는 양측 벽면에서는 감소하고 대신에 채널 중심부근에서 급격히 증가됨을 뚜렷하게 볼 수 있다. 슬릿형 기공에 비해 실린더형에서는 중심부근에서의 유속증가 정도가 훨씬 심각한 점이 구별된다.

3.2. 투과유량 예측

$\alpha \rightarrow 0$ 이면 (28)식으로부터 실린더형 채널에서의 축성분인 Y방향을 따른 부피 투과유량은 다음과 같다.

$$q' = \frac{\pi}{8\eta} \frac{\partial p}{\partial Y} (\cos \theta) \left(\frac{b}{\sin \theta} \right)^4 \quad (29)$$

$(b-b_i)/Y = (b_f-b_i)/L$ 에서

$$q' = \frac{\pi b^4}{8\eta} \frac{\partial p}{\partial b} \left(\frac{b_f-b_i}{L} \right) \left(\frac{\cos \theta}{\sin^4 \theta} \right) \quad (30)$$

이고, 압력 p는 압력구배식을 적분하여 얻어지는 압력 분포식으로부터 다음과 같이 얻는다[7].

$$p = p_\infty - \frac{\eta q'}{\pi r^3} \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{(1 - \cos \alpha)^2 (1 + 2 \cos \alpha)} \quad (31)$$

(31)식을 (30)식에 대입한 후 적분하면

$$\begin{aligned} q' &= \frac{\pi b_i^4 (p_i - p_f)}{8\eta L} \left[\frac{\Omega \cos \alpha (1 - \cos \alpha)^2 (1 + 2 \cos \alpha)}{\sin^4 \alpha (1 - 3 \cos^2 \alpha)} \right] \\ &= q'_{cyl} \left[\frac{\Omega \cos \alpha (1 - \cos \alpha)^2 (1 + 2 \cos \alpha)}{\sin^4 \alpha (1 - 3 \cos^2 \alpha)} \right] \quad (32) \end{aligned}$$

으로, 여기서

$$\Omega = \frac{3(b_f/b_i)^3}{(b_f/b_i)^2 + (b_f/b_i) + 1} \quad (33)$$

막의 단위두께당 압력강하와 기공의 채널입구 크기를 일정한 값으로 놓고 발산각도를 변화시키면서, 발

산흐름이 없는 평행한 채널에 대한 투과유량의 증가도(flow rate enhancement)를 확인해 볼 수 있다. 실제 막기공의 단면에 대해서 각종 전자현미경으로 상부의 채널입구 및 하부의 출구 크기, 그리고 채널의 두께에 대한 관측으로 기공의 비대칭 정도를 판단해 볼 수 있다[4]. 그 결과, 채널출구의 크기는 발산각도에 의해 결정되는데 발산각도는 거의 대부분이 40° 이내의 범위를 갖는다고 하겠다. Figure 5에 나타난 예측결과는 발산각도가 증가함에 따라 투과유량은 증가되는 거동을 보이는데 이는 $q'(\alpha) = q(\alpha) = 0$ 인 경우까지 계속된다. 바로 이 경우에 유체는 흐르지 않고 평균적으로 보아 정지된 것으로 예측되므로 $q'(-\alpha) = q(\alpha) = 0$ 인 발산각도를 임계(critical) 발산각도라 할 수 있는데, 그 값은 (17)과 (32)식으로부터 슬릿형 기공에서는 45°, 원뿔형 기공에서는 $\cos^{-1}(1/\sqrt{3}) = 54.74^\circ$ 이다. 한편, 채널두께와 채널입구 크기의 비가 커질수록 투과유량의 증가도는 더욱 발달됨을 볼 수 있는데, 이는 채널출구와 입구 크기의 비에 따라 결정되는 기하학적 보정계수 Ω 의 변화에서 비롯된 결과이다. Figure 5의 이론적 결과는, 비대칭형 기공구조를 갖는 막에 대한 투과속도와 유량등의 수력학적 특성을 예측하는데 있어서 발산흐름의 영향이 고려되어야 함을 확연히 보여주는 의미를 갖는다. 이에 대한 계속 연구는, 임의의 막에 대한 용질 배제곡선(rejection curve)에서 결정되는 평균기공크기와 아울러 막구조에

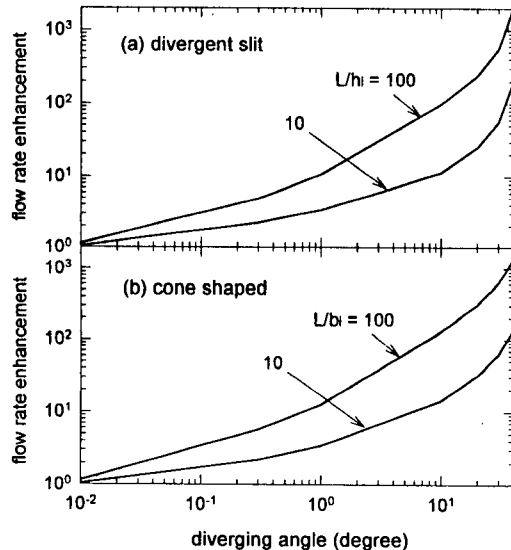


Fig. 5. Predicted flow rate enhancement for divergent slit and cone shaped pores as a function of diverging angle. For calculations, $\Delta p/L$ is assumed as a constant.

대한 관측으로 판단될 수 있는 각 층(layer)의 두께와 기공의 비대칭 정도(이는 곧, 발산각도를 의미)에 대한 실험적인 규명과 밀접하게 연관되어야 할 것으로 본다.

4. 결론

채널의 기하학적 구조에서 비롯되는 복합흐름(complex flow)의 한 형태인 발산흐름은 많은 공학적인 문제에서 접하게 된다. 다분히 수력학적 원리에 지배되는 막여과 과정에서 유속분포와 투과유량의 정량적 예측을 위해서는 비대칭형 막기공이 갖는 실제 구조를 보다 반영한 이론해석이 요구된다. 비대칭형 기공모델인 슬릿형과 원뿔형 채널에서의 미동흐름에 비압축성 뉴턴 유체에 대한 연속체 원리를 적용하여 발산각도의 영향을 내포하는 유속분포와 투과유량 관계식을 각기 도출하였다.

막기공의 발산각도가 커질수록, 채널내의 유속분포에 있어서 벽면부근에서는 결핍(depletion)되고 중심부근에서 발달(developed)되는 현상을 보였고, 투과유량에서는 발산흐름이 없는 평행한 채널에 비교하여 투과유량의 증가도가 점차 심화됨을 확인할 수 있었다. 본 연구는, 정밀여과나 한외여과 과정에서 기공구조의 비대칭성 영향을 포함하는 유속분포 및 유량등의 수력학적 특성에 관한 이론예측을 새로이 제시한 의의를 지닌다.

부록A : 슬릿형 채널의 발산흐름에 대한 기본방정식(elementary equation)의 유도

슬릿형 채널에 대한 나비야-스톡스식의 r 및 θ 방향성분인 (4a)와 (4b)식을 반경방향속도 $v_r = \lambda(\theta) / r$ 으로 표현하면 각각 다음과 같다.

$$r\text{-component: } \frac{\lambda^2}{r^3} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\eta}{\rho r^3} \frac{d^2 \lambda}{d\theta^2} \tag{A1a}$$

$$\theta\text{-component: } \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{2\eta}{r^2} \frac{d\lambda}{d\theta} \tag{A1b}$$

양변을 θ 로 미분하면

$$r\text{-component: } -\frac{2\lambda}{r^3} \frac{d\lambda}{d\theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta \partial r} + \frac{\eta}{\rho r^3} \frac{d^3 \lambda}{d\theta^3} \tag{A2a}$$

$$\theta\text{-component: } \frac{\partial^2 p}{\partial \theta \partial r} = -\frac{4\eta}{r^3} \frac{d\lambda}{d\theta} \tag{A2b}$$

인데, (A2b)식을 (A2a)식에 대입한 후 양변을 r^3/η 로 곱하면

$$\frac{d^3 \lambda}{d\theta^3} - \frac{2\rho\lambda}{\eta} \frac{d\lambda}{d\theta} + 4 \frac{d\lambda}{d\theta} = 0 . \tag{A3}$$

이 식을 무차원화 시키면, 최종적으로 $\lambda(\theta)$ 에 관한 선형 상미분방정식인 (7)식을 얻는다.

사용기호

- A_0, B_1, D_3 : 유선함수의 해에 대한 관계식[(21)식]의 계수
- $A_n, A'_n, B_n, B'_n, C_n, C'_n, D_n, D'_n$: 반경방향속도 관계식[(25)식]의 계수
- b : 원뿔형 채널의 임의의 위치에서의 반경길이
- h : 슬릿형 채널의 임의의 위치에서 중심과 벽면간의 길이
- L : 채널의 상부와 하부간의 두께
- P_n : 제1차 Legendre 함수
- p : 압력
- p_∞ : 압력분포에서의 적분상수
- Q_n : 제2차 Legendre 함수
- q : 막의 단위두께당 투과유량
- q' : 부피 투과유량
- Re : 레이놀즈수
- r : 채널내부의 반경방향
- r' : 평행한 슬릿형 채널의 중심과 벽면간의 길이
- v_r : 반경방향속도
- $\langle v_r \rangle$: 평균유속
- W : 슬릿형 막기공의 두께
- Y : 채널내부의 축방향
- z : 막기공에 대한 축방향

Greeks

- α : 발산각도
- η : 유체 점도
- θ : 반경방향 각도 (극각)
- A : 무차원 흐름함수
- λ : ($= rv_r$)
- ξ : ($= \cos \theta$)
- ξ_0 : ($= \cos \alpha$)
- ρ : 유체 밀도
- φ : 방위각
- ψ : 유선함수
- Ω : 기하학적 발산보정계수
- ω : 무차원 각도

Subscripts

cyl : 원형 실린더
 f : 채널상부 입구
 i : 채널하부 출구
 r : 반경방향
 slit : 평행한 슬릿

Mathematical

∇ : gradient
 ∇^2 : Laplacian operator
 \rightarrow : tends to

참 고 문 헌

1. Shin-ichi Nakao and S. Kimura, *J. Chem. Eng. Japan*, **15**, 200 (1982).
2. G. Belfort, R. H. Davis, and A. L. Zydney, *J. Membrane Sci.*, **96**, 1 (1994).
3. Shin-ichi Nakao, *J. Membrane Sci.*, **96**, 131 (1994).
4. L. J. Zeman and A. L. Zydney, "Microfiltration and Ultrafiltration: Principles and Applications", Marcel Dekker Inc., NY (1996).
5. S. Mochizuki and A. L. Zydney, *J. Membrane Sci.*, **68**, 21 (1992).
6. W. M. Deen, *AIChE J.* **33**, 1409 (1987).
7. J. Happel and H. Brenner, "Low Reynolds number hydrodynamics: with special applications to particulate media", 3rd Ed., Martinus Nijhoff Pub., Hague (1992).
8. J. L. Poiseuille, *Mémoires des Seventes Etrangers*, **9**, 433 (1846).
9. R. E. Kesting, "Synthetic Polymeric Membranes: A Structural Perspective", 2nd Ed., John Wiley & Sons, NY (1985).
10. G. Hamel, *Jahresber. Dtsch. Mat. Ver.*, **25**, 34 (1917).
11. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, "Fluid Mechanics", Addison-Wesley Pub., Mass. (1959).
12. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, "Table of Integrals, Series, and Products", 4th Ed., Academic Press, NY (1979).
13. O. O. Park and M. H. Kwon, *Korean J. Chem. Eng.*, **6**, 150 (1989).
14. G. Arfken, "Mathematical methods for physicists", 3rd Ed., Academic Press, NY (1985).