韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
1997. 7. 제 1권, 제 1호, 3-22.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics

초등수학에서의 수학적 패턴 지도

김 상 미 (서울구로초등학교)
신 인 선 (한국교원대학교)

I. 서 론

수학은 전통적으로 수와 모양의 과학으로 묘사되어 왔다. 초등학교에서 산술과 기하를 강조하는 것은 이러한 뿌리깊은 관점에서 기인한다고 할 수 있다. 그러나 수학자들의 탐구 영역이 확장됨에 따라 수학은 폭 넓은 내용을 포함하게 되었고, 수학은 이제 단지 수와 모양만을 탐구하는 학문이라고는 할 수 없다. 또한 이러한 폭넓어진 수학의 여러 가지 영역 중에서 학교수학이 다루어야 할 수학의 핵심은 어떤 것이어야 하는가를 논의할 시기에 이른 것이라고 볼 수 있다.

미국 국립 연구원(NRC) 산하의 수리 과학 교육국(MSEB)의 보고서 "학교 수학의 재구성: 교육 과정의 철학과 틀"(Reshaping School Mathematics: A Philosophy and Framework for Curriculum)(MSEB, 1990)은 "수학은 패턴의 과학이며 언어"라고 말한다. 수학이 '패턴의 과학'이라는 말은, 오늘날의 수학이 산술이나 기하만이 아니라 패턴에 관한 열린 탐구임을 의미하는 것이며, 또한 수학이 하나의 '언어'라는 것은 과학이나 공학에서만 사용되는 용어가 아니라 일상생활의 의사 소통 수단으로 사용되는 것으로서 누구나 배워야 한다는 것이다. 이는 수학의 다양한 탐구를 받아들이면서 수학의 근본을 파악하고자 하는 노력을 보여주는 것이다.

수학에 대한 이러한 관점의 변화는 수학 육의 재검토를 요구한다. 몇 세기 전부터 전통적으로 학교에서 가르쳐 온 수학은 21세기에 필요한 수학으로로는 부족하며, 어떤 면에서는 부적절하기도 하다. 새로운 관점에 따른 수학교육과정을 준비하는 데 있어서는 무엇이 수학의 기본이고 어떠한 방식으로 가르칠 것인가를 알아내야만 한다.

수학의 성격 변화에 따른 패턴의 강조는 수학교육에서 새롭게 다루어져야 할 주제라든지 감소되어야 할 부분만을 말하고 있는 것은 아니며, 수학의 탐구 내용뿐 아니라 탐구하는 방식에 대해서도 방향을 제시하고 있다. 따라서 수학교육에 있어서 패턴의 강조는 하나의 주제로 뿐만 아니라 수학을 탐구하는 방식에 대한 논의이기도 한 것이다.

초등학교 수학에서 수학적 패턴과 관련한 본격적인 연구는 아직까지 시도된 바가 없으며, 특히 우리 나라 수학 교실에서 활용 가능한 수학적 패턴과 관련된 자료도 거의 없는 실정이다. 본 연구는 수학교육에서 도입 가능한 수학적 패턴 지도 방안을 모색하여, 교사에게 수학 및 수학 수업에의 아이디어를 제공하여 교사의 교수력을 지원하고, 학생들이 수학적 아이디어를 개발할 수 있는 경험과 수학 교과에 대한 긍정적인 인식을 갖도록 하는 데 초점을 둔다.

II. 수학교육과 패턴

수학은 '패턴의 과학'(Steen, 1988; National Research Council, 1990; Devlin, 1994)이라고 한다. 이러한 정의는 어떻게 가능하며 수학교육에 있어서는 어떻게 받아들여져야 하는지에 대하여 고찰하기로 한다. 본 장에서는 첫째, 수학

관의 변화에 따른 수학의 정의와 새로운 정의에 입각한 수학교육에서 패턴의 강조를 고찰해 본다. 둘째, 수학 교육에서 패턴의 중요성을 밝혀 보고, 셋째, 수학 교실의 변화에 따른 패턴의 강조를 논의하기로 한다.

A. 수학 : '패턴의 과학'

1. 역사적인 관점에서 본 수학의 성격

수학이란 무엇인가라는 물음에 대한 답은 역사를 흐르면서 몇 차례의 변화를 겪어 왔다. 이러한 변화에 대하여 Devlin(1994)이 밝힌 큰 줄기를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 기원전 500년경까지의 이집트와 바빌로니아 수학의 시대는 수에 대한 연구라고 할 수 있으며, 이 때의 수학은 거의 산술만으로 구성되었으며 실용적인 기술의 하나였다.

둘째, 그리스 수학의 시대 즉, 기원전 500년부터 기원 후 300년까지는 주로 기하학에 관심을 둔 시기였다. 그리스인들에게는 단지 수학을 실용적인 관심이 아니라 심미적이고 종교적인 요소의 지적 탐구라고 여겼다. 이러한 접근이 수학을 계산 기술의 모임이 아니라 하나의 연구 분야로의 탄생을 가능하게 한 것이다. 고대 그리스 수학자들은 수를 길이의 척도로서 기하적인 방식을 고려하였다. 수와 일치하지 않는 길이 즉, 무리수의 길이가 존재함을 알았을 때, 수에 대한 그들의 연구는 거의 정지하게 된다. 기하학을 강조한 그리스인들에게 있어서는 수학이란 수와 형태에 대한 연구였다고 할 수 있다.

셋째, 수학의 본질에 커다란 변화를 가져온 것으로 뉴턴과 라이프니츠의 미분적분학의 창시를 들 수 있다. 이전의 수학은 계산이나 측정 또는 형태를 다루는 정적인 문제에 한정되었다면, 뉴턴과 라이프니츠 이후의 수학에서는 운동과 변화를 다루는 기법을 도입하게 된 것이다. 수학자들은 행성의 운동, 낙하하는 물체의 운동, 액체의 흐름, 기계의 팽창, 자기나 전기의 물리적인 힘, 유행병의 확산, 이윤의 변동 등을 연구할 수 있게 되었다. 이 때의 수학은 수나 형태와 더불어 운동, 변화, 공간에 대한 연구인 것이다.

넷째, 18세기 중엽부터 수학자들은 수학의 응용만이 아니라 수학 자체에 대한 관심을 갖게 되었다. 이전의 미분적분학과 관련된 초기의 연구들은 대부분 물리학의 연구에 관심을 두었고, 당시의 수학자들 중 많은 사람들이 물리 학자로 간주되고 있었다. 하지만 19세기말에 이르러서 수학은 수, 형태, 운동, 변화, 공간 등의 연구와 함께 이들의 연구에 사용되는 수학적인 도구에 대한 연구를 시작하였다.

다섯째, 수학은 패턴의 과학이라는 정의의 출현을 들 수 있다. 20세기에 접어들 당시에는 수학은 산술, 기하, 미적분학 등과 같은 12개의 서로 다른 분야로 구성되었으나, 오늘날의 수학의 가짓수는 60과 70사이에 있다고 하는 것이 적절하며, 현 세기에 오면서 수학 활동은 엄청나게 성장하여 새로운 분야가 급격하게 생겨났다. 어떤 연구들은 연구하는 대상이 아니라 연구하는 방법 즉, 방법론 때문에 수학으로 분류되었다. 대부분의 수학자가 동의하고 있는 '수학은 패턴의 과학이다.'라는 정의가 출현한 것은 20년 정도에 불과하며, 수학자가 연구하는 것은 추상적인 패턴, 즉 수치적 패턴, 형태의 패턴, 운동의 패턴, 행동의 패턴 등이다.

이상에서 살펴본 수학의 성격 변화에서 보듯이 수학은 수의 탐구, 기하의 탐구, 운동·변화·공간의 탐구, 수학 연구의 도구에 대한 탐구로 그 영역을 점차 확대하여 왔다. 이제는 수학의 영역이 폭넓어짐에 따라 수학이 무엇인가에 대한 학문적 성격을 밝혀 줄 수학의 본성을 논의하기에 이르렀다고 할 수 있다. 이에 대하여 현대의 수학자들은 '수학은 패턴의 과학이다'라는 정의에 대체로 동의하기에 이른것이다.

수학 영역의 확대와 더불어 '수학은 패턴의 과학'이라는 정의에 이르게 된 큰 계기로는 무엇보다도 공학의 역할을 들 수 있을 것이다. 종이와 연필만으로는 불가능했던 탐구들이 이제는 컴퓨터를 통하여 가능하게 됨으로써, 수학은 더욱 폭넓은 학문이 된 것이다. 예를 들면, Georg Cantor의 초유한집합, Sonja Kovalevsky의 미분방정식, Alan Turing의 계산 가능성(computability), Emmy Noether의 추상 대수, 그리고 Benoit Mandelbrot의 프랙탈에 관한 개념들을 들 수 있다(Steen, 1990). 수학이라는 학문이 산술과 기하에 뿌리를 두고 있기 때문에 흔히 수학은 수와 공간의 과학이라고 정의되어 왔으나, 현대 수학의 다양성은 이러한 정의를 넘어서는 부분들이 있다. 최근 컴퓨터와 수학이 공조되면서 비로소 수학에 대한 적절하고 새로운 정의는 더욱 명확해졌으며, Steen(1988, p.611)은 컴퓨터의 사용으로 인한 수학의 변화를 다음과 같이 말하고 있다.

> 수학은 전산화와 컴퓨터의 응용이 급격히 늘어나면서 여러 분야와의 교류가 가능해졌고, 이를 통하여 전에 없던 많은 새로운 방법과 이론 및 모델들을 낳게 되었다. 이러한 변화의 예들은 통계학, 순수 수학, 응용 수학 분야에서 볼 수 있으며, 이러한 변화는 수학과 과학 사이의 관계를 확대시키고 풍부하게 하고 있다. 수학은 수와 공간에 관한 연구에 국한되는 것이 아니라, 패턴간의 관계를 밝히고 패턴의 관찰에 기초하는 패턴의 과학이 되었다.

수학자들은 다양한 영역에서 그들의 패턴을 개발해 왔으며, 수학자들이 다루는 패턴에는 제한이 없다. 수학자들이 다루는 패턴들은 사실적이면서도 공상적일 수 있으며, 시각적이면서도 정신적일 수도 있고, 정적이면서도 동적일 수 있고, 질적이면서도 양적일 수 있으며, 철저하게 실용적이면서도 단지 오락적인 흥미일 수 있으며, 우리 주위의 세계로부터 나타나기도 하면서 공간과 시간의 깊은 곳에서부터 나타날 수도 있다(Devlin, 1994).

수학의 새로운 정의로서 패턴의 탐구는 수학의 폭넓은 영역과 함께 수학의 본성을 강조하는 것으로 받아들여진다. 인간 정신과 문화는 수많은 패턴들을 인식하고 분류하고 이용하는 정형화된 사고 체계를 발전시켜 왔으며, 우리는 그것을 수학이라는 이름으로 부른다(Stewart, 1995; 김동광 외(역), 1996, p.15). 수학의 발전 과정은 패턴을 발견하고, 설명하고, 창조하며, 만들어 낸 패턴 속에 숨어 있는 질서와 규칙을 밝혀 내려는 노력의 결과이다. 수학의 응용은 패턴에 맞는 자연현상을 설명하고 예상하는 데에 패턴을 이용하는 것이다. 패턴은 다른 패턴을 시사해 주고 패턴들의 패턴을 낳기도 한다. 이제 '패턴의 과학'이라는 폭넓은 개념으로서 수학을 꽃피우는 시기가 된 것이다.

2. 수학교육에서 패턴

수학의 새로운 정의는 폭넓은 수학의 영역을 포함하는 관점이다. 그러나 폭 넓은 새로운 영역들은 일반인들에게 있어서는 여전히 미지의 것이며, 일반인의 상식적인 관점으로 수학은 산술, 기하, 대수, 미적분 등의 학교 교과목에서 배운 수식이나 공식을 다루는 정적인 과목인 것이다.

하지만 지금까지 수학의 전부로 받아들여졌던 것들은 수학이라는 학문의 일부이며, 기존 학교 수학에도 풍부한 아이디어가 숨쉬고 있다는 시각으로 수학 및 학교 수학을 받아들여야 할 것이다. 학교 수학에서의 내용들은 수학의 기본을 대표하는 것으로, 그 근본에는 수학을 풍부하게 해 주는 아이디어가 있다.

최근 많은 연구에서 수학의 새로운 정의에 입각하여 수학 교육에서 중요하게 다루어져야 할 수학교육과정의 하나로 패턴을 들고 있다(NCTM, 1989; 1991; 1993). 미국 수학 교사 협의회(NCTM : National Council of Teachers of Mathematics)의 수학교육의 구체적인 목표와 방법론을 제시한 'Curriculum and evaluation standards for school mathematics'(NCTM, 1989)에서도 패턴을 초등학교 및 중학교의 수학교육과정에 포함되어야 할 하나의 주제로서 다루고 있다.

패턴의 탐구는 패턴을 인식하고 기술하고 일반화하며, 관찰된 패턴을 나타내는 실세계를 예측할 수 있는 수학적 모델을 요구하며, 광범위하게 발생하고 있는 규칙적이면서도 혼돈적으로 보이는 패턴은 패턴과 함수의 탐구를 중요하게 만든다(NCTM, 1989). 수학 전반에 패턴이 존재하며, 이러한 패턴에서 관계를 찾는 것은 무엇보다 중요하며, 더욱이 수학적 패턴의 예는 일상에서 쉽게 접할 수 있으므로 이들 개념은 수학의 주요한 테마가 된다(Geer, 1992, p.19). 학생들은 다양한 수학적 경험을 통하여 패턴이라는 수학적 뿌리에서 수학적 통찰력을 개발할 수 있는 기회를 가져야 할 것이다.

B. 수학 교육에서 패턴의 중요성

수학교육에 있어서 새로운 방향을 모색하는 많은 연구들은 수학교육과정에서 더 많은 관심을 가져야 할 주제 중의 하나로서 패턴을 들고 있다(NCTM, 1989; 1991; 1993). 패턴은 수학의 주제를 엮는 기본이며, 전 미국 수학 교사 협의회(NCTM)에서 제시하는 Standards 전반에 걸쳐 강조되고 있다.

수학에서 패턴의 강조는 수학 교과에 대한 인식 변화를 촉구하는 것으로, 본 절에서는 먼저 수학 교과에 대한 인식의 면에서 패턴의 중요성을 살펴보고, 문제 해결로서의 수학, 의사소통으로서의 수학, 수학적 추론으로서의 수학, 수학적 연결로서의 수학의 면에서 패턴의 중요성을 살펴보기로 한다.

1. '수학 교과에 대한 인식'과 패턴

수학 교과에 대한 인식의 변화는 단지 수학에 대한 호의적인 감정을 갖는 것에 목적이 있는 것이 아니며, 수학적 내용과 구조를 이해하고 음미하는 단계까지 이르는 것이다. 수학이 중요한 과목이라든지 필요하다는 생각에 그치는 것이 아니라, 학생이 직접 수학적 사고를 하여 자신감을 갖는 데에 있다.

학생들은 학교 수학에 대한 단순한 계산이나 암기의 과목이라는 부정적인 인식을 벗어버릴 수 있는 학습 기회를 가져야 하며, 패턴의 탐구는 이러한 기회를 제공하는 하나의 주제가 될 수 있다. 수학에 대한 자신감이나 즐거움은 쉬운 문제의 해결이나 옳은 답을 구하는 것만으로 느낄 수 있는 것은 아니며, 때로는 다양한 해가 있는 쉽게 풀리지 않는 문제를 고민하는 가운데에서 느끼는 것이기도 하다.

패턴의 탐구에서는 다양한 해가 가능한 탐구 상황에서 수학적인 관계 및 규칙성에 집중함으로써 학생의 능동적인 참여를 촉구하며 수학의 다양한 면을 경험하게 한다. 수학적 패턴들은 역동적인 수학의 모습을 보여주며, 수학의 아름다움을 느낄 수 있는 기회를 제공한다. 이 때의 수학의 아름다움은 시각적인 아름다움뿐만이 아니라, 패턴이 보여주는 수학의 구조에서 느낄 수 있는 아름다움이다.

이러한 패턴 탐구의 경험들은 수학의 즐거움과 수학의 아름다움을 느끼게 하고, 수학에 대한 자신감을 갖게 하며, 더 나아가서는 수학 교과에 대한 인식을 새롭게 해 줄 것이다.

2. '문제 해결로서의 수학'과 패턴

문제 해결에 대한 견해는 차이가 있을지라도 문제 해결이 수학교육과정에서 '중요한 역할을 해야 한다는 점에는 수학 교육계가 대체로 동의하고 있다.

Schroeder & Lester(1989)는 수학교육에서 문제 해결에 접근하는 방식을 세 가지로 개념적인 구별을 하였다. '문제 해결에 대한 수업', '문제 해결을 위한 수업', '문제 해결을 통한 수업' 등이다. 첫 번째의 '문제 해결에 대한 수업'

에서는 문제 해결의 단계를 강조하며, 두 번째의 '문제 해결을 위한 수업'에서는 학습한 내용들을 문제 해결에 적용하는 데에 강조점이 있다. 이 두 가지 수업의 한계를 지적하면서, 세 번째의 '문제 해결을 통한 수업' 즉, 수업에서 학습하고자 하는 주제를 잘 나타내는 문제로부터 수학적 아이디어를 개발하는 수업을 강조하고 있다.

위의 세 가지 접근 방식들의 장단점에 대한 논의는 또 다른 문제이며, 이들 각 접근 방식들은 각기 패턴을 중요 요소로 다루고 있다. '문제 해결에 대한 수업'에서는 패턴 찾기를 강력한 문제 해결 전략의 하나로 들고 있으며, '문제 해결을 위한 수업'에서도 학습한 패턴을 문제 해결 사태에 활용하도록 강조된다. '문제 해결을 통한 수업'에서는 패턴의 이해는 문제 해결의 하나의 전략이나 도구라는 면에서 중요한 것만은 아니며, 수학에서 학습해야 할 패턴을 드러내는 문제 해결을 통하여 문제 해결의 과정에서 패턴을 경험하여 수학적인 아이디어를 개발하는 데에 강조점이 있다.

학생이 패턴을 이해하기 시작할 때 문제 해결 전략으로서 '패턴 찾기'를 사용하며, 학생은 패턴을 배울 뿐만 아니라, 패턴을 사용하기도 하는 것이다(NCTM, 1989). 패턴의 이해는 다양한 수학적 사고를 풍부하게 하며, 학생이 문제 해결자가 되고 추상적 사고자가 되도록 도와준다(NCTM, 1993a).

3. '의사 소통으로서의 수학'과 패턴

의사 소통은 수학 교육 전반에 걸쳐 강조되어야 할 것이며, 수학 수업에서는 4가지의 언어 기술—말하기, 듣기, 읽기, 쓰기—를 요구한다(NCTM, 1993e). 학생들은 수학적으로 의사 소통하고 수학을 생산적으로 활용할 때 수학을 하나의 언어라고 생각하게 된다.

특히 오늘날의 수학적으로 읽고 쓰는 능력—즉, 영국인들은 '수학·과학적 사고 능력(Numeracy)'이라고 부르는 능력—은 언어적으로 읽고 쓰는 능력과 마찬가지로 중요하다(NRC, 1989). 수학·과학적 사고 능력은 단지 숫자와 친숙한 것을 넘어서서 일상생활에 스며있는 수학 개념을 파악할 수 있어야 한다. 수학적으로 읽고 쓰는 능력은 패턴의 탐구에서 중요한 도구이기도 하면서 패턴의 탐구가 지향하는 바이기도 하다.

패턴의 탐구에서는 학생들은 패턴을 설명하고, 각자가 본 패턴에 대해서 써 보고, 패턴에 관한 아이디어를 나눈다(NCTM, 1993a). 패턴의 탐구는 일상의 언어와 수학의 언어를 의미있게 연결해 줌으로써, 패턴을 통하여 의사 소통으로서의 수학을 강화할 수도 있다. 패턴의 탐구에 있어서 의사 소통은 필수 불가결한 하나의 조건이기도 하다. 즉, 의사 소통은 패턴의 탐구를 위한 수단이 됨과 동시에 패턴 탐구에 있어서 하나의 목적인 것이다.

4. '추론으로서의 수학'과 패턴

추론은 수학을 알고 행하는 데 있어서 근본적이며, 귀납 추론이나 연역 추론은 모든 영역에서 강조된다(NCTM, 1989). Kutz(1991)는 "수학적 추론 특히 귀납적 추론은 패턴을 인식하고 기호화하는 능력에 달려 있다"(pp.264-267)고 말한다. 패턴의 인식은 귀납 추론의 본질이며, 패턴의 인식은 문제에 대한 가설을 이끌어 낼 수 있게 한다. 패턴의 탐구는 다양한 예에서 패턴을 인식하고 조직하며 자신의 패턴을 사용하여 가설을 이끌어 내게 하는 것이다. 패턴의 탐구에서는 여러 가지 종류의 추론이 소개될 수 있으며, 추론의 강조와 함께 수학은 단순한 규칙과 절차는 암기하는 학문이 아니라 의미 있고 논리적인 것으로 인식하게 해 준다.

5. '수학적 연결성'과 패턴

수학적 연결성은 다양한 표현들을 관련짓는

것, 수학의 내용들 사이의 관계를 인식하는 것, 다른 교과에서 수학을 사용할 수 있는 것, 일상의 생활에서 수학을 사용할 수 있는 것 등을 포함한다.

패턴은 색, 모양, 방향, 방위, 수 등 여러 가지 속성을 포함하며, 하나의 패턴에서 다양한 표현을 보는 것은 학생이 구조에 초점을 둘 수 있도록 도와준다(Howden, 1989, p.19). 패턴의 탐구는 다양한 표현들 간의 관계를 인식하는 것을 기초로 한다.

또한 패턴을 통하여 수학의 다양한 영역에서 수학의 상호 관련성을 관찰할 수 있으며, 더 나아가서는 과학, 미술, 음악, 문학, 사회과학 등과도 밀접한 관련을 맺는다. 일상에서는 자연물이든 인공물이든 나름의 패턴이 있으며 어디에서든지 패턴을 찾을 수 있다. 일상에서 발견되는 다양한 패턴의 탐구는 일상 생활과의 수학적 연결성을 강화해 준다.

수학의 뿌리들을 학생들의 경험 안에서 수학의 여러 갈래들과 연결할 필요가 있으며, 바로 이것이 연결성의 강조이며 패턴에 집중하는 이유이기도 하다. 패턴의 탐구는 다양한 표현간의 연결성을 제공하며, 실생활과 수학의 연결성, 타 교과와 수학의 연결성, 수학의 영역간의 연결성 등을 제공한다.

C. 수학 교실의 변화에 따른 패턴의 강조

수학교육의 연구 결과가 수학 교실을 변화시키기도 하지만, 수학 교실의 변화가 수학교육의 새로운 접근을 촉구하기도 한다. 본 절에서는 수학 교실의 변화에 따른 패턴의 강조를 첫째로는 학습자에 대한 시각과 관련하여, 둘째로는 공학의 도입과 관련하여, 셋째로는 협동 학습 체제의 강화와 관련하여 논의하기로 한다.

1. 학습자에 대한 시각과 패턴의 강조

수학교육에서 학습자의 존중은 누구나 받아들이는 것이지만 정작 무엇이 학습자의 존중인가에 대해서는 동일한 시각을 갖는다고 볼 수는 없다. 본 연구자는 교육에서의 학습자 존중이 피상적으로 아동의 필요와 흥미라는 말로 설명되어질 것은 아니며, 교육 내용과 방법의 면에서 설명되어야 할 문제라고 생각한다.

학습자의 필요나 흥미에 따라 교육 내용이 결정되는 것을 학습자의 존중이라고 할 수는 없으며, 때로는 학습자가 필요한 것을 느끼지 못하고 흥미도 없어 하는 상황에서도 여전히 수학교육을 생각해야만 한다. 이러한 어려운 상황에서도 학생이 자신의 눈으로 볼 수 있는 방법을 모색함으로써 자신의 수학적 아이디어를 개발할 수 있도록 하는 것, 바로 이것이 진정한 의미에서 학습자의 존중이라고 생각한다.

이전의 그리고 지금도 많은 수학 교실에서 학생들은 수학의 즐거움이나 아름다움 등은 기나긴 어려운 시간 이후에만 느낄 수 있는 그들의 것은 아니라는 생각을 가져 왔다. 어려운 기나긴 시간은 모두 학생의 몫이며 문제를 계속 풀다 보면 먼 곳에서 만날 수 있는 수학만을 강조하여, 모든 학생을 위한 수학이 아니라 끝까지 하려고 하는 몇 몇 학생들을 위한 수학이 되어 왔다. 하지만 새로운 수학 교실에서의 모든 학생을 위한 수학은 결과로서의 수학이 아니라 수학하는 과정을 강조하고 있다. 학생의 수학적 이해는 수학이 학생의 마음 안에서 한 부분이 되도록 해 주는 것이며, 패턴의 탐구는 학습의 결과는 물론 학습 과정을 강조하는 것이다.

수학 교실에서 패턴을 보여주는 것만으로 수학 학습이라고 말 할 수는 없다. 패턴은 수학에 폭넓게 퍼져 있고 일상생활에서도 다양한 패턴 상황을 접하지만, 패턴에 접하는 것만으로 학생이 수학적 패턴을 탐구했다고는 할 수 없을 것이다.

이전의 연구에서도 저학년에서 다양한 패턴 상황을 접하고 있으나, 문제 해결 전략으로는 사용하지 못한다고 지적하고 있다(Dolan &

Williamson, 1983). Armstrong(1995, p.446)은 패턴에 초점을 둔 활동들이 수학과 관련을 맺지 못하여 의미있는 수학의 탐구가 되지 못함을 다음과 같이 지적하고 있다.

> 불행하게도 패턴이나 관계에 초점을 둔 활동이나 아이디어들이 체계적으로 수학 내용과 관계를 맺지 못하고 있다. 결과적으로 학생들은 아름다운 시각적 패턴을 만들고 또는 리드믹한 박수 소리나 손가락 치는 소리와 같은 청각적 패턴을 인식하고 만들어 내기도 하지만, 그들은 그 속에서 어떤 수학도 '볼' 수가 없다.

학생들에게 패턴은 동일한 것으로 보이지는 않을 것이며, 패턴의 개념을 개발하는 데에는 풍부한 경험이 필요하다(Jones & Thumpston, 1993, p.44). 패턴의 탐구가 학생에게 의미있는 경험이 되기 위해서는 수학적 패턴이 있는 상황을 제시하는 것에 그칠 것이 아니라, 수학적 아이디어를 개발할 수 있도록 패턴 활동을 조직하여야 할 것이다.

터널의 끝에서 앞으로 있을 이해의 불빛으로 손짓하는 것 이외에, 터널의 내부 조명을 더욱 늘릴 필요가 있다(NRC, 1989). 어두운 터널의 끝에 있는 밝은 빛을 강조하는 외적 필요성에 의한 수학이 아니라 어두운 터널 속에 빛이 있다는 수학의 내적 가치 인식을 위한 노력이 필요한 것이다.

2. 공학의 도입과 패턴의 강조

수학의 영역은 폭넓게 확대되었으며, 컴퓨터의 사용으로 더욱 가속화되어 왔다. 컴퓨터는 수학의 학문적인 성격뿐 아니라 수학의 규모를 변화시키며, 과학에서의 망원경과 현미경의 역할을 수학에서는 컴퓨터가 한다(Steen, 1988, p.616). 컴퓨터의 도입에 따른 수학의 탐구 방법에 대하여 Steen(1990, p.2)은 다음과 같이 말하고 있다.

> 수학의 발전에 대한 이정표가 될 수 있는 것은, 19세기의 Gauss나 Poincaré 와 같은 수학의 대가들만이 '마음의 눈'에 의지하여 볼 수 있었던 패턴에 관한 연구의 많은 부분을 요즈음에는 컴퓨터 그래픽의 도움으로 우리도 실제 눈으로 볼 수 있게 된 것이다. '본다'는 것은 항상 두 가지 다른 의미를 가져왔다. 즉, 눈으로 인식한다는 것과 마음으로 이해한다는 것이다. 오늘날에는 수학자들이 패턴을 보는 새로운 방법을 발견함에 따라 눈과 마음 둘 모두를 수용하는 쪽으로 바뀌고 있다.

수학교육의 방향을 제시하는 연구물들은 수학 교실의 컴퓨터의 도입을 권고 및 강조하고 있으며(NCTM, 1989; 1991; 1993; 1995), 수학 교실에서 어떻게 사용되어져야 하는지를 논의하고 있다.

패턴의 탐구를 위해서는 컴퓨터가 하나의 강력한 도구로서 사용된다. 컴퓨터나 계산기 등을 이용하여 간단하고 편리하게 패턴을 만들 수 있을 뿐만 아니라, 어떤 종류의 패턴은 컴퓨터를 이용하지 않고는 제대로 볼 수가 없는 것들도 있다. 규칙성은 대개의 경우 반복을 통하여 드러나며, 무한히 반복하여 얻을 수 있는 패턴들을 종이와 연필만으로 얻어낸다는 것은 거의 불가능하다. 그러나 컴퓨터는 수만 수천의 거의 무한에 가까운 반복을 통하여 무한에서 가능한 패턴을 얻어낼 수 있게 해 준다.

컴퓨터는 반복성을 보여주는 강력한 도구로서 패턴의 탐구에서 강력한 역할을 한다. 패턴의 탐구는 공학이 적극적으로 도입되고 있는 수학 교실에서 적절한 주제일 뿐만이 아니라, 공학이 강조되는 하나의 이유를 설명해 주는 것이기 하다.

3. 협동 학습 체제의 강화와 패턴의 강조

전통적으로 수학 학습은 혼자서 하는 것으로

여겨져 왔으나, 이제 수학 학습은 혼자 만의 해에 만족할 것이 아니라 자신의 해를 입증하고 타인의 해를 이해하여 심도있는 이해를 갖는 것이 중요하다. 협동 학습 체제에서는 상호작용을 통하여 다른 사람과 언어를 명확화하고 서로의 생각을 고려하며 타당성을 주장하기도 한다.

학생들의 수학 학습은 수학적 아이디어를 이해하기 위해서 공동체로 형성된 학습 환경 속에서 향상된다(NCTM, 1995). 협동 학습 체제는 대집단 활동인가 소집단 활동인가의 문제가 아니라 하나의 이해를 위하여 공동체로 형성되는 학습 환경인 것이다. 패턴의 탐구에서는 패턴을 설명하고 타인의 패턴을 이해하고 자신의 패턴을 입증한다. 서로의 패턴을 이해하는 것은 다양한 패턴을 경험하는 것이며 수학적 패턴의 탐구를 통하여 추구하는 바이기도 하다.

수학 교실에서의 협동 학습 체제의 강화는 의사 소통과 추론을 강조함과 동시에 개방적이고 서로를 존중하는 분위기를 유지시킨다. 수학 교실의 이러한 변화는 패턴의 탐구를 가능케 하는 요소이면서, 다른 면에서는 패턴의 탐구를 통하여 교실의 협동 학습 체제를 강화시킬 수 있다. 말하자면, 수학 교실에서 협동 학습 체제의 강화를 통하여 패턴 탐구 활동의 기본적인 전제들을 마련하기도 하며, 한편으로는 패턴의 탐구를 통하여 수학 학습에서 추구하는 협동 체제가 더욱 강화될 수도 있다는 것이다.

III. 수학적 패턴

수학적 패턴을 밝혀 보고자 수학적 패턴의 유형화를 시도하고, 다음으로는 유형화한 수학적 패턴에 따라 현행 수학책 및 수학 익힘책을 조사 분석하여 학교 수학에서 어떠한 패턴이 어떤 방식으로 다루어지는지 살펴본다.

A. 수학적 패턴

패턴이라는 용어는 일상생활에서 다양한 방식으로 사용된다. 옷 패턴은 옷본이고, 모형 비행기 패턴은 설계도이며, 카펫 패턴은 대칭적인 디자인이다. 뜨개질에서의 패턴은 사용 설명서를 말하고, 벽지 패턴은 무한히 반복되는 디자인을 말하며, 행동 패턴은 인간 반응의 예견을 포함하고 있다(NCTM, 1993a, p.1).

수학은 패턴을 기초로 하는 학문이며, 수학자는 패턴을 관찰하고, 관찰된 패턴을 추측하고 검증하고 기호화하며 일반화한다(NCTM, 1993e). 수학자가 다루는 패턴에는 수 패턴, 모양의 패턴, 움직임의 패턴, 행동의 패턴 등 추상적인 패턴이 포함되며, 수학자들은 그들의 패턴을 수학적으로 탐색한다.

패턴 개념을 이해한다는 것은 패턴에 담긴 규칙성이나 반복을 다양하게 인식하는 것이며 (NCTM, 1993a, p.2), 본 연구의 프로그램 개발에서는 패턴에 담긴 규칙성이나 반복에 초점을 둔다. 수학적 패턴을 한 마디로 정의하기는 어려우며, 본 연구에서는 수학적 패턴이라고 할 수 있는 것들을 다음 절의 '수학적 패턴의 유형화'에서 유형화하고 유형화한 패턴들을 중심으로 다룬다.

본 연구에서의 패턴은 수학의 탐구로서의 패턴이며 다른 학문에서의 패턴이나 일상생활에서의 패턴과 구별하기 위하여 '수학적' 패턴이라고 한다.

B. 수학적 패턴의 유형화

다음과 같은 두 가지 준거에 따라 수학적 패턴의 유형화를 시도한다. 첫째로는 어떤 속성을 패턴화하는가에 따라 유형화하고, 둘째로는 어떠한 방식으로 패턴을 생성하는가에 따라 유형화한다.

1. 패턴의 속성에 따른 유형

패턴을 어떤 속성에 의해 패턴화하는가에 따

라 다음과 같이 수학적 패턴을 유형화할 수 있다.

(1) 관계적인 속성에 따른 패턴
관계적인 속성 즉, 수열이나 함수를 기초로 하는 패턴.

<예> 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ···

(2) 기하적인 속성에 따른 패턴
기하적인 속성 즉, 도형의 성질이나 모양을 기초로 하는 패턴.

<예> □○◇△□○◇△□○◇△ ···

(3) 물리적인 속성에 따른 패턴
물리적인 속성 즉, 색, 크기, 방향 등을 기초로 하는 패턴.

<예> □■■■□■■■□■■■ ···

하나의 패턴이 한 가지 속성을 갖는 것은 아니며, 일상에서 흔히 볼 수 있는 패턴들은 위의 세 가지 속성을 모두 갖고 있는 것이 대부분이다. 패턴의 어떤 속성을 인식하느냐에 따라 하나의 패턴을 여러 가지 다른 방식으로 해석할 수 있다.

학교 수학에서는 어떤 속성의 패턴을 수학 교수·학습에서 경험시킬 것인가에 따라 수학 수업에서 강조되어야 할 패턴이 다르게 드러날 것이다. 그러나 이 때의 패턴은 강조점이 있을 뿐이며, 적어도 실제에 드러난 이후에는, 오직 유일하게 한 가지 속성만을 갖는 패턴이란 우리의 일상에서는 물론 수학 교실에서도 가능하지 않다.

2. 패턴의 생성 방식에 따른 유형

패턴을 어떠한 방법으로 패턴화하는가, 즉 패턴의 생성 방식에 따라 수학적 패턴을 다음과 같이 유형화할 수 있다.

(1) 반복에 의한 패턴
기본 단위나 기본 규칙이 변화없이 그대로 유지되면서 반복되는 패턴.

<예> 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ···

<예> ♤♠♤♠♤♠♤♠♤♠♤♠♤···

(2) 증가에 의한 패턴
기본 단위나 기본 규칙이 증가 또는 변형되면서 만들어지는 패턴.

<예> 1, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, ···

<예>

```
*      *       *
* *    * *     * *
       * * *   * * *
               * * * *
```

(3) 대칭에 의한 패턴
기본 단위가 대칭되면서 만들어지는 패턴.

<예> ≤ ≥ ≤ ≥ ≤ ≥ ≤ ≥ ···

<예> 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, ···

(4) 회전에 의한 패턴
기본 단위가 회전되어 만들어지는 패턴.

<예>  ···

(5) 카오스 현상에 의한 패턴
자연에서 흔히 볼 수 있는 비정규적인 패턴으로 유체의 난류 현상, 해안선의 구조, 구름의 패턴, 고사리 잎의 패턴, 허파의 가지 구조, 번개의 구조, 우주의 은하계의 분포, 불규칙적인 주가의 등락, 인구 동향 등을 들 수 있다. 이러한 카오스 현상이 드러내는 기하적인 패턴을 프랙탈이라고 하며, 수학에서 잘 알려진 칸토르 집합이나 시어핀스키 삼각형도 프랙탈의 예들

이다. 프랙탈을 한 마디로 정의하기는 어려우나, 프랙탈은 자기 유사성1) 및 프랙탈 차원2)이라는 두 가지의 큰 특징을 갖는다.

패턴의 생성 방식에 따른 위의 다섯 가지의 유형들도 하나의 패턴에서 다양하게 나타날 수 있으며, 대부분 여러 가지 생성 방식이 복합적으로 적용된 패턴일수록 더욱 인식하기에 어렵다. 패턴의 생성 방식을 이해하는 것은 패턴의 구조를 설명하는 하나의 틀이 될 수 있을 것이며, 수학적 패턴 인식의 핵심적인 문제이기도 하다.

위의 두 가지 유형화 이외에도 패턴을 만드는 재료에 따라 다양한 유형의 패턴들을 만들 수 있다. 자연에는 수없이 많은 패턴이 숨쉬고 있으며, 패턴을 만들 수 있는 자료도 수 없이 많다. 다음의 패턴들은 특히 수학 관련 서적 및 잡지에 패턴의 이름이 붙여져 소개된 예이다.

타일 패턴(Evan, 1990; NCTM, 1993c; Ives, 1994; Grassl, 1996)은 일상 생활에서 흔히 볼 수 있는 것으로 타일 깔기와 같이 도형의 각 변이 맞닿아 가면서 서로 겹치지 않고 하나의 패턴을 만드는 것이다. 퀼트 패턴(Erine, 1995; Smith, 1995)은 천을 짜깁기 할 때 나타나는 패턴으로 반복적으로 여러 가지 조각 천을 깁기하여 아름다운 패턴을 만든다. 달력 패턴(NCTM, 1993c)에서는 달력에 있는 수들간의 패턴을 찾는 활동을 포함하는 것으로, 예를 들면 가로, 세로, 대각선의 수의 합이 일정한 규칙을 갖고 있음을 이용하여 수 패턴을 인식하는 활동이 가능하다. 블록 패턴은 속성 블록(Miller & Lee, 1995; Caldwell, 1995)이나 단위 정육면체를 이용하여 만드는 패턴으로, 수학 학습 교구로 상품화되어 소개된 것도 있으며 종이를 이용하여 단위 도형을 만들 수도 있다. 문양 패턴(Bradley, 1993; Zaslavsky, 1979, 1990)은 민족 고유의 문양에서 패턴을 찾는 것으로 문화와 접맥된 패턴의 연구도 있다. 이 밖에도 일상의 많은 다양한 자료를 통하여 수학적 패턴에 접근하는 여러 가지 아이디어들이 소개되고 있다.

C. 수학적 패턴에 대한 수학 교과서 분석

본 연구에서는 초등학교 4학년을 대상으로 프로그램을 개발하며, 수학 교과서의 조사 분석의 대상에서도 초등학교 4학년으로 제한한다. 앞 절 Ⅲ.B에서 유형화한 패턴에 따라 현행 4학년 수학책과 수학익힘책3)에서 어떤 수학적 패턴이 나타나는가를 조사 분석하였다.

<표 1>은 조사 결과를 요약하여 빈도수를 나타낸 것으로, 수학적 패턴의 유형은 본 논문의 'Ⅲ. B. 수학적 패턴의 유형화'에서 밝힌 바에 따른다. 즉, 1-(1)은 관계적인 속성에 따른

1) 자기 유사성이란 각 부분이 전체와 유사한 형태를 지니는 성질을 말한다. 간단한 예로는 칸토르 집합이나 코흐 곡선, 시어핀스키 삼각형 등에서 볼 수 있다. 이러한 예들은 프랙탈의 예이기도 한 것들이다. 하지만 자기 유사성을 갖는 모든 것이 프랙탈이라고 할 수는 없으며, 예를 들어 선분의 경우는 부분이 전체의 축소가 되는 자기 유사성을 갖지만 프랙탈이고는 할 수 없다.

2) 프랙탈은 삼각형이나 직선과 같은 기하 도형과는 다른 놀랄 만한 성질들을 가지고 있음이 밝혀졌다. 유클리드 기하학의 세계에서는 사물이 정수로 표시되는 차원을 가진다. … 그러나 프랙탈은 얼마나 많이 꿈틀대는가에 따라 1차원과 2차원 사이의 어느 차원이나 될 수 있다. 곡선이 직선과 유사할수록 더 매끄럽고 프랙탈 차원은 1에 가까워진다. 거칠게 갈지자로 움직이면서 거의 평면을 채워가는 곡선은 2에 가까운 프랙탈 차원을 갖는다. … Mandelbrot는 … 프랙탈 차원을 계산하는 다양한 방법을 자세히 기술했으며 … 그 결과 프랙탈 차원을 이용하여 복잡한 형태의 도형까지도 수학적으로 처리할 수 있게 되었다. (김순덕, 1994, p25-26)

3) 현행(1996년) 초등학교 수학은 1-4학년은 제6차 교육과정에 따르는 수학책과 수학 익힘책을 사용하고 있으며 5-6학년은 제 5차 교육과정에 따르는 수학책과 수학 익힘책을 사용하고 있다. 본 연구에서는 4학년을 대상으로 하고 있으므로, 현행 4학년에서 사용하고 있는 제 6차 교육과정에 따른 교과서를 분석하였다.

패턴, 1-(2)는 기하적인 속성에 따른 패턴, 1-(3)은 물리적인 속성에 따른 패턴을 말한다. 2-(1)은 반복에 의한 패턴, 2-(2)는 증가에 의한 패턴, 2-(3)은 대칭에 의한 패턴, 2-(4)는 회전에 의한 패턴, 2-(5)는 카오스 현상에 의한 패턴을 말한다.

위의 <표 1>에서 보는 바와 같이 수열이나 함수를 기초로 하는 관계적인 속성에 따른 패턴 특히, 수 패턴이 가장 높은 빈도를 나타낸다. 또한 이들 패턴과 관련된 문제들도 모두 몇 가지로 한정되어 있다. 예를 들어, '4-1, 1. 큰 수' 단원에서는 모두 뛰어 세기에서 나타나는 패턴뿐이고, '4-1, 5. 여러 가지 문제(1)'과 '4-2, 5. 여러 가지 문제(1)' 단원에서는 관계를 나타내는 표에서 관계식을 찾는 문제, 또는 수의 합을 같게 만드는 문제에 한정되어 있다. '4-1, 4. 곱셈'과 '4-1, 8.분수' 단원에서는 뛰어 세기나 곱셈 반복으로 답의 변화를 보여주는 수 패턴이 나타나 있으며, 이들은 패턴의 인식보다는 계산 방법에 치중하고 있다.

<표 1>에서 볼 수 있듯이 기하적인 속성을 갖는 패턴은 드물게 나타난다. 또한 '4-1, 9. 여러 가지 문제(2)'와 '4-2, 9. 여러 가지 문제(2)' 단원에서 제시된 세 개의 문제조차도 모두 합동인 도형(정삼각형과 정사각형)의 반복에서 도형의 개수를 구하는 것으로 한정되어 있다. 이들은 기하적인 속성에 관심이 있다기 보다는 도형의 개수를 구하여 수 패턴을 찾는 데에 초점두을 고 있다. 따라서 다양한 패턴에서 오는 기하적인 구조나 아름다움을 다루지 않고 있다.

다양한 자료를 통하여 물리적 속성에 따른 패턴의 탐구도 가능하지만 4학년 교과서에서는 찾아볼 수 없었다. 또한 반복에 의한 패턴은 작은 몇 개의 합동 도형으로 닮음인 큰 도형을 만드는 그림에서 도형의 개수를 묻는 문제에서만 찾아볼 수 있다. 이 밖의 다른 패턴들은 4학

<표 1> 초등학교 4학년 수학책 및 익힘책에 나타난 수학적 패턴의 빈도수

단원명 \ 수학적 패턴의 유형		1-(1)		1-(2)		1-(3)		2-(1)		2-(2)		2-(3)		2-(4)		2-(5)	
		수학책	익힘책	수학책	익힘책	수학책	익힘책	수학책	익힘책	수학책	익힘책	수학책	익힘책	수학책	익힘책	수학책	익힘책
4학년 1학기	1. 큰 수	4	3														
	2. 덧셈과 뺄셈																
	3. 시간과 각도	1															
	4. 곱셈	1	1														
	5. 여러 가지 문제(1)	1	2	1													
	6. 나눗셈		1														
	7. 수직과 수평				1				1								
	8. 분수	2	3														
	9. 여러 가지 문제(2)		1	1	1			1			1						
4학년 2학기	1. 자연수의 혼합 계산																
	2. 나눗셈																
	3. 평면도형																
	4. 분수의 덧셈과 뺄셈																
	5. 여러 가지 문제(1)	1	2	1	2				1								
	6. 소수의 덧셈과 뺄셈	1	3														
	7. 평면도형의 둘레와 넓이																
	8. 표와 꺾은선그래프																
	9. 여러 가지 문제(2)	1															
계		12	16	3	4	0	0	1	2	0	1	0	0	0	0	0	0

년 교과서에서는 포함되지 않고 있다.

패턴에서 강조점은 다양한 패턴의 인식과 새로운 자기의 패턴을 창조해 가는데 있어야 하지만, 현행 수학 교과서에서 제시되는 형태는 모두 괄호 넣기 또는 퍼즐 문제에서 답을 구하는 것에 한정되어 있다. 패턴을 변형해 보거나 새로운 패턴을 만드는 활동들은 4학년 교과서에서는 나타나 있지 않다.

또한 패턴의 탐구에서 얻을 수 있는 강점 중의 하나는 여러 가지 표상의 변환을 통하여 수학 내 영역간의 연결성은 물론, 실생활과의 연결성 또는 타 교과와의 연결성을 높일 수 있는 다양한 자료를 갖고 있다는 것이다. 그러나 이러한 연결성을 보이는 패턴들은 찾아볼 수 없으며, 단지 규칙을 정하여 개수를 세어 보고 그들간에 수 패턴을 찾는 것에 한정되어 있다. 수학적 패턴이 담고 있는 아이디어를 여러 가지 면에서 다룰 수 있는 기회를 현행 4학년 교과서에서는 제공하지 못하고 있다.

이상에서 논의한 현행 4학년 수학책 및 수학익힘책에서 수학적 패턴을 다루는 데 있어서의 문제점을 요약하면 다음과 같다.

첫째, 4학년 수학 교과서에 나타난 패턴들은 대부분 수 패턴에 한정되어 있으며, 이외의 패턴을 거의 다루지 않고 있다. 둘째, 4학년 수학 교과서에서는 괄호 넣기나 퍼즐 문제에서 하나의 답만을 찾는 패턴이 강조되어 있으며, 패턴을 변형하거나 새로운 패턴을 만드는 활동을 찾아볼 수 없다. 셋째, 4학년 교과서에서는 수학적 패턴을 여러 가지 면에서 다룰 수 있는 기회를 보여주지 못하고 유일한 답을 강요하고 있다.

IV. 수학적 패턴 지도 방안

수학적 패턴 지도 방안을 모색함에 있어서, 먼저 기본 방향을 밝히고, 수학적 패턴 활동을 위한 교수 전략을 예와 함께 제시한다.

A. 수학적 패턴 지도의 기본 방향

1. 수학적 아이디어의 개발

첫째, 수학적 패턴에서 다양한 전략을 개발하여 문제 해결로서의 수학을 경험할 수 있게 한다. 다양한 패턴을 보여주는 것만으로 수학 학습이 가능해지는 것은 아니며, 단지 아름다운 패턴을 만들어보는 활동을 직접한다는 것만으로 수학 학습이 가능해지는 것도 아니다. 수학적 패턴 지도는 수학적 문제 해결 전략을 개발하는 기회를 마련하고, 학생이 스스로 문제해결자가 되는 기회를 제공하고자 한다.

둘째, 패턴을 탐구하는 활동을 통하여 의사소통으로서의 수학을 경험할 수 있도록 한다. 패턴 탐구는 자신의 패턴을 수학적으로 설명하는 활동, 타인의 패턴을 수학적으로 이해하는 활동으로 수학적 사고를 풍부하게 할 수 있다. 패턴을 구체물, 그림, 수학적 언어 및 기호 등과 관련지음으로써 패턴의 이해를 심화시킬 수도 있다. 수학적 패턴 지도는 패턴을 수학적으로 표현하고 타인과 수학적으로 토론하고 읽고 쓰는 기회를 갖음으로써 의사 소통으로서의 수학을 제공하고자 한다.

셋째, 패턴의 이해 및 응용에서 추론으로서의 수학을 경험할 수 있도록 한다. 수학적 패턴을 찾는 활동은 추론을 자극하며, 패턴을 사용하여 수학적 상황을 설명하거나 분석할 수도 있다. 수학적 패턴 지도는 패턴의 예에서 일반화를 시도하는 귀납 활동과 패턴을 검증하는 연역 활동을 포함하고, 더 나아가 패턴을 사용하여 새로운 패턴을 설명 또는 분석하는 기회를 제공하고자 한다.

넷째, 수학적 패턴의 속성·구조·자료 등을 다양하게 조직하여 수학적 연결성을 강화할 수 있도록 한다. 패턴의 탐구에서는 일상에서 흔히 볼 수 있는 패턴의 예를 도입하여 수학을 일상생활과의 연결이 용이하고, 타 교과에서의 패턴과 관련한 예나 탐구 방식들도 다양하므로 타 교과와의 연결도 가능하다. 수학의 각 영역을 패턴이라는 하나의 아이디어로 연결하여 수학 영역 내의 연결성을 강화할 수 있다. 수학적 패

턴 지도는 수학의 영역간의 연결성, 타 교과와의 연결성, 일상생활과의 연결성을 보여줄 수 있는 패턴 활동을 고안하고, 폭넓은 패턴의 탐구 기회를 통하여 수학적 연결성을 강화하고자 한다.

2. 수학 교과에 대한 인식의 변화

첫째, 기존의 패턴 인식뿐만 아니라 다양한 전략을 사용하여 스스로 문제를 해결함으로써 수학에 대한 자신감을 느낄 수 있도록 한다. 수학의 교수·학습에서는 유일한 답을 구하거나 기존의 패턴을 찾는 것 뿐 아니라, 다양한 전략을 통하여 문제를 해결할 수 있고 더 나아가서 학생은 새로운 수학적 패턴의 창조자가 되는 기회를 가질 수 있다. 수학적 패턴 지도는 다양한 해가 있는 패턴 활동을 통하여 스스로 문제를 해결하고 새로운 패턴의 창조자가 되는 경험을 통하여 수학에 대한 자신감을 느끼는 기회를 제공하고자 한다.

둘째, 수학 활동의 다양함을 경험하여 수학에 대한 즐거움을 느낄 수 있도록 한다. 괄호넣기 식의 수 패턴뿐만 아니라 다양한 속성과 다양한 구조의 패턴을 제공하고, 직접 패턴을 만들어 보는 기회를 갖게 함으로써 수학을 하는 즐거움을 느끼는 가질 수 있다. 수학 교과는 유일한 풀이에 의한 유일한 답만 있는 교과가 아니며, 협력 학습을 통하여 새로운 아이디어를 개발하는 기회를 제공받을 수 있다. 수학적 패턴 지도는 수학 수업에서의 자신의 아이디어를 개발하는 활동과 타인과 서로의 아이디어를 나누면서, 수학 활동의 즐거움을 느낄 수 있는 기회를 제공하고자 한다.

셋째, 수학의 구조에서 오는 수학의 아름다움을 느낄 수 있도록 한다. 여러 가지 패턴을 통하여 기하적인 아름다움을 느낄 수 있으며, 수와 기하의 관련성을 부각시킴으로써 수학의 구조가 보여주는 아름다움을 드러내 줄 수 있을 것이다. 수학적 패턴 지도는 기존 패턴에서의 아름다움을 보여주고 수의 구조에서 오는 아름다운 패턴을 이해하고 만드는 활동을 통하여, 수학의 아름다움을 느끼는 기회를 제공하고자 한다.

B. 수학적 패턴 활동을 위한 교수 전략

수학적 패턴 활동을 위한 교수 전략은 패턴을 수학적으로 경험하는 기회를 제공하고자 하는 교수 방법을 모색하는 것으로, 여러 가지 전략이 동시에 사용될 수 있다. 다음의 전략들의 순서는 교수·학습의 순서를 정하는 것이 아니며, 전략의 강조점에 따라 분류하였을 뿐이다. 여러 가지 전략들이 각 활동의 목적에 따라 나름의 방식으로 교수·학습에 도입될 수 있을 것이다. 네 가지의 큰 전략으로 패턴에서의 규칙 찾기, 기존의 패턴을 변형 또는 확장하기, 자신의 새로운 패턴을 만들기, 패턴을 수학적으로 설명해 보기로 설정하였다. 각각에 따르는 세부적인 전략과 구체적인 예를 제시하였다.

1. 패턴에서의 규칙 찾기

패턴에서의 규칙 찾기는 패턴이라는 인식을 가능하게 하는 기본 단위 또는 기본 구성을 파악해 보도록 한다.

1.1 기본 단위 찾기

주어진 패턴에서 기본 규칙이나 기본 구성을 찾아본다.

<예1> 어떤 모양을 반복하면 이러한 패턴을 만들 수 있습니까?

<예2> 다음 달력에 표시된 수들 간에는 어떤 규칙이 있습니까?

일	월	화	수	목	금	토
			1	2	3	4
5	**6**	**7**	**8**	9	10	11
12	**13**	**14**	**15**	16	17	18
19	**20**	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

다음 <표 2>는 수학적 패턴 활동을 위한 교수 전략을 개관한 것이다.

<표 2> 수학적 패턴 활동을 위한 교수

1. 패턴에서의 규칙 찾기	1.1 기본 단위 찾기 1.2 주어진 대상의 규칙을 다른 대상으로 나타내어 보기 1.3 다음에 올 것을 찾기 1.4 빈 곳에 알맞은 것 찾기
2. 패턴의 기본단위를 변형 · 확장하기	2.1 주어진 기본 단위를 여러가지 차원으로 반복하기 2.2 주어진 기본 단위를 선대칭하여 패턴 만들기 2.3 주어진 기본 단위를 회전하여 패턴 만들기 2.4 주어진 기본 단위를 변형하여 패턴 만들기
3. 자신의 새로운 패턴 만들기	3.1 패턴 용지를 활용하여 자신의 패턴 만들기 3.2 구체물을 써서 자신의 패턴 만들기 3.3 컴퓨터를 이용하여 자신의 패턴 만들기
4. 패턴을 수학적으로 설명하기	4.1 패턴만드는 설명서 만들기 4.2 패턴을 그림, 도표, 기호, 식 등으로 표현해 보기 4.3 패턴에 대한 보고서 쓰기

1.2 주어진 대상의 규칙을 다른 대상으로 나타내어 보기

주어진 패턴을 똑같게 구성해 보는 활동으로, 주어진 패턴에서의 규칙을 구체물을 달리하여 나타내어 본다.

<예1> 다음에 놓여진 나뭇잎에서 규칙을 찾아 바둑돌을 써서 같은 규칙으로 놓아보세요.

♠ ♣ ♣ ♠ ♣ ♣ ♠ ♣ ♣ ♠

<예2> 다음 박수 소리를 듣고 같은 규칙으로 공기돌을 써서 나타낼 수 있을까요?

(짝)쉬고(짝)(짝)쉬고(짝)(짝)(짝)

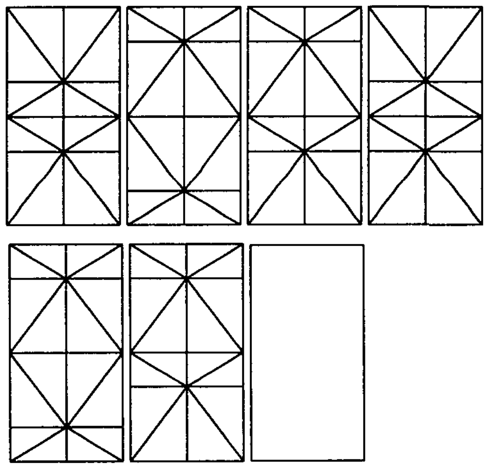
<예3> 다음의 신호등 불빛을 보고 변하는 규칙을 찾아 색종이를 써서 나타내어 보세요.

☼■□☼■□☼■□☼■□☼■□

1.3 다음에 올 것을 찾기

패턴에서 규칙을 찾아 다음에는 무엇이 오게 될지 규칙에 따라 추측해 본다.

<예1> 아래 그림은 차례로 변해 갑니다. 다음에는 어떤 그림이 오겠습니까?



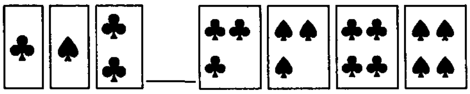
1.4 빈 곳에 알맞은 것 찾기

패턴의 규칙을 찾아서 빈곳에 알맞은 것을 찾아본다.

<예1> 다음의 빈 칸에 알맞은 수는 무엇입니까?

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, __, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, …

<예2> 카드가 놓인 규칙을 보고 빈곳에 알맞은 카드를 찾아 넣으세요.



2. 패턴을 변형·확장하기

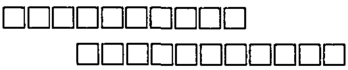
기존의 패턴을 여러 가지 방법으로 변형하거나 확장하여 또 다른 새로운 패턴으로 만들어 보도록 한다. 두 가지의 전략을 동시에 사용하면 한 가지 전략을 사용한 경우보다 더욱 복잡하고 또 다른 새로운 패턴을 얻게 된다.

2.1 주어진 기본 단위를 여러 가지 차원으로 반복하기

기본 단위를 주고 자신의 규칙을 정하여 일렬 또는 여러 가지 방향으로 반복 또는 성장시키면서 연장해 본다.

<예1> 다음 그림을 화살표 방향으로 반복하여 그림을 완성해 보세요.

<예2> 같은 모양의 여러 장의 타일로 바닥을 깔아 보세요.



<예3> 다음의 정육면체 블록을 이용하여 여러 가지 규칙을 정하여 탑을 쌓아 보세요.

2.2 주어진 기본 단위를 선대칭하여 패턴 만들기

기본 단위를 접기 등을 이용하여 선대칭하여 새로운 패턴을 만들어 간다.

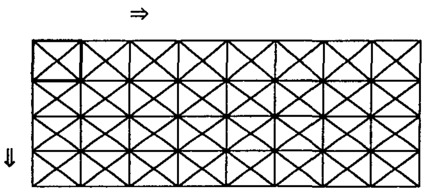
<예1> 여러 방향으로 접은 후에 한 쪽에 물감으로 그림을 그리고 다시 접힌 선을 따라 접어서 여러 가지 패턴을 만들어 보세요.

<예2> 색종이를 접은 후에 펀치나 핀으로 구멍을 뚫어 보세요. 어떤 모양이 될지 펼치기 전에 짝끼리 맞추기를 해 보고 펼쳐서 확인해 보세요. 또는 몇 번을 접어서 구멍 뚫기를 한 후, 펼친 모양만을 보고 접은 순서 맞추기도 해 보세요.

2.3 주어진 기본 단위를 회전하여 패턴 만들기

주어진 패턴을 여러 방향으로 회전해 가면서 새로운 패턴을 얻는다.

<예1> 다음과 같은 모양을 화살표로 표시된 두 방향으로 규칙을 정하여 모양을 변형하면서 패턴을 만들어 보세요.

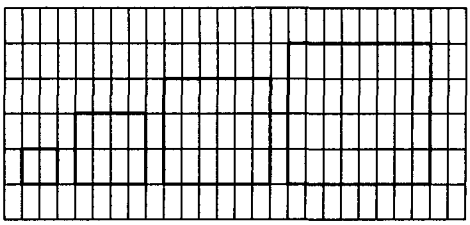


<예2> 찰흙으로 다 같은 모양의 도장을 만들어 돌려 가면서 도장찍기로 패턴을 만들어 보세요.

2.4 주어진 기본 단위를 변형하여 패턴 만들기

기본 단위를 축소하거나 확대하면서 또는 부분적으로 변형시키면서 패턴을 구성해 본다.

<예1> 그림을 축소하거나 확대해 가면서 패턴을 만들어 보세요.



3. 자신의 새로운 패턴 만들기

패턴의 기본 단위나 기본 규칙을 정하고 다양한 생성 방식에 따라 여러 가지의 패턴을 만들 수 있다.

3.1 패턴 용지를 활용하여 자신의 패턴 만들기

다양한 패턴 용지를 활용하여 편리하게 패턴을 구성해 본다. 모눈종이, 점이 찍힌 점종이, 삼각형의 모눈종이, 원모양의 모눈종이 등 다양한 패턴 용지를 활용해본다.

<예1> 다음의 종이 중에서 하나를 택하여 반복 규칙이 있는 그림을 만들어 보세요.

○○○○○○○○ △△△△△△△ ◇◇◇◇◇◇◇
○○○○○○○○ △△△△△△△△ ◇◇◇◇◇◇◇
○○○○○○○○○ △△△△△△△△ ◇◇◇◇◇◇◇
○○○○○○○○ △△△△△△△△ ◇◇◇◇◇◇◇
○○○○○○○○○ △△△△△△△△ ◇◇◇◇◇◇◇
○○○○○○○○ △△△△△△△△ ◇◇◇◇◇◇◇
○○○○○○○○○ △△△△△△△△ ◇◇◇◇◇◇◇
○○○○○○○○ △△△△△△△△ ◇◇◇◇◇◇◇

3.2 구체물을 써서 자신의 패턴 만들기

다양한 자료를 써서 창의적으로 기본 규칙이나 기본 단위를 만들고 다양한 방법으로 자신의 수학적 패턴을 만들어 본다. 패턴을 만들 수 있는 자료는 수 없이 많이 있으며, 상품화된 패턴 활동 자료들도 소개되고 있다.

<예1> 탱그램을 이용하여 자신의 패턴 만들어 보세요.

<예2> 친구들과 어울려서 몸의 움직임으로 패턴 만들어 보세요.

<예3> 벽지, 포장지 등의 그림을 오려 내어 패턴을 꾸며 보세요.

3.3 컴퓨터를 이용하여 자신의 패턴 만들기

컴퓨터의 복사 기능을 이용하거나 계산 기능을 이용하여 편리하게 기하 패턴이나 수 패턴을 만들어 본다.

<예1> 컴퓨터의 로고 프로그램을 이용하여 여러 가지 다각형으로 패턴을 만들어 보세요.

<예2> 스프레드쉬트를 이용하여 수 패턴을 만들어 보시오.

4. 패턴을 수학적으로 설명하기

주어진 패턴이나 자신이 직접 만든 패턴을 수학적으로 설명하는 기회를 통하여 패턴에 대한 이해를 심화하고 관련성을 파악한다.

4.1 패턴을 만드는 설명서 만들기

패턴을 만드는 방법 또는 구조 등에 대하여 누구나 읽어보면 어떤 패턴인지 알 수 있도록 하는 설명서를 만들어 본다.

<예1> 주어진 그림을 보고 어떻게 패턴을 만들 수 있는지 설명서를 만들어서 주어진 그림을 보지 않은 친구에게 읽도록 해 보세요. 여러분이 만든 설명서를 읽고 그림을 보지 않은 친구가 어떤 그림인지 알 수 있게 자세히 설명해야 합니다.

4.2 패턴을 그림, 도표, 기호, 식 등으로 표현해 보기

패턴을 일반화하여 수학의 여러 가지 방법으로 나타내어 본다.

<예1> 다음의 표에서 3으로 나눈 나머지가 같은 수끼리 같은 색으로 나타내어보세요.

<예2> 다음 수의 관계를 식으로 나타내어 보세요.

4.3 패턴에 대한 보고서 쓰기

패턴을 보고 패턴에서의 기본 단위, 생성 규칙, 패턴을 만드는 자료, 비슷한 유형의 패턴을 볼 수 있는 예 등의 패턴에 대한 보고서를 써 본다.

<예1> 다음을 보고 수들간에 어떤 관계가 있는지 보고서를 써 보세요.

<예2> 다음 작품에는 어떤 수학적인 패턴이 있는지 보고서를 써 보세요.

V. 요약 및 결론

A. 요약

본 연구는 첫째로는 수학교육에서 패턴이 강조되는 이론적 근거를 찾고자 역사적 맥락에서 수학의 성격변화를 탐색하였다. 수학의 성격 변화를 통하여 수학은 수의 탐구, 기하의 탐구, 운동·변화·공간의 탐구, 수학 연구의 도구에 대한 탐구로 그 영역을 점차 확대하여 왔으며, '수학은 패턴의 과학이다'라는 정의는 수학이 폭넓어짐에 따라 수학이 무엇인가에 대한 수학의 본성에 접근하는 논의라고 할 수 있다. 이러한 수학에 대한 새로운 관점은 수학교육의 새로운 방향 모색에 시사하는 바를 살펴보고, 특히 수학교실의 변화에 따른 패턴의 강조를 살펴보았다.

둘째로는 수학적 패턴을 밝힘과 동시에 수학교육에서 수학적 패턴 분석의 틀을 마련하고자 수학적 패턴의 유형화를 시도하였다. 패턴의 속성에 따른 유형화와 패턴의 생성 방식에 따른 유형화를 통하여 수학적 패턴의 유형을 마련하였다. 초등학교 수학에서 다루어지는 패턴은 어떠한 것인가를 현행 4학년 수학교과서 및 익힘책에 제한하여 유형화한 틀로서 조사 분석하였다.

셋째로는 수학적 패턴에 관한 지도 방안의 모색으로서, 지도의 기본 방향을 설정하고 수학적 패턴에 관한 교수 전략을 마련하였다. 교수 전략은 크게 패턴에서의 규칙찾기, 패턴을 변형·확장하기, 자신의 새로운 패턴 만들기, 패턴을 수학적으로 설명하기로 나누고, 각각에 3-4개의 세부 전략과 세부 전략에 따른 예를 제시하였다.

B. 결론 및 제언

초등학교에서의 수학은 다수의 학생들에게 단지 계산이며 공식 암기라는 즐겁지 않은 인상을 지녀왔다. 그러나 '수학이 패턴의 과학이다'라는 정의는 지금까지 수학의 전부로 받아들여졌던 것들이 수학이라는 학문의 일부이며, 새로운 시각에서 수학을 보아야 할 때임을 시사하는 것이다. 수학에 대한 새로운 관점은 폭넓어진 수학에서 핵심이 되는 수학적 패턴 및 수학 교과에 대한 심도있는 이해가 필요함을 부각시키고 있다.

이러한 수학에 대한 관점의 변화는 수학교육에서 수학 교과에 대한 새로운 이해와 수학 교실이 변화를 촉구하고 있는 것이다. 교실의 변화라는 것은 공학의 도입이나 자료의 확충을 말한다기 보다는 수학을 대하는 교사와 학생의 사고의 변화를 말한다. 이러한 변화를 위해서는 수학 교사에게 수학과 수업에 대한 아이디어를 제공하여 교수력을 보강해야만 한다. 본 연구자는 교수력의 보강이 학생의 이해를 가져오는 최선의 지름길이라고 생각하여, 여러 가지 수학적 패턴을 보임과 동시에 교수 전략을 구체화하여 수학 교사에게 수업 내용 및 방법면에서 수업 아이디어를 제공하고자 하였다. 본 연구를 통하여 초등학교 수학 교육에서 수학의 핵심인 패턴에 관심을 갖게 되고, 학생들은 수학적 패턴에 대한 기본 경험의 기회가 제공되기를 기대한다. 이를 통하여 학생들이 수학적 아이디어를 개발하고 수학에 대한 자신감과 수학적 아름다움을 경험하여 수학 교과에 대한 긍정적인 생각을 갖는 데 있어서 도움이 될 것이다.

본 연구에서는 수학적 패턴이라고 할 수 있는 것들을 유형화하여 수학적 패턴이 무엇인가에 대한 답을 구하고자 하였으나, 수학적 패턴이 무엇인가라는 질문은 여전히 남아있는 물음이다. 수학적 패턴을 정의하는 것은 수학의 본질을 밝히는 것이며, 이에 대하여 본 연구자는 분명한 한 마디의 답을 밝혀주지 못하며, 초등

학교에서 다루거나 다루어질 수 있는 패턴을 모아서 분류하는 것으로 대신하고 있다.

이러한 수학의 본성을 패턴에 집중하여 밝히려는 새로운 시각에 대한 논의들이 계속 발표되고 있으며(Steen, 1988; Steen, 1990; Stewart, 1995), 본 연구는 우리 나라 수학 교육에서 본격적으로 수학적 패턴 지도에 관한 논의를 여는 시작이라는 점에 의의를 두고자 한다. 본 연구에서는 수학적 패턴의 유형화를 통하여 초등학교에서 다룰 수 있는 수학적 패턴의 틀을 마련하였다. 수학적 패턴에 관한 후속 연구를 통하여, 수학 교과에 대한 이해가 심화되고 수학적 패턴에 관한 수학 수업의 아이디어 및 학년간 계열성 등에 대해서도 계속 논의되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

교육부 (1996). 《수학 4-1》 충남 연기: 국정교과서주식회사.

______ (1996). 《수학 4-2》 충남 연기: 국정교과서주식회사.

______ (1996). 《수학 익힘책 4-1》 충남 연기: 국정교과서주식회사.

______ (1996). 《수학 익힘책 4-2》 충남 연기: 국정교과서주식회사.

______ (1996). 《교사용 지도서 수학 4-1》 충남 연기: 국정교과서주식회사.

______ (1996). 《교사용 지도서 수학 4-2》 충남 연기: 국정교과서주식회사.

김순덕 (1994). 《중등수학교육에서 프랙탈에 대한 연구》 석사학위논문. 충북 청원: 한국교원대학교

Armstrong, B. E. (1995). Implementing the Professional Standards for Teaching Mathematics: Teaching Patterns, Relationships, and Multiplication as Worthwhile Mathematical Tasks. *Teaching Children Mathematics* **1**(7), 446-450.

Bradley, C. (1993). Making a Navajo Blanket Design with Logo. *Arithmetic Teacher* **40**(9), 520-523.

Caldwell, J. M. (1995). Communicating about Fractions with Pattern Blocks. *Teaching Children Mathematics* 2(3), 156-161.

Devlin, K. J. (1994). *Mathematics, the Science of Patterns: the Search for Order in Life Mind, and the Universe*. New York, NY: Scientific American Library. [허민 · 오혜영 (역) (1996). 《수학: 양식의 과학》 서울: 경문사.]

Dolan, D. T. & Williamson, J. (1983). *Teaching Problem-Solving Strategies*. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Erine, K. T. (1995). Mathematics and Quilting. In P. A. House & A. F. Coxford (Eds.), *Connecting Mathematics Across the Curriculum, 1995 Yearbook* (pp. 170-176). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Evan, R. (1990). Tessellations. In Judith M. Trowell (Ed.). *NCTM Projects to enrich school mathematics: Level 1* (pp. 103-112). National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Geer, C. P. (1992). Exploring Pattern, Relations, and Functions. *Arithmetic Teacher* **39**(9), 19-21.

Grassl, R. (1996). Counting Tile Patterns. *Mathematics Teacher* **89**(1), 8-10.

Howden, H. (1989), Implementing the Standards: Patterns from Transformations. *Arithemetic Teacher* **36**(7), 18-24.

Ives, R. (1994). Tiling Generators. *Mathematics Teaching* **147**

Jones, D. & Thumpston, G. (1993). The Story of Algebra. *Child Education* **70**(2), 44-45.

Kutz, R. E. (1991). *Teaching Elementary Mathematics*. Allyn and Bacon, A Division of Simon & Schuster, Inc.

MSEB(Mathematical Science Education Board, National Research Council) (1989). *Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education.* Washington, D.C.: National Academey of Science. [구광조 · 강완 (역), 《모두가 중요하다》 서울: 한국수학교육학회]

________ (1990). *Perspectives on School: Reshaping School Mathematics, A Philosophy and Framework for Curriculum.* Washington, D.C.: National Academy of Science. [구광조 · 강완 (역), 《학교 수학의 재구성》 서울: 한국수학교육학회]

Miller, M. & Lee, M. (1995). *Investigating with Pattern Blocks.* Cuisenaire Company of America, Inc.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc. [구광조 · 오병승 · 류희찬 (역) (1992). 《수학교육과정과 평가의 새로운 방향》 서울: 경문사.]

________ (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

________ (1993a). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Addenda Series, Grades K-6, Number Sense and Operations.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

________ (1993b). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Addenda Series, Grades K-6, Geometry and spatial senses.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

________ (1993c). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Addenda Series, Grades K-6, Patterns.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

________ (1993d). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Addenda Series, Grades K-6, Making Sense of Data.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

________ (1993e). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Addenda Series, Grades 5-8, Patterns and Functions.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

________ (1995). *Assessment Standards for School Mathematics* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Norman, F. A. (1991). Figurate Numbers in the classroom. *Arithmetic Teacher*, **38**(7), 42-45.

Schroeder, T. L. & Lester Jr., Frank K (1989). Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In R. T. Paul & P. S. Albert (Eds.). *New Directions for Elementary School Mathematics: 1986 Yearbook* (pp. 31-42). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Smith, J. (1995). Threading Mathematics into Social Studies. *Teaching Children Mathematics*, **2**(3), 438-444.

Steen, L. A. (1988). The Science of patterns. *Science* 240, 611-616.

________ (1990). *On the Shoulders of Giants; New Approaches to Numeracy.* Washington D.C.: National Academy of Sciences.

Stewart, Ian (1995). *Nature's Numbers*. New

York, NY: Brockman, Inc. [김동광 외 (역) (1996). 《자연의 수학적 본성》 서울: 두산동아 주식회사.]

Zaslavsky, Claudia (1979). *Africa Counts: Number and Pattern in African Culture.* Lawerence Hill & Co. Publishers.

________ (1990). Symmetry in American: Folk Art. *Arithmetic Teacher* **38**(1), 6-12.