*Historia Mathematica Vol. 10. NO. 1,(1997), 33-37*

# Cantor의 무한관

서경대학교 이공대학 응용수학과 박 창 균

## Abstract

본고는 수학적으로 취급된 Cantor의 무한을 소개하기보다는 그가 가졌던 무한에 대한 태도는 매우 종교적이었고 철학적으로는 실재론적인 입장에 있다는 것을 보이려고 한다. 이를 위해 먼저 Cantor의 초한수론과 무한의 역사를 약술하고 그의 무한관이 기독교 신앙과 중세 철학에 근거해 있음을 제시한다. 또한 Cantor의 초한수론은 당시의 세계관과 시대정신에 도전하고 있음을 밝히려 한다.

## 0. 들어가는 말

Cantor는 유대계인 아버지 Georg Woldemar Cantor와 어머니 Maria Anna Böhm 사이에서 1845년 러시아의 성 페테스브르그(St. Petersburg)에서 태어났다. Cantor의 부모들은 열성적인 신앙의 소유자들이었으며 자녀들의 종교 교육에도 관심이 컸다. Cantor는 1856년에 독일의 프랑크푸르트로 부모와 함께 이주했고 중세 신학과 연속성 및 중세 신학의 난해한 주장에 깊은 관심을 가졌다([4] p.462). Cantor는 취리히, 괴팅겐, 베를린 대학교에서 공부했는데 마지막으로 머물렀던 베를린 대학에는 당시 지도적인 수학자였던 Kummer, Kronecker, Weierstrass 등이 있었다.

Cantor의 초기 관심은 정수론이었다. 그런데 선배인 Heine의 권유로 해석학 특별히 삼각급수로 표현된 임의의 함수는 필수적으로 유일한가에 대한 물음을 연구하기 시작하면서 예외 점들의 산재방식에 대한 관심은 그의 초한수론의 서막이 오르게 된다. 1872년 Cantor는 처음으로 함수의 삼각급수표현의 유일성을 보였다. 그 때 그는 유일성 정리를 무한개의 불연속 점을 가진 구간 위에도 일반화하였다. 이것은 그에게 연속체와 연속적 운동을 고려하게 하였고, 연속성을 연구함으로써 실수의 비가산성(nondenumerability)이라는 획기적 발견을 하게 하였다. 이것이 현대 집합론의 시작이라고 할 수 있다.

그는 "완결된 집합"이라는 개념을 수학에 도입했다. 그는 모든 자연수를 완결된 것으로

보고 첫 번째 초한수를 $\omega$라하고 회귀적으로 $\omega+1=\omega \cup \{\omega\}$, $\omega+2=\omega+1 \cup \{\omega+1\}, \cdots$ 으로 다음 초한수들을 구성했다. 수열 $\omega$, $\omega+1$, $\omega+2, \cdots$ 는 완결된 것으로 처리하여 $\omega \cdot 2$로 나타내고, $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot 3, \cdots$ 의 모임은 $\omega \cdot \omega$ 또는 $\omega^2$으로 나타냈다. 또 $\omega^2$, $\omega^3$, $\omega^4, \cdots$ 등의 모임은 $\omega^\omega$으로 나타내고 계속해서 이러한 방식으로 그가 서수(ordinal numbers)라고 부른 수의 체계를 세웠다.

Cantor는 두 서수가 서로 일대일 대응할 때 같은 농도(cardinality)를 갖는다고 했다. 그때까지 통용되었던 무한이라는 개념과 그 기호 ∞는 단순히 끝이 없다는 것이었다. 그런데 Cantor는 자연수와 실수는 서로 다른 농도를 갖는다는 것을 보였다. 그리고 어떤 집합 S의 멱집합이 S 보다 더 큰 농도를 가지고 있음을 보였다. Cantor는 서로 다른 농도를 갖는 서수들을 기수(cardinal numbers)라고 구별했다. 그는 이 기수를 히브리 글자 알레프(aleph)로 나타냈는데 자연수 집합의 크기는 $\aleph_0$으로 나타내고 계속하여 $\aleph_1$, $\aleph_2$, … 등으로 표시했다. 모든 기수의 집합은 히브리 문자 “Tow”로 나타냈다.

Weyl은 수학은 무한에 관한 학문이라고 했다. 수학자가 그것의 지위를 어떻게 자리 매김했든 무한은 그리스이래 수학의 중심 주제의 하나인 것은 틀림없다. 흔히 무한을 가능적 무한(potential infinity)과 실무한(actual infinity)으로 구분하는데, Cantor의 업적은 바로 그리스이래 지배적인 무한관인 가능적 무한을 탈피하여 실무한을 제안했다는 것이다.

그러면 이러한 실무한은 수학적 필요 때문에만 나온 것인가? 이것을 가능케 한 원동력은 무엇인가? 도대체 Cantor의 마음속을 지배했던 무한은 어떤 모습이었는가?

이러한 질문을 고려하기 위해 먼저 무한에 대한 역사를 약술하고 Cantor의 무한관을 신학적, 철학적 측면에서 살펴보려고 한다.

## 1. 무한의 역사

무한이란 말은 헬라어로 아페이론(apeiron)이라고 하는데 이 말은 '아'라는 부정을 나타내는 접두사와 '페라스(peras)' 즉 끝, 한계를 의미하는 말의 합성어이다. 그리스 사람들은 무한은 부족함과 완전치 않음을 나타낸다고 생각했던 것 같다. 그래서 피타고라스는 '페라스'가 '아페이론'을 한정함으로써 질서가 생긴다고 했고 이러한 생각은 플라톤의 이데아론과 아리스토텔레스의 '형상'이 '질료'를 한정할 때 개체가 성립한다는 사상으로 발전해 갔다. 그리스에서는 무한이 적극적으로 수학의 대상이 될 수 없었다. 그리스의 무한관을 최종적으로 정리한 아리스토텔레스의 무한은 현실적이거나 완결된 것이 아니라 '가능적'으로 존재하는 것이다. 그렇다고 해서 그리스 사상가 전체가 무한을 유한에 비해 '열등'한 것으로 취급한 것은 아니었다. A.D. 1세기에 무한은 처음으로 Philon에 의해서 신의 속성으로 취급되었고 그후 Plotinus에 이르러서는 무한은 일체의 만물이 유출되는 근원으로서 해석되어 중세의 무한관에 영향을 주게 된다. 중세에 들어서서는 무한은 더욱 적극적으로 해석된다.

신의 속성으로 이해된 무한은 그리스와는 반대로 '유한 이상의 것'이 되었으며 더욱 더 가치 있는 것으로 격상되었다. 중세의 무한관은 Eriugena와 Magnus, Aquinas 등을 거치면서 무한의 초월성을 인정하면서도 인간의 합리적 인식 안으로 내재화 하려는 경향을 보였다. 무한을 적극적으로 인식의 대상화하고 논리화함으로써 실무한을 다루기 시작한 것이다. 그리스 시대의 아리스토텔레스의 무한은 가능적 무한(potential infinity)이다. 이것은 자연수의 열과 같이 1, 2, 3,... 한없이 계속 나아가지만 지나온 과정은 항상 유한이고 '최종적인 무한'에는 도달할 수 없는 언제까지나 계속 나아가는 그러한 무한이다. 이에 반해 실무한은 완성된 형태의 무한이요 현실적 존재인 무한이다.

중세의 무한관의 형성에는 Cusanus의 공헌이 크다. 그의 무한론은 신학과 결부되어 있었다. '무한자'로서의 신보다 더 큰 것도 더 작은 것도 있을 수 없기 때문에 신은 무한대인 동시에 무한소인 '반대의 일치'가 이루어진다. 쿠자누스의 무한에 관한 논리는 무한이 유한의 단순한 연장이 아니라 원주와 직선이 일치하고, 전체와 부분이 같아지는 반대의 일치가 가능한 구조를 갖는 것이었다([12] p.85). 이러한 무한관은 형이상학적이고 수학적으로는 잘 다듬어지지 않은 것이었으나 근대 수학을 탄생시키는데 큰 기여를 하게 된다. 쿠자누스의 무한관은 갈릴레이에 오면 더 구체화 된다. 그는 유한에서의 개념이 무한에서 그대로 통용되지 않는다는 것을 자연수와 그것들의 제곱을 대응시킴으로 보였다. 즉

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & \ldots \end{array}$$

제곱수는 분명 자연수에 포함되지만 하나의 자연수에 대하여 반드시 하나의 제곱수가 일대일 대응한다는 것은 자연수 전체의 농도와 제곱수 전체의 농도가 같다는 것을 의미한다. 이것은 전체와 부분이 같다는 소위 '무한의 역리'를 만들고 그리스이래 수학에서 가장 표준적인 권위를 가지고 있던 Euclid의 『원론』에 있는 공준인 '전체는 부분보다 크다'는 것과 모순되기 때문에 당혹스러운 일이었을 것이다. 유한에서 성립하는 것을 무리하게 무한의 세계에 연장하여 적용하려 한다면 '역리'가 생긴다는 것이 갈릴레이의 통찰이었다. 그러나 갈릴레이도 이 실무한을 체계적으로 정리하지는 못하고 수학적으로 어느 정도 다듬어진 실무한론이 나오게 된 것은 19세기말 Cantor의 집합론에서이다.

## 2. Cantor의 무한

Cantor의 실무한이 등장하기는 그렇게 쉽지 않았다. 19세기 전반의 수학계를 주도했던 Gauss와 같은 대(大)수학자도 1831년 "무한은 단지, 그 안에서 극한에 대해 적합하게 말하는 상투어일 뿐이다"라고 한 것을 보아도 그러하다([5] p.269). 그러나 누구나 생각할 수 없

있던 혁명적 사고는 Cantor에 의해 제안되었다. Cantor의 초한집합론은 수학에 대해 생각하는 방식을 근본적으로 뒤흔들어 놓았다. Dauben은 "Cantor의 무한은 수학의 영원한 확실성에 대한 전통적인 믿음을 흔들어 놓았다"고 말했다([3] p.270).

그러면 Cantor의 이러한 역사적 발견은 어떠한 형이상학적 전제를 가지고 있었을까? 먼저 지적되어야 할 것은 Cantor가 1886년 Johannes Franzelin 추기경에게 보낸 편지에서 신과 그의 속성에 지정된 영원하고 창조되지 않은 것으로서의 '절대무한'(Absolute Infinity)과 창조된 것으로서의 '초한수'를 구별하고 있다는 사실이다([3] p.145).

Cantor는 존재의 세 단계를 구분하였다. 1)신의 마음속에 있는 *Intellectua Divinus*, 2)인간의 마음속에 있는 *in abstracto*, 3)물리적 우주 속에 있는 *in concreto*로 구분한 것이다. Cantor는 절대무한은 신의 마음속에만 존재한다고 믿었다. 그러나 신은 유한수든 초한수든 모든 수의 개념을 인간의 마음속에 주입시켰다고 주장했다. Cantor는 종종 인간의 마음에 있는 초한수의 존재의 근거를 신의 마음에 있는 영원한 이데아에서 찾으려 하였다([3] pp.228-232). Cantor의 초한수론에 흥미를 보인 첫 번째 신학적 논문은 1886년 신토마스주의자인 Gutberlet 신부에 의해 쓰여졌는데([6]), 그는 완결된 실무한이 신 존재의 유일성과 절대무한에 도전하지 않는다는 것을 보여주는 데 관심을 가졌다. 그러나 Gutberlet 신부는 실무한을 창조된 질서 속에 받아들이는 것에 대해서는 Cantor와 입장 차이가 있었다. Cantor는 *in abstracto*에 초한수의 존재를 단호히 옹호했다. 그 이유는 하나님이 그 자신의 완전성을 반영하기 위해 초한수를 인간의 마음속에 넣어주셨다고 생각했기 때문이다. Cantor는 비록 우주의 시간적 공간적 무한성은 부정했지만 Leibnitz를 따라서 모나드(monads)가 무한히 있다는 것을 믿었다. 그래서 초한수론이 *in concreto*에서 실현된다고 믿었다. 그는 무리수들의 존재가 초한수들의 존재와 동등하다는 것을 주장하기 위해 무리수의 무한급수표현을 진전시켰다([3] p.126). Cantor는 *in abstracto*에서의 수의 존재를 '주관내적(intrasubjective) 실재'라 불렀고 *in concreto*에서의 수의 존재는 '초주관적(transsubjective) 실재'라 했다. 비록 그는 초한수가 물리세계에서 초주관적 실재를 가지는 것은 부정했지만 전술한 바와 같이 Leibnitz를 따라서 물리세계에 초한수 개의 모나드가 존재함을 믿었다. 그런데 Cantor는 이 두 실재--'주관내적 실재'와 '초주관적 실재'--는 항상 같이 발견된다고 믿었다. 이러한 수의 이상적이고 물리적인 양상간의 대응은 우주 자체에 있는 통일성으로부터 온다고 Cantor는 믿었다([3] p.132).

Cantor에게 있어서 수란 개념적으로 구성된 존재가 아니라 하나님에 의해 창조된 존재이다. 초한수는 자기가 만들고 구성한 것이 아니라 발견한 것일 뿐이었다. 그러한 점에서 그의 스승이었던 Kronecker나 후에 Brower로 대표되는 직관주의와는 대립되는 입장에 있었고 실재론자였다고 할 수 있다. Cantor는 인간의 마음과 물리적 세계 사이가 조화롭게 창조되었기 때문에 물리세계로부터 얻어진 패턴으로부터 나온 수학적 연역들은 확장된 현상에 재적용 되어야 한다고 생각했다.

전술한 대로 Cantor는 초한수를 구성함에 있어서 작은 서수로부터 보다 큰 서수로 만드는 방식을 취했다. 그는 작업 초기로부터 역방향은 가능하지 않다는 것을 인식했던 것 같다.

"모든 집합의 집합" "모든 것의 집합"이라든가 하는 집합들의 역설적인 측면을 이미 예리하게 꿰뚫고 있었다. 그러나 그는 초한집합론에 발생하는 역설들을 포용하는 것에 대해 별로 신경 쓰지 않았다. 그는 '완결된 전체로서 취해질 수 있는 것'을 집합이라고 정의했기 때문에 역설을 야기하는 자기 생성 집합들은 집합에서 제외된다고 여겼고, "Taw"와 같은 것을 수학적으로 분석하는 것은 불가능하다고 생각했다. 그와 같은 집합들은 Cantor에게 있어서는 유한한 인간의 마음이 이해할 수 있는 대상이 아니었다. 이러한 형이상학적 입장으로 인해 그는 역설을 해결하는 데 있어서 소극적인 태도를 보였다고 여겨진다. 그러나 Hilbert의 형식주의 프로그램의 좌절과 Gödel의 불완전 정리는 Cantor의 이러한 태도가 얼마나 시대를 앞서갔는지를 입증하게 된다. 그런데 이러한 논의에는 세계관 문제가 개입되어 있다. 자족적이고 자기 설명이 가능한 닫혀진 세계관과, 인간의 유한성을 인정하고 신의 개입의 가능성을 남기는 세계관과의 대립이, 그 밑바닥에 깔려있는 것이다. 물론 Cantor는 후자를 지지하는 입장에 있었다.

## 3. 맺음말

수학의 역사적 인물 중 Cantor는 가장 논쟁의 대상이 되는 사람의 하나이다. 그러나 그의 수학적 업적을 부인하는 사람은 아무도 없다. 그의 집합론은 현대 수학의 기초가 되었으며 우리가 지금 하고 있는 수학을 가능하게 했다. Cantor의 무한관은 매우 종교적이고 신학적이었다. 그가 가졌던 기독교 신앙과 중세 철학에 대한 호의적인 입장은 초한집합론의 토대가 되었다. 그는 어떤 수학적 체계도 넘어서 존재하는 그러한 수학적 존재를 연구한다고 믿었다. 그렇다고 해서 Cantor가 현실에 무관심한 것은 아니었다. 오히려 실재론적 입장에서 꾸준히 현실과의 대응관계를 염두에 두었다고 보여진다. 이는 Cantor가 Mittag-Leffler에게 보낸 편지에서 그가 초한기수를 연구하는 동기는 화학, 광학, 생물학에서의 응용을 다루기 위해서였다고 하는 데서 확인할 수 있다([3] p. 294).

뿐만 아니라 Cantor는 초한수론을 통해서 당시의 지배적인 우주론--우주는 영원하고 경계가 없다는 것--과 시대정신에 도전한다. 그는 그의 초기 논문으로부터 초한수가 유물론자나 실증주의자나 범신론자에게 아무런 도움이 되지 않는다고 강조하였다.

Cantor의 무한론은 아직 더욱 탐구되고 음미되어야 한다. 비단 수학적 관심에서뿐만 아니라 오늘날과 같은 자기 중심적이고 '닫혀진 세계'에 만족하는 경향이 강한 시대에 철학적 윤리적으로 함축하는 바가 크기에 더욱 그러하다.

## 참고문헌


1. Barrow, John D. *The World Within the World.* London: Oxford University Press,1988.
2. Bell, E. T. *Men of Mathematics.* New York: Simon and Schuster, 1937.
3. Dauben, Joseph Warren. *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Princeton: Princeton University Press, 1990.
4. Eves, Howard. 허민, 오혜영 옮김. 수학의 위대한 순간들. 서울, 경문사, 1994.
5. Gauss, K. F. *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher.* C. A. F. Peters, ed. Altona, G. Esch, vol. II.
6. Gutberlet, Constantin. "Das Problem des Unendlichen." *Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik* 88(1886), pp. 179-223.
7. Jaki, Stanley L. *Cosmos and Creator.* Edinburgh: Scottish Academic Press.
8. Rucker, Rudy. *Infinity and the Mind.* Boston: Birkhauser, 1982.
9. Stillwell, John. *Mathematics and Its History.* New York: Springer-Berlag, 1989.
10. Weyle, H. *Philosophy of Mathematics and Natural Science.* Princeton: Princeton University Press, Rev. ed., 1949.
11. Zigmund, A. *Trigonometric Series.* Cambridge Cambridge University Press, 2nd ed. in 2 vols., 1959.
12. 다께우찌 게이 엮음. 김용준 옮김. 무한과 유한, 서울, 지식 산업사, 1989.s