Historia Mathematica Vol. 10. No. 1. (1997), 12-18

선형변환을 이용한 이차곡선에 관한 연구*

서경대학교 이공대학 응용통계학과 **이승우***
한양대학교 자연과학대학 수학과 **윤달선,* 안성석, 차경준**

Abstract

수학의 각 분야 중에서 선형성을 가지는 부분은 그 이론이 가장 정연하게 처리되나 이것이 선형대수학이라는 학문으로 형성된 것은 최근의 일이며, 더욱이 선형대수는 그 광범위한 응용성으로 인하여 더욱 중요시되게 되었다. 선형대수의 교육적 의의는 함수의 특수한 경우인 선형변환을 다룸으로서 선형성을 지닌 수학의 구조를 쉽게 파악할 수 있다는 것이며 더욱이 해석기하 등에도 쉽게 응용할 수 있게 된다.

본 논문에서는 타원, 쌍곡선, 포물선인 이차곡선을 행렬을 이용하여 표현하고, 좌표축의 회전이동과 평행이동을 통하여 행렬을 대각화하고, 고유치의 부호에 의하여 이차곡선의 변환과 분류를 다루었으며 더불어 곡선의 개형을 알아보았다

0. 서론

인류가 개인적 생활경험을 축적해 오면서 생겨난 수학적 지식은 인류의 역사와 함께 변천되어왔다. B.C 2000년경 고대 오리엔트에서는 사회적 필요에 따라 정수 분수의 계산, 일차 그리고 이차 방정식의 해법, 도형의 구적법등 고도의 수학적 내용이 이미 존재하고 있었다. 이러한 실용적 경험적 수학지식은 그리스 시대에 이르러 이상화된 도형 위에 이론적 체계를 형성하게된다. 이후 해석기하학, 미적분학, 수리적 자연과학의 형성이라는 세 가지 대혁신을 이룬 17C의 수학은 풍요한 발달의 시기를 거쳐 20C에는 Hilbert의 <기하학의 기초>에서 비롯된 공리주의와 결합하여 Bourbaki적인 구조주의가 보편화되면서 연역적(논리적)으로 체계

* 이 연구는 1997년도 한양대학교 자연과학 연구소에서 지원받아 수행되었음

를 세워나가는 '추상화'가 현대수학의 주류를 이루게되었다. 현대 수학은 비유클리드 기하학의 확립과 함께 집합개념과 극한개념을 바탕으로 한 위상수학으로 발전하게 되어 실용 학문의 새로운 분야가 급속도로 발달하였다. 나아가 수학은 그 가상성과 일반성 때문에 이전에는 수학적인 방법으로 접근할 수 없는 것으로 여겨졌던 다른 많은 각 분야(경제, 사화과학, 생물학, 언어학 등)에 침투되어 이론적 핵심을 이루고 있다.

수학은 학문 중에서 그 본질이 역사와 가장 깊은 연관을 가지며 인간 이성의 진화 과정과 병행되므로 각 시대와 사회에 따라 수학관이 다양해지지만, 수학의 타성의 반성으로부터 비롯된 현대 수학에서는 합리적 사고력과 실생활에의 적용 능력을 중요시한다. 그럼에도 불구하고 오늘날 수학교육이 그 개념상 단편적인 이론과 문제 중심의 학습에 치우쳐 이론적 사고와 수학의 실제적인 응용력 개발이 결여되었던 바 앞으로의 수학교육에 있어서 문제를 분석하고 종합하여 수학적 구조화하는 능력을 양성하는 지도방법의 연구 개발이 절실히 요구되고 있다.

16C부터 수학자들은 벡터의 개념을 도입하기 시작하여 1693년 Leibniz에 의해 행렬식이 일차 연립방정식의 해를 구하는데 처음 사용되었다. 흔히 유향 선분으로 표시되는 벡터는 크기와 방향을 가지며 운동에 있어서의 힘, 속도, 가속도 등을 나타내는데 쓰였다. 이후 행렬의 개념은 120년이 지난 1812년에야 Cauchy가 처음 이용하였고 1851년 Sylvester가 제안한 표기법이 보편화되었다. 16C에 도입된 복소수의 개념은 1800년경 수학자들이 복소수 평면을 생각해냄으로서 복소수를 평면에서의 유향선분으로 표현할 수 있음을 인식하게 되었다. 한편으로는 실수를 1차원의 수, 복소수를 2차원의 수라 부를 때 사칙이 가능한 1,2차원의 수와 같은 성질을 가지는 3차원 이상의 수를 만들 수 없을까 생각하게 되었다. 이렇게 하여 얻어진 것이 Hamilton의 사원수 발견과 선형대수학이라는 수학에 있어서의 새로운 영역이다. 1855년 Caylay가 선형변환의 합성함수를 생각하며 행렬 곱셈을 정리하면서 행렬이론을 발견하게 되었고 이 행렬이론은 후에 Tensor 등으로 확장되어 물리학에 기여하였다. 17C가 되면서 기하학과 대수학의 결합으로 직선이나 평면을 일차방정식으로 표현한 것이 선형성을 인식한 시초이며 행렬식은 19C 후반까지 선형대수학의 주된 연구 대상이 되어왔다. 원래 선형대수학은 독립 일차방정식을 푸는 문제와 행렬식을 계산하는 문제에 그 기초를 두고 탄생하였지만 현재에는 이론적인 전개과정을 거쳐 더욱 광범위하게 발전되어 백터공간이라 불리는 가상적인 개념의 연구에서부터 출발하게된다. 2차대전이후 현대식의 컴퓨터 발달과 더불어 행렬의 수치 해석적인 장점이 부각되면서 선형대수학의 연구가 20C후반에 폭발적으로 활발해졌다.

수학은 최근 급속도로 진보해 가는 과학과 더불어 사회 각 분야에 핵심을 이루고 있는데 특히 각 분야에서 선형성을 가지는 부분은 그 이론이 정연하게 표현된다. 선형변환과 그 내용의 중요성으로 행렬이나 벡터의 사용이 광범위해지고 미적분, 기호이론등과 병행하여 수학의 응용면에 있어서 중요한 기둥이 되었다. 선형변환은 함수의 특수한 경우이어서 그 자체로는 선형변환의 특징을 이해하기 힘들지만 이를 행렬로 표현함으로써 쉽게 이해할 수 있을 뿐만 아니라, 선형변환의 성질과 행렬을 이용하여 일반적인 이차 곡선을 다룸으로써 해석기하에 더욱 쉽게 접근할 수 있다. 이

와 같은 방법으로 선형대수와 기하를 보는 수학적 사고의 확장을 기대할 수 있다. 수학교육의 현대화 운동 이후, 그 광범위한 응용성으로 인하여 선형대수의 내용을 수학교육 내용의 일부로서 지도하는 방안이 연구되어왔으나 교육으로서의 선형대수의 성과는 아직 명백히 드러나고 있지 않다. 수학교육의 목표를 수학의 실용적 문화적 가치를 통한 인격적 도야(가치관, 행동양식, 사고방법등)에 둔다면 아직 관영수학으로서의 틀을 벗어나지 못하고 있는 한국의 현행 수학 교과 과정에서의 개선점에 대한 모색이 촉구되어야 한다.

본 논문에서는 수학교육에서의 선형대수의 구체적인 응용 방향을 제시하고자 하며, 실수체위에서의 벡터공간 R^2와 R^2 사이에서의 직교변환을 이용하여 평면상의 이차 곡선을 행렬을 이용하여 표현하고 그 그래프의 형을 분류한다.

1. 이차곡선의 분류

이 장에서는 두 변수에 관한 일반 이차방정식을 좌표변환에 의하여 표준형으로 나타냄으로서 그들 방정식이 나타내는 도형에 대하여 고찰한다.

이차방정식 $F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$은 벡터와 행렬의 기호를 이용하면

$$F(x,y)=(x\ y)\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+(d\ e)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+f$$

$$={}^tXAX+BX+C=0$$

로 나타난다. 단, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$, $B=(d\ e)$, $C=f$.

또한 이차형식의 방정식은 다음과 같이 표현 가능하다.

$$F(x,y)=(x\ y\ 1)\begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$={}^t\hat{X}\hat{A}\hat{X}=0.$$

단, $\hat{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A}=\begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix}$

지금, 회전이동의 행렬 $P=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$을 이용하여 대칭행렬 A를 ${}^tPAP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$로 대각화 하였다고 하자. 그리고 이에 대응하는 좌표축의 회전이동 $X=PX'$에 의하여

$$\hat{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}=\hat{P}\hat{X}' \quad \text{단, } \hat{P}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

로 되고, 이 때 $\hat{X}=\hat{P}\hat{X}'$에 의하여 위의 이차형식은 다음과 같이 변환되어진다.

$${}^tXAX+BX+C={}^t\hat{X}\hat{A}\hat{X}={}^t(\hat{P}\hat{X}')\hat{A}(\hat{P}\hat{X}')={}^t\hat{X}'({}^t\hat{P}\hat{A}\hat{P})\hat{X}'.$$

이때 변환된 이차형식을 $F'(x', y')$라 하고 ${}^t\hat{P}\hat{A}\hat{P}$를 계산하면 다음과 같다.

$$F'(x', y')={}^t\hat{X}'\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & k_1 \\ 0 & \lambda_2 & k_2 \\ k_1 & k_2 & C \end{pmatrix}\hat{X}'=0.$$

$$\text{단, } k_1=d/2\cdot p_{11}+e/2\cdot p_{21},\ k_2=d/2\cdot p_{12}+e/2\cdot p_{22}.$$

또한, $F(x, y)=0$은 이차곡선의 방정식이므로 행렬 A가 O행렬로는 되지 않기 때문에 고유치 λ_1, λ_2가 동시에 0은 아니다. 따라서 $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2\neq 0$인 경우와 $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2=0$(또는 $\lambda_1=0$, $\lambda_2\neq 0$)인 경우로 나누어 생각하자.

(1) $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2\neq 0$인 경우

좌표축의 평행이동

$$\hat{X}'=\hat{R}_1\hat{X}'',\quad \hat{R}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -k_1/\lambda_1 \\ 0 & 1 & -k_2/\lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

에 의하여 위의 $F'(x', y')$을 변환하면 계산의 결과는 다음과 같다.

$$F''(x'', y'') = {}^t\hat{X}'' \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix} \hat{X}'' = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + C_1 = O.$$

단, $C_1 = -\ k_1{}^2/\lambda_1 - k_2{}^2/\lambda_2 + C$. 여기에서 λ_1, λ_2는 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$의 고유치이고

$|P| = |\hat{P}| = 1$이므로 C_1은 $|\hat{A}| = \lambda_1\lambda_2 C_1$로부터 얻어진다. 그러므로 λ_1, λ_2, C_1의 부호에 의하여 다음과 같이 세분화되어진다.

<표 1> $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + C_1 = 0$의 표준형과 그래프의 유형

판별식 b^2-4ac	고유치의 부호 λ_1	고유치의 부호 λ_2	상수항 C_1	A의 계수	$\hat{A}$의 계수	그래프	표준형	그래프의 형
−	+	+	+	2	3	무	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	허타원
−	+	+	−	2	3	유	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	타원
−	+	+	0	2	2	유	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	점타원
+	+	−	+	2	3	유	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$	쌍곡선
+	+	−	−	2	3	유	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	쌍곡선
+	−	+	+	2	3	유	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	쌍곡선
+	−	+	−	2	3	유	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	쌍곡선
+	+	−	0	2	2	유	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	교차하는 두 직선
+	−	+	0	2	2	유	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	교차하는 두 직선

(2) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ 인 경우

앞의 (1)인 경우에서, 이차 곡선의 방정식을

$$F'(x', y') = {}^t\hat{X}' \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 \\ k_1 & k_2 & C \end{pmatrix} \hat{X}' = 0$$

로 유도하였고 또 다시 좌표축의 평행이동

$$\hat{X}' = \hat{R_2}'\hat{X}'', \ \hat{R_2}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k_1/\lambda_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

에 의하여 위의 $F'(x', y')$을 변환하면 계산의 결과는 다음과 같다.

$$F''(x'', y'') = {}^t\hat{X}'' \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & -k_1^2/\lambda_1 + C \end{pmatrix} \hat{X}'' = 0.$$

즉, $F''(x'', y'') = \lambda_1 x''^2 + 2k_2 y'' + C_2 = 0$을 얻는다. 단, $C_2 = -k_1^2/\lambda_1 + C$.

여기에서 $F''(x'', y'')$은 이차 곡선 방정식을 취하게 된다. 이 경우 $|\hat{A}| = -\lambda_1 k_2^2$ 이 되므로 이 값에 의하여 다시 곡선은 다음의 4가지 유형으로 분류되어진다.

<표 2> $\lambda_1 x^2 + 2k_2 y + C_2 = 0$의 표준형과 그래프의 유형

판별식 b^2-4ac	고유치의 부호		상수항 C_2	k_2	A의 계수	$\hat{A}$의 계수	그래프	표준형	그래프의 형
	λ_1	λ_2							
0	+	0	0	$\neq 0$	1	3	유	$x^2 = 4py$	포물선
0	+	0	−	0	1	2	유	$x^2 = a^2$	평행인 두 직선
0	+	0	+	0	1	2	무	$x^2 = -a^2$	허실수
0	+	0	0	0	1	1	유	$x^2 = 0$	일치하는 두 직선

$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $C_2 \neq 0$ 인 경우는 좌표축에대한 평행이동에 의하여 $x^2 = 4py$ 로 변환되므로 이 경우는 생략한다. 또한 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ 인 경우는 위에서 보여준 (2)의 경우와 동일하다.

2. 결 론

그리스 시대로부터 연구되어왔던 수와 도형과의 관계가 밝혀지면서 좌표법을 도입하여 기하학의 문제를 대수적으로 해결할 수 있게 되자 17C에는 Decartes, Fermat에 의하여 오늘날의 해석기하학이라는 분야가 태동하기에 이르렀다. 해석기하학은 대수적 계산이라는 수단으로 기하학에 통일적 방법을 줌과 동시에 계산이나 식에 기하학적 직관을 가능케 함으로

대수학을 가시화하여 오늘의 수학의 이상을 선취시켰다. 이 해석기하학은 기하에 있어서는 수학상의 하나의 방법론적인 변화가 아닌 인간 사고 자체의 질적 변화를 가져옴으로써 미적분학의 발견과 현대 수학의 발전에 커다란 역할을 하였다.

이와 같은 수학의 양적 질적 팽창으로 수학 교육의 개선이 불가피하게 되어 17C의 수학적 성과는 19C에 이르러서야 학교 교육에 등장하게된다. 19C 중반 세계적으로 일어났던 수학교육의 현대화 운동의 좌절로 '무엇 때문에 수학을 가르칠 것인가?'에 대한 근본적인 논의가 수학자들로부터 시작되었다. 인간의 지적 창조물로서의 수학이 갖는 예술성과 역사적 산물로서의 과학성이라는 이중적 성격 때문에 수학은 오랫동안 수학교육 내용에 있어서의 끊임없는 논란의 대상이 되어왔다. 그렇기 때문에 수학과의 지도는 때와 장소와 피교육자인 학생들의 지적상황이나 지도하는 담당자들의 사고방식에 의하여 달라지는 것 또한 당연하다. 따라서 교과서를 다루는 방법도 다양해질 수밖에 없지만, 수학과의 학습에서는 학생들에게 수학의 기본원리에 관한 개개의 지식이나 방법을 가르치는 것도 중요하나 전체로서 계통을 파악하는 것 또한 이에 못지 않게 중요한 일이며 학생들로 하여금 수학적 가치에 대한 깊은 이해와 올바른 문제해결능력, 사물에 대한 적극적 사고능력을 육성하는데 주력하여야 하겠다.

이에 본 논문에서는 행렬을 벡터공간 사이의 선형변환으로 인식하며 고유값의 개념을 도입하여 2차 형식을 분류함으로써 선형대수와 기하학을 직접적으로 연결하는데 목적이 있었다. 또한 행렬의 지도에 있어서 행렬을 보다 깊이 있게 다룸으로써 선형변환의 이해와 그 응용을 보다 구체적으로 제시해보았다. 본 연구가 일선에서 수학교육의 담당자들에게 조그마한 보탬이 되었으면 하며 어떻게 지도하는 것이 효과적인 학습이 되겠는가는 더욱 연구 검토가 필요하다고 하겠다.

참고문헌

1. Larry E. Mansfield, *Linear Algebra with geometric application,* Marcel Dekker, Inc. 1976.
2. Serge Lang, *Linear Algebra,* Addison-Wesley, 1971.
3. 金應泰, 金年植 , 數學敎育 敎材論, 京文社 , 1994.
4. 朴世熙, 數學의 世界, 서울大學校 出版部 , 1995.