韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
1997. 7. 제 1권, 제 1호, 45-58.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics

초등학교 6학년 학생들의 분수와 소수연산에 나타나는 오류 유형 분석

권 오 남 (이화여대 수학교육과)
김 진 숙 (이화여대 초등교육과 박사과정)
이 경 아 (인천 부평초등학교)

I. 서 론

초등학교 아동은 교육과정을 이수하면서 수 영역에서 자연수, 정수, 그리고 양의 유리수까지 학습하게 되어 있다(교육부, 1992). 초등학교에서의 유리수는 분수·소수를 의미하는 소박한 의미의 유리수를 의미한다. 여기서 유리수는 자연수와 정수를 포괄하는 수체계적 의미로서 포함관계가 강조되지는 않는다.

그런데 초등학교에서의 분수, 소수 학습이 중요한 것은, 그것이 수체계적인 유리수의 한 형태로서 중학교 이후 수학 학습의 기초이기 때문만은 아니다. 분수와 소수라는 유리수의 표현은 일상 생활에서 널리 사용되는 기초 지식이기도 하다. 예컨대, 부분-전체, 비율로서의 분수 개념이 분수의 기원이기도 하고, 현재에도 "---의 반이다", "삼분의 일밖에 안돼." 등 생활언어에 사용되고 있으며, 소수는 보다 구체적으로 화폐의 환율, 증권시장의 주가 지수, 시장에서의 전자 저울, 온도의 표현 등에서 자연수 만큼이나 친숙하게 사용되고 있다.

그러나 유리수 학습은 외국에서나(Carpenter, 1981; Behr, 1983) 우리 나라에서나(KEDI, 1988) 학생들이 낮은 성취도를 보이는 부분이고, 교사들도 지도에 어려움을 보이고 있다. 실제 교육과정 개정시의 의견 조사에서 많은 교사들은 초등학교 수학교육과정에서 빠져야 할 부분이 유리수 혼합 계산이라고 지적하기도 하였다(KEDI, 1986).

초등학교 학생들이 유리수 학습에서 특별히 어려움을 보이는 것은 무엇에 의해 설명될 수 있을 것인가? 유리수가 수학의 여러 영역 중 아무리 잘 가르쳐도 잘 배울 수 없는 어려운 영역일 수도 있다. 가령 수학이라는 과목이 사회나 도덕 과목보다 성취도가 떨어지는 것과 같은 이치다. 그러나 많은 수학교육자들은 유리수의 복잡한 성격에 걸맞는 교수학습이 이루어지지 않은 점을 지적한다.

우리 나라 초등학교에서 분수는 2학년에, 소수는 3학년에 소개된다. 학생들은 자연수를 학습한 후에 곧 이어 유리수를 학습하게 된다. 유리수는 자연수와는 여러 가지 면에서 이를테면 모양이 다르고, 계산 방법이 다르다. 그러나 유리수를 학습하기 전까지 그들은 유리수에 대한 별다른 경험을 하지 못한 채, 유리수를 학습하게 된다. 그런 까닭에 대부분의 학생들에게 유리수는 낯선 것으로 다가온다. 그러므로 자연수에 대한 아동의 친밀감과 비슷한 정도로 유리수에 대한 사전 경험을 제공하지 않고, 곧바로 알고리즘(algorithm) 위주의 계산으로 유리수 교수 학습이 진행된다면 초등학교 학생들은 유리수 개념과 연산에서 자연수와 유리수를 혼동하며 낮은 성취도를 보이게 될 것이다(Mack, 1995).

유리수 문제에서 낮은 성취를 보이는 학생들의 해답은 그들의 개념적 혼돈 상태를 그대로 보여 주는 하나의 지표라고 할 수 있다. 따라서 유리수 문제해결에서 오답을 한 학생들이 보이는 오류를 유형화하여 분석하는 작업은 유리수

교수학습의 문제점을 역설적으로 드러내 보일 수 있다. 최근 유리수 오류에 관한 연구 결과는, 학생들이 나름대로 규칙적으로 오류를 범하고 있으며, 이러한 오류는 부정적인 것만은 아니라고 보고하고 있다. 수학적인 이해가 단번에 되는 것이 아니라 점진적으로 되는 것이므로 비록 불완전하고 오류적(erratic)이지만, 아동의 오류는 수학적 이해를 구성해 가는 과정이며, 이 오류에 대한 정확한 파악과 그에 맞는 교수학습이 요구된다는 것이다(Hiebert, 1991).

오류 유형 분석은 교육과정에 있어 요구사정(need assessment)으로서 학생에 대한 이해의 필요성에서 요구된다. 유리수의 사칙연산과 같은 정형화된 기능이 언제 도입되어야 하고 언제 도입되어서는 안되는지를 결정하고 그와 아울러 전통적인 방법보다 효과적인 수업 전략을 위한 새로운 방법을 모색하는 것이 교육과정 개발에 필요한 것이다(MSEB, 1990). 어떤 오류 유형이 많은가에 따라 이러한 오류의 교정에 맞는 개념제시방법, 예컨대 연속적인 모형과 단속적인 모형의 비중 등 교과서 내용의 표현(representation)을 재구성할 수 있다. 또한 기존 오류 유형에 포함되지 않는 것이 있거나 오류 유형의 순위가 다른지를 알아보고 새로운 유형화를 시도할 필요가 있다.

본 연구는 초등학교에서 유리수 학습을 거의 마친 6학년 학생들이 유리수 연산에서 보이는 오류는 어떻게 유형화되며, 어떤 특성을 보이는가를 분석하는 것이 목적이며 다음과 같은 연구 문제하에 수행되었다.

첫째, 분수와 소수계산의 오류 유형은 어떻게 범주화할 수 있는가?

둘째, 분수와 소수 계산 문제에 따른 오답율은 어떠한가?

셋째, 분수와 소수 계산 문제에 따른 오류 유형의 빈도는 어떠한가?

II. 이론적 배경

1. 오류 유형 분석

교수학습 장면에서의 오류를 비롯한 모든 인간의 오류에는 원인이 있다. 그런데 수학, 특히 초등학교의 초보적 수학에서의 오류는 단순한 실수(slips, mistakes)와 체계적 오류(systematic errors)로 구분된다. 체계적 오류란 잘못된 방법, 알고리듬, 규칙의 적용에서 나온 것이다. 단순 실수는 비체계적이고 '부주의한' 오류 예컨대, 7-3=5와 같은 오류를 말한다. 달리 말하면 체계적 오류는 버그(bugs)라고 하는 불완전한 지식(flawed knowledge)에서 온 것이고, 단순 실수는 모든 사물에 있을 수 있는 실수("random noise")를 말한다(VanLehn, 1990).

유리수 학습에서 오류를 분석한다는 것은 체계적 오류에 대한 관심을 말해준다. 수학에는 오직 정답이 하나 있으며, 그 정답은 직관적으로 단번에 이루어지는 것이라는 신화에 대하여 반대되는 견해를 가지게 된다면 학생들의 문제해결에서의 오류에 관심을 갖게 된다. 오류에 대한 관심은 아동이 수학적 지식을 구성해 가는 주체라는 것과, 수학적 지식이 개념적 지식과 절차적 지식으로 구별되고 양자가 모두 필요한 것임을 전제로 한다.

아동의 수학적 지식이 구성적(constructive)이라는 것은 지식 습득의 생성적이고 과정적인 측면을 말해 주면서 동시에 아동이 빈 도화지와 같은 존재로 가르치는 대로 똑같이 지식을 받아들일 준비가 되어 있는 존재가 아님을 일깨워 준다. 아동들은 잘 발달한 비형식적 수학체계를 포함해서 그들 주변 세계에 대한 풍부한 지식을 지니고 학교에 들어온다. 이런 아동들을 백지 또는 빈 그릇으로 취급하고 그들이 상당한 양의 수학적 지식을 가지고 있다는 사실을 무시했을 때 교육은 실패한다(MSEB, 1990). 아동이 보이는 오류는 꼭 정답에 반대되는 잘못된 것만이 아니라, 통제 장치(control signal)로서 아동이 학습해나가는 데 있어 자신이 가지고 있는 지식과 교수학습되는 지식을

조정하는, 구성적인 역할을 하는 것이 된다 (Senders, 1991).

또한 수학적 지식은 개념적 지식과 절차적 지식으로 구성된다. 개념적 지식이란 관계에서 나타나는 지식이며, 정보와 지식이 서로 연관되어 있어 거미줄에 비유된다. 절차적 지식이란 수행규칙, 절차, 산술로 이루어진다. 특별한 종류의 문제에 정확한 답을 만들어 내는 순차적 처방을 말한다(NCTM, 1990). 이러한 분류에 따르면, 전통적으로 수학교육에서 강조된 것은 절차적 지식이라고 할 수 있다. 개념적 지식이 충분히 형성되지 않는다면 아동의 절차적 지식은 여러 가지 적용과 문제 해결상황에서 한계를 드러낼 수 밖에 없을 것이다. 유리수 학습에 있어서의 오류는 절차적 지식과 함께 유리수에 대한 개념적 지식에서의 오류를 드러낸다.

2. 유리수 구성 이론

유리수 문제해결에서 오류 분석을 통해 유리수에 대한 개념적 지식이 잘못되었음을 보이려면 유리수가 어떻게 구성된 수체계인지를 분석하는 것이 필요하다.

수학교육적으로 볼 때, 유리수 개념은 다차원적인 종합 개념으로, 매우 다양한 특성을 가지고 있다. Behr 등(1983)은 유리수 개념에 대한 연구자들의 연구 결과를 다음과 같이 언급하고 있다. 우선 Kieren(1976)은 유리수를 분수, 소수, 분수의 동치류 p/q (p, q는 정수, q≠0)형태의 수로 보고, 유리수 개념의 이해는 이러한 구성 요소의 합일점을 이해하는데 좌우된다고 언급한 바 있으며, Nesher(1985)는 유리수를 전체-부분 관계로서의 유리수, 두 수를 나눈 결과로서 유리수, 비(ratio)로서의 유리수, 연산자(operator)로서의 유리수, 확률로서의 유리수로 분석했다. 최근에 Kieren(1987)은 측도(測度), 몫, 비, 복합 연산자의 네 가지 하부 요소로 이루어진 유리수 개념을 소개한 바 있다.

Freudenthal(1983) 역시 수학교육적 관점에서, 분수를 유리수 개념의 현상학적(現象學的) 차원으로 보고, 다음 네 측면에서 설명하고 있다. 첫째, 손이나 저울로 측정하기, 접어보기와 같은 구체적인 양(量)을 비교하는 측면으로서의 분수로 설명하고 둘째, 이를테면 색칠하기, 자르기, 나누어보기, 쪼개기 같은 구체적인 양 전체를 등분(等分)하는 측면에서의 분수로 설명하고 셋째, 서로 다른 전체에 대한 부분의 비교라든지 1보다 큰 분수를 포함하는 확장된 개념으로의 분수로 설명하고 넷째, 연산자로서의 분수로 설명하고 있다(Behr et al., 1992). 유리수를 구성하는 요소들의 의미를 정리하면 다음 <표 1>과 같다.

<표 1> 유리수의 구성

연구자	x/y의 의미
Kieren(1976, 1987)	몫, 비, 연산자(operator), 측정
Freudenthal(1983)	분할자(fracturer), 동등한 부분으로 이루어진 전체, 비교자(comparer), 연산자
Ohlsson(Behr, 1992)	quotient function, 유리수, binary vector, 특별한 composite function
Rational Number Project (Behr, 1983)	몫, 비율(ratio), 비(rate), 연산자, 측정, 소수, 직선 좌표
교 육 부(1992)	전체-부분, 몫, 비율, 유리수

III. 연구 방법

본 연구는 초등학교 교육과정을 참조하여 직접 제작한 주관식 분수, 소수 검사 도구로 초등학교 6학년 학생들에게 예비검사와 본 검사를 실시하였다. 예비검사는 인천 광역시에 소재한 B 초등학교 6학년 학생 2학급 114명을 대상으로 1996년 9월 9일에 실시하였다. 문제지는 분수 20문항 소수 20문항을 A, B 두 유형으로 나누어, 각 문제 유형당 각각 50명, 54명의 학생에게 40분 동안 풀게 하였다. 학생들이 보이는 오류 과정을 분석하기 위해 계산 과정은 지우지 않도록 하였다. 예비검사 결과를 바탕으로 분수 소수 오류 유형을 새롭게 범주화하였다.

예비 검사 실시 결과를 바탕으로 본 검사에서는 분수와 소수에 관한 20문항을 추출하였다. 이때 지나치게 복잡한 계산으로 인해 실수를 유발하거나 문제를 풀려고 시도하려는 노력을 저하시키는 문항은 가급적 삼가하도록 하였다. 시험시간은 40 분을 기준으로 하였다. 본 검사는 1996년 10월14일 - 17일에 인천광역시에 소재한 초등학교 6학년 학생 191명(B 초등학교 2학급 99명, M 초등학교 1학급 42명, P 초등학교 1학급 50명)에게 실시하였다.

IV. 연구 결과

첫째, 분수 계산에서 보이는 오류의 유형은 대분수 변환 오류, 가분수 변환 오류, 통분 오류, 약분 오류, 역수 오류, 분수 구성 오류, 덧셈 오류, 계산 순서 오류, 기술적 오류, 자연수 계산 오류의 9가지 유형으로 분류하였다. 소수 계산에서 보이는 오류의 유형은 분수 변환 오류, 분수 계산 오류, 자연수 지배 오류, 자릿값 오류, 소수점 오류, 계산 순서 오류, 기술적 오류, 자연수 계산 오류의 8가지 유형으로 분류하였다.

분수의 오류유형을 기존 연구에서의 오류 유

<표 2> 분수 계산에서 나타나는 오류 유형

연 구 자	오 류 유 형
제 4차 NAEP(1981)	* 분수의 의미 (분자와 분모를 따로 떼어 서로 다른 값의 의미를 지닌 것으로 생각) * 대분수를 가분수로 고치기 * 이분모 분수 계산에서 통분 과정
Behr 등(1984)	* 동치 분수(equivalence of fraction)에서의 오류: 1/3 = x/6 에서 승법적 추론보다 가법적 추론으로 x=4를 얻음.
Payne(1975)	분수이해에서의 곤란을 유형화함 *동치분수, *분모와 분자의 혼동, *분자가 1이상인 분수, *나눗셈으로서의 분수, *집합모델사용, *수직선사용
박성택 외 7인(1988)	*분수덧셈오류9가지, *분수뺄셈오류11가지, *분수곱셈오류 9가지, *분수나눗셈오류 6가지
조 병 윤	* 연산의 기본 원리, 대분수 처리, 약분 처리, 통분과정
본 연구	대분수변환오류,가분수변환오류,통분오류,약분오류,역수오류,덧셈오류,분수구성오류,계산순서오류,기술적 오류

형과 비교하면 다음 <표 2>와 같다.

<표 2>에서 나타난 바와 같이 기존 연구들은 오류 유형의 분류 기준을 모두 달리 하고 있으며 오류 유형의 명칭에 대한 합의가 되지 않았다. 본 연구에서는 학생들의 현상적 오류 즉 오류가 발생하는 문제 풀이 장면에 주목하여 오류를 유형화하고 각 유형에 명칭을 붙였다. 각 유형별 학생들의 오류는 다음과 같다.

1) 대분수 변환 오류

가분수를 대분수의 꼴로 고칠 때 발생하는 오류를 말한다.

① 가분수의 분자의 크기가 클 때 대분수의 자연수를 제대로 구하지 못하는 경우

가분수의 분자를 분모로 나누어 몫과 나머지를 구하는데서 문제가 발생한다.

$$\frac{136}{12}=4\frac{11}{12},\ 13,\ \frac{132}{5}=25\frac{2}{5},$$
$$60\frac{2}{5},\ \frac{84}{4}=20\frac{4}{4}$$

② 가분수의 분자를 분모로 제대로 나누어 몫은 바르게 구했으나, 나머지를 제대로 구하지 못해 진분수가 옳지 못하게 되는 경우

$$\frac{16}{11}=1\frac{6}{11}$$

③ 가분수의 분자가 대분수의 자연수가 되고 가분수를 뒤집은 분수가 나머지 진분수가 되는 경우

$$\frac{3}{1}=3\frac{1}{3}$$

2) 가분수 변환 오류

대분수를 가분수꼴로 바꾸는데서 생기는 오류를 말한다. 현행 교육과정에서는 먼저 가분수를 대분수로 고치는 방법을 학습하고 그 다음 반대의 알고리즘을 사용해 대분수를 가분수로 고치도록 한다.

① 자연수 부분과 분모를 곱한 것이 가분수의 분자가 되는 경우

$$3\frac{1}{4}=\frac{1}{12},\ 2\frac{1}{2}=\frac{5}{4},\ 3\frac{3}{5}=\frac{18}{15},\ 2\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

② 분모와 분자를 곱한 값이 가분수의 분자가 되거나 분모와 분자를 곱한 값이 가분수의 분모가 되는 경우

$$1\frac{5}{12}=\frac{60}{12},\ 1\frac{5}{6}=\frac{6}{30}$$

③ 분모는 그대로 두고 나온 수 모두를 곱으로 가분수의 분자를 구하는 경우

$$2\frac{2}{3}=\frac{12}{3}$$

④ 규칙없이 제대로 이해하지 못하고 쓰는 경우

$$2\frac{2}{9}=\frac{21}{9},\ \frac{11}{9},\ \frac{14}{9},\ \frac{21}{9},\ 2\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{6}$$

3) 통분 오류

분모가 다른 분수의 덧, 뺄셈을 할 때 분모를 같게 하는 데서 생기는 오류이다.

① 통분하기 위해 분모끼리의 최소공배수를 찾을 때, 큰 분모와 같게 하기 위해 나머지 작은 분모에 수를 더해서 찾는 경우

$$\frac{43}{8}+\frac{1}{2}=\frac{43}{8}+\frac{1+6}{2+6}=\frac{43}{8}+\frac{7}{8}=\frac{50}{8}$$

$$1\frac{2}{3}-1\frac{1}{2}=\frac{8}{3}-\frac{5+1}{2+1}=\frac{8}{3}-\frac{6}{3}=\frac{2}{3}$$

② 공통 분모를 찾아 분모는 서로 같게 고쳤으나 분자는 그대로 쓰는 경우

$$3\frac{1}{4}-2\frac{1}{5}=\frac{13}{4}-\frac{11}{5}=\frac{13}{20}-\frac{11}{20}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$$

③ 공통 분모를 찾아 분모는 서로 같게 고쳤으나 각 분자에는 서로 엇갈려 곱하는 경우

$$1\frac{2}{3}-1\frac{1}{2}=\frac{8}{3}-\frac{5}{2}=\frac{8\times3}{3\times2}-\frac{5\times2}{2\times3}$$
$$=\frac{24}{6}-\frac{10}{6}=\frac{14}{6}$$

④ 필요없이 통분을 하는 경우

$$2\frac{1}{6}\times3\frac{3}{5}\times8=\frac{13}{6}\times\frac{18}{5}\times\frac{40}{5}$$

$$2\frac{2}{3}\div1\frac{5}{6}=\frac{8}{6}\div1\frac{5}{6}$$

특히, 자연수가 포함된 계산의 경우 필요없이 통분하려는 경우가 강하다.

$$5\frac{3}{8}+2=5\frac{3}{8}+\frac{1}{2},\ 5\frac{3}{8}+\frac{8}{8},\ 5\frac{3}{8}+\frac{4}{4},$$
$$12\div\frac{4}{7}=\frac{8}{7}\div\frac{4}{7}$$

4) 약분 오류

분수를 곱할 때, 약분하여 곱한 다음 약분하거나, 곱을 구하는 과정에서 바로 약분하는 방법이 있다. 대부분의 계산 과정에서 곱을 구하는 과정에서 약분한다. 약분이란, 분모와 분자를 그들의 공약수로 나누어 보다 간단한 분수로 만드는 것이다. 이 과정에서의 오류이다.

① 분모끼리 약분하는 경우와 분자끼리 약분하는 경우로 나눗셈에서 많이 발생한다.

$$11\frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{7}\div\frac{4}{\underset{1}{\cancel{7}}},\ \frac{\overset{1}{\cancel{6}}}{13}\div\frac{5}{\underset{3}{\cancel{18}}},\ \overset{3}{\cancel{12}}\times\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{7}$$

② 대분수의 자연수와 진분수 부분을 약분하는 경우

$$\overset{1}{\cancel{2}}\frac{1}{\underset{3}{\cancel{6}}}\times3\frac{3}{5}\times8$$

③ 서로 다른 배수로 약분을 하거나, 아예 규칙없이 약분하는 경우

$$\frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{1}\times\frac{17}{\underset{3}{\cancel{12}}},\ \frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{\underset{5}{\cancel{10}}}\times\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{7}$$

④ 분수 덧, 뺄셈에서 분모-분자, 분모-분모, 분자-분자끼리 약분하는 경우

$$\frac{43}{\underset{4}{\cancel{8}}}+\overset{1}{\cancel{2}},\ \frac{43}{\underset{4}{\cancel{8}}}+\frac{2}{\underset{5}{\cancel{10}}}$$

5) 역수 오류

분수 오류 유형 중 가장 많이 발생하는 유형으로 분수의 나눗셈에서 제수를 반대로 뒤집어 즉, 역수를 곱해 답을 구하게 된다. 이때, 초등학교 5학년 1학기에서는 분수와 소수 단원에서 $2\div3=\frac{2}{3}$로 나타낸 것은 $2\div3$의 몫이 분수 $\frac{2}{3}$라는 의미의 몫의 분수꼴이었다. 하지만, 초등학교 6학년 2학기에서는 $\div3$대신 3의 역수 $\frac{1}{3}$을 곱해서 답을 구하게 된다. 이때 발생하는 오류이다.

① 분수 곱셈에서 역수를 취하는 경우

$$8\times1\frac{5}{12}=\frac{1}{8}\times\frac{17}{12},\ 8\times\frac{17}{12}=8\times\frac{12}{17},$$
$$2\frac{1}{6}\times3\frac{3}{5}\times8=2\frac{1}{6}\times3\frac{3}{5}\times\frac{1}{8}$$

② 역수를 제대로 취하지 못하는 경우

$$8\times1\frac{5}{12}=\frac{8}{10}\times\frac{17}{12}\qquad 12\div\frac{4}{7}=\frac{12}{10}\times\frac{7}{4},$$

$$12\div\frac{4}{7}=\frac{1}{12}\frac{\times4}{7}\qquad 2\frac{2}{3}\div1\frac{5}{6}=\frac{8}{3}\times\frac{11}{6}$$

③ 분수의 덧, 뺄셈에서 역수를 취해 답을 구하는 경우

$$5\frac{3}{8}+2=5\frac{3}{8}+\frac{1}{2},\ 5\frac{3}{8}+\frac{4}{8}$$

6) 덧셈 오류

덧셈 오류란 분수 특히, 이분모 분수의 덧, 뺄셈에서 분자는 분자끼리 분모는 분모끼리 더하거나 빼서 답을 구하거나 분수의 곱에서 곱을 구하지 않고 그대로 더하는 경우를 말한다.

① 분수와 자연수의 계산인 경우

$$5\frac{3}{8}+2=\frac{43}{8}+2=\frac{45}{8}$$

② 이분모 분수의 덧, 뺄셈의 경우

$$\frac{8}{3}-\frac{5}{2}=\frac{3}{1},\ \frac{13}{4}-\frac{11}{5}=\frac{2}{4}$$

③ 분수 곱셈인 경우

$$2\times\frac{5}{3}=\frac{7}{3},\ 2\times\frac{8}{3}=\frac{10}{3}$$

7) 분수 구성 오류

미국 4차 NAEP 자료에 의하면 7학년의 80% 정도가 대분수를 가분수로 고칠 수 있었으나, 반 정도가 $5\frac{1}{4}$이 $5+\frac{1}{4}$임을 인식하지 못할 정도로 분수 구성을 제대로 이해하지 못하고 있다. 분수 구성의 오류는 분수의 의미를 제대로 이해하지 못한 채 자연수 부분은 자연수로만 인식하고 분수와 상호 관련을 짓지 못한 채 분리되어 생각하고 있는 경우이다.

① 분수 덧, 뺄셈의 경우

$$2\frac{4}{6}-2\frac{3}{6}=2\frac{1}{6},\ 2\frac{2}{3}-2\frac{1}{2}=2\frac{1}{1}$$

② 분수 곱, 나눗셈의 경우

$$8\times1\frac{5}{12}=(8\times1)+(\frac{5}{12}+0)=8+\frac{5}{12}=8\frac{5}{12}$$

$$2\frac{1}{6}\times3\frac{3}{5}\times8=(2\times3\times8)+(\frac{1}{6}\times\frac{3}{5})=48\frac{3}{30}$$

8) 계산 순서 오류

혼합산인 경우 +, -, ×, ÷가 섞여 있는 식에서는 ×, ÷를 먼저 계산하고 +, -를 나중에 계산하고 또한, ( )가 포함되어 있을 때는 ( ) 먼저 계산을 한다. 그러나, 이러한 순서를 잘 알지 못하고 왼쪽으로부터 순차적으로 구하는 경우이다.

예를 들어

$(3\frac{1}{4}-2\frac{1}{5})\times2\frac{2}{9}=3\frac{1}{4}-(2\frac{1}{5}\times2\frac{2}{9})$와 같은 경우이다.

9) 기술적 오류

+, - 부호를 잘못 사용하거나, 계산 상의 오류 문제를 잘못 읽었을 경우에 포함되는 오류이다. 이것은 오류(error)라기 보다 실수(slips)

<표 3> 소수 계산에서 나타나는 오류 유형

연 구 자	오 류 유 형
제 4차 NAEP(1981)	* 분수와 소수의 상호 관계 이해 부족 * 곱하기 절차와 소수점 찍기 계산 분리 * 소수 나눗셈 오류
Sackur-Grisvard & Leonard(1985) Resnick 등(1989)	* 자연수규칙오류 * 영(zero)규칙오류 * 분수규칙오류
Hierbert와 Wearn(1988,1989)	오류유형보다는 과제를 유형화하여 과제에 따른 정, 오답율 변화에 관심 과제:* 직접과제(2.3+.62, .5+.3) * 전이과제(소수의 비교, 소수의 분수변환, 분수의 소수변환)
박성택 외(1988)	* 소수덧셈오류4가지, * 소수뺄셈오류5가지, * 소수 곱셈오류3가지, *소수나눗셈오류4가지
본 연구	분수변환오류,분수오류,자연수지배오류,자리값오류,소수점오류,계산순서오류,기술적오류,자연수계산오류

에 해당하는 유형이다.

이상에서 분수계산시의 오류를 살펴 보았다. 다음으로 소수계산에서 나타나는 오류를 유형화하여 기존 연구 결과와 비교한 것은 다음 <표 3>과 같다.

<표 3>에서 제시한 선행 오류 연구를 보면 분수 오류에 비해 오류의 명칭이 보다 구체화한 것을 알 수 있다. 이 중 Sackur-Grisvard 등의 세 가지 분류는 영미권 학생들의 소수 오류의 90% 이상을 설명할 수 있는 것으로 주장되고 있는 것이다. 본 연구에서는 분수 오류와 마찬가지로 학생들의 오류의 현상적 분석에 초점을 맞추어 분류하고 유형별 명칭은 붙였으며, 소수의 각 유형별 학생들의 오류는 다음과 같다.

1) 분수 변환 오류

소수 계산 문제를 풀 때 소수를 분수로 고쳐서 풀거나 혹은 분수로 고쳐 풀어 나온 답을 다시 소수로 고치고자 할 때 발생하는 오류이다. 주어진 소수가 소수점 이하 한자리, 두자리, 세자리에 따라 분모가 10, 100, 1000인 분수로 나타내도록 학습하고 있으나, 이를 제대로 이해하지 못하는 경우 발생한다.

$$486=\frac{486}{10},\ 5.16=\frac{516}{10},\ 0.025=\frac{25}{10},\ \frac{25}{100}$$

$$0.01368=\frac{1368}{1000000}$$

또한 분수를 소수로 나타내는 경우는 분모를 10, 100, 1000, ····의 꼴로 고쳐 소수로 나타내는 경우로 $\frac{9}{125}$와 같은 경우 분모를 1000으로 고쳐 계산하고 분자 역시 125에 곱한 값만큼을 곱해주어야 하나 그렇지 않고 $\frac{9}{1000}$와 같은 오류를 범한다.

2) 분수 계산 오류

소수 계산 문제를 풀 때 소수를 분수로 고쳐 풀게 되는데, 이때 앞서 설명한 것과 같은 분수 오류 형태가 발생하는 경우이다.

3) 자연수 지배 오류

자연수와 소수는 읽는 방법이 다르고, 소수점에서 멀어질수록 자연수의 값은 커지나 소수의 값은 작아진다. 소수의 0 이 가장 오른쪽 끝에 위치한 경우는 전체값에 영향을 미치지 않으며, 읽는 자리수의 명칭도 "일의 자리, 십의 자리, 백의 자리, ···"인 반면, "소수 첫째자리, 소수 둘째자리, ····"와 같이 서로 다르다. 그럼에도 불구하고 자연수와 소수는 ① 왼쪽에서 오른쪽으로 갈수록 자리값이 감소한다. ② 왼쪽에 위치한 수는 오른쪽에 위치한 수의 10배이다. ③ 0은 자리값이 있다와 같은 유사점을 가지기 때문에 혼란을 일으키는 경우가 있다(Resnick 등, 1989). 이러한 오류의 경우는 소수의 기본적 자리값이나 크기 등의 기본적 개념을 제대로 이해하지 못하는 경우에 발생한다.

① 자연수의 꼴로 고쳐 계산하는 경우

가장 많은 자연수지배의 규칙이 발생한 예로는 101 - 85.132 + 9.64인 경우로 101 - 85.132 + 9.64를 모두 자연수로 고쳐 85132 - 101 + 964 또는 10100 - 85132 + 964로 고쳐 계산한 경우이다. 또한 곱셈이나 나눗셈의 경우에서도 모두 자연수로 고쳐 계산하였다.

② 소수점은 그대로 두고 오른쪽을 기준으로 정렬해 계산하는 경우로 이때 소수에서의 수는 그 의미가 소수라기보다는 자연수로 받아들여지게 되고 소수점은 무의미하게 된다.

$$\begin{array}{r} 5.003 \\ -14.6 \\ \hline 4.957 \end{array} ,\quad \begin{array}{r} 101 \\ +85.132 \\ \hline 85.233 \end{array}$$

4) 자릿값의 오류

소수 덧, 뺄셈을 하는 경우 편리하게 하기 위해 소수점을 중심으로 줄을 맞추고 그 다음에는 자연수와 똑같은 방법으로 계산을 하고 마지막 답은 줄을 맞춘 소수점을 그대로 표시하

도록 하는 알고리즘을 배우게 된다. 이 오류는 소숫점을 중심으로 줄을 맞추어 쓰지 않고 계산 역시 자릿값에 따라 하지 않은 경우이다.

$$\begin{array}{r} 23.5 \\ +0.\ 7 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 85.132 \\ -\quad 101 \\ \hline \end{array}$$

5) 소수점 오류

이 오류가 자리값 오류와 다른 점은 계산 과정에서 소수점은 잘 맞추었으면서도 계산결과 소수점 찍기에 잘못을 범한 점이다.

① 소수의 덧,뺄셈에서 계산을 올바르게 했으나, 소수점을 찍을 때 곱, 소수점 위치에 의한 방법으로 소수점을 찍는 경우

$$\begin{array}{r} 23.5 \\ -0.7 \\ \hline 24.12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 85.132 \\ +9.64 \\ \hline 0.84772 \end{array}$$

② 곱의 소수점 위치 찍기의 알고리즘이 제대로 학습되지 못한 경우

2.07 × 2.4 = 49.68, 43.4 × 100 = 0.434

③ 소수 나눗셈에서 소수점 위치의 알고리즘이 제대로 학습되지 못한 경우

$$12\,\overline{)\,486}^{\;45} \qquad 12\,\overline{)\,486}^{\;4.05} \qquad 0.19\,\overline{)\,0.01368}^{\;0.00072}$$

NAEP에서 소수 계산의 모든 항목 중 소수 나눗셈이 가장 낮은 성적을 보였던 것과 같이 이 연구에서도 가장 이 항목을 힘들어 했다. 특히, 피제수나 몫에 자리수를 메우기 위해 0이 필요한 나눗셈을 힘들어 했다. Grossnickle (1985, p. 563)은 소수 나눗셈에서 결정적인 오류의 원인은 '나눗셈 절차'가 아니라 소수점 찍기에 있다고 하였다(Bezuk 등, 1983).

6) 계산 순서의 오류

혼합산인 경우 + , - , × , ÷ 이 섞여 있는 식에서 × , ÷ 를 먼저 계산하고 +, -를 나중에 계산하게 된다. 그러나 이의 순서를 무시하고 왼쪽부터 차례로 계산해 가는 경우이다. 또는 + , -를 먼저하고 × , ÷를 나중에 하는 경우도 포함된다.

5.16 × 1.5 + 0.4 ÷ 0.025에서 5.16 ×1.5를 하고 그 다음 0.4를 더한 후 0.025를 나누는 경우가 가장 흔한 오류였다. 또, $\frac{5}{6}\div 0.5+1\frac{2}{9}\times 1.5-\frac{2}{3}$의 경우에서도 이와 마찬가지로 순차적으로 왼쪽에서부터 값을 구해 나갔다.

7) 기술적 오류

+, - 부호를 잘못 사용하거나, 계산 상의 실수, 혹은 수를 잘못 읽는 경우에 해당된다. 즉, 14.6-5.003을 14.6+5.003으로 계산한다거나, 6.2 ×100 처럼 세개 소수곱인데도 불구하고 두개 소수만 곱하거나 0.19인데 0.91로 수를 잘못 읽고 계산하는 경우이다. 이것 역시 오류(error)라기 보다 실수(slips)에 해당하는 유형이다.

8) 자연수 계산의 오류

소수 계산에서는 계산방법이 쓰이는데, 앞서의 제 4 차 NAEP의 자료분석과 같이 자연수에서의 받아내림이나 받아올림의 경우에 있어 보다 소수 받아내림이나 받아올림의 경우를 힘들어 하여 생긴 오류이다. 이것은 자릿값이나 소수점 오류와 달리 자연수의 기초 계산기능의 부족에서와 같은 오류이다.

① 받아올림, 받아내림이 있는 경우

이 경우가 183개의 기초계산 오류중 84개 오류로 가장 많이 차지하였다.

예를 들면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 14.6 \\ -5.003 \\ \hline 11.603 \end{array}, \qquad \begin{array}{r} 5.003 \\ -\ 14.6 \\ \hline 10.403 \end{array},$$

$$\begin{array}{r} 0.7 \\ +23.5 \\ \hline 23.12 \end{array}, \qquad \begin{array}{r} 101 \\ +\ 85.132 \\ \hline 186.868 \end{array}$$

② 곱셈의 경우 특히 0이 포함된 곱셈의 경우

$$\begin{array}{r} 0.07 \\ \times 6.2 \\ \hline 1.034 \end{array} , \quad \begin{array}{r} 2.07 \\ \times 2.4 \\ \hline 814 \\ 414 \\ \hline 1.228 \end{array}$$

③ 나눗셈의 경우

a. ÷기호의 의미를 제대로 파악하지 못한 경우

0.4 ÷ 0.025 → 0.4) 0.025

b. 0 내림이 있는 나눗셈의 경우

$$486 \div 12 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 45 \\ 12\,\overline{)\,486} \end{array}$$

c. 나눗셈을 제대로 이해하지 못한 경우

이상과 같이 분수와 소수의 오류를 구분해 볼 수 있었다. 물론 오류의 원인들 사이에는 서로 일정한 상호작용이 있으므로 오류의 유형을 정확하게 따로 떼어내 분리하는 것은 어렵다.

연구결과 둘째, 분수와 소수 계산에서 오답율을 비교하면 전체적으로 분수보다는 소수의 오답율이 높았다. 물론 문항별 난이도가 다르며, 이는 예비검사 결과 문항의 난이도의 문제보다는 문제가 쉽더라도 오류유형을 잘 보여줄 수 있는 문항을 본 검사에서 선택한 결과이다. 이것을 감안하더라도, 분수 중에서는 덧셈, 뺄셈보다는 곱셈, 나눗셈에서 오답이 발생했으며, 소수에서는 덧셈과 뺄셈의 혼합산, 곱셈과 나눗셈, 덧셈의 혼합산에서 50%이상의 높은 오답율을 보여, 소수 계산의 경우에는 교육과정을 다 배운 후에도 정답을 맞힌 아동보다 틀린 아동이 더 많았다. 각 문항내용과 오답율을 표로 제시하면 다음 <표 4>와 같다.

연구 결과 셋째, 분수와 소수계산의 오류 유형별 빈도를 보면, 가장 많은 유형이 분수의 경우 통분, 약분, 역수의 오류였고, 소수의 경우 자연수계산오류, 소숫점오류, 분수오류였다. 혼합산의 경우에서는 분수오류, 계산순서, 기술적 오류의 순이었다. 이를 도표로 정리한 것은 다음 <표 5>, <표 6>, <표 7>과 같다. 이 표에서 오류 유형 분류에 따른 문항의 오답수와 문항의 정·오답수 비율은 같지 않음을 참고로 밝혀 둔다. 오답의 현상을 오류 유형이 겹쳐서 나타나기도 하고, 오류 유형에 적합한 것만 선택하여 분석한 결과이다

V. 논의

본 연구에서는 오류를 유형화하고, 문제에 따른 오류유형의 빈도를 조사하였다. 외국에서의 연구결과와 비교할 때 유리수 연산의 오답율은 상대적으로 낮다고 할 수 있으나 오류의 패턴은 유사한 양상을 보였다. 분수 계산 오류 유형의 원인은 크기, 동치 관계, 어림 기능 등 개념적 이해 부족과 이로 인한 무의미한 단편적 알고리즘 사용에 의한 것으로 볼 수 있다. 소수 계산 오류 유형의 원인은 분수와 소수 상호 관계의 이해 부족, 분수 개념 이해 부족과 소수 개념 이해 부족으로 볼 수 있다. 특히 자릿값과 소수 계산 원리의 이해 부족으로 소수 계산에서의 받아올림, 받아내림, 곱셈, 나눗셈의 오류가 많았다.

이러한 연구 결과에 따라 오류의 원인을 학생의 측면에서 추정해 보면 유리수 연산 기능과 같은 절차적 지식의 부족과 유리수에 대한 개념적 지식의 부족이 오류발생의 원인이라고 할 수 있다.

교수학습과정의 측면에서 말하자면 첫번째로는 아직 유리수 지식이 부족한 학생들에게 계산의 알고리즘이 성급하게 강조된 것 때문이 아닌가 추정해 볼 수 있다. 두번째로는 유리수 구성이론의 연구결과들(유현주, 1995 등)이 주장하는 바와 같이 부분-전체, 몫, 연산자, 측정과 같은 다양한 유리수 구성요소가 유리수 소개단계에서부터 고려되어야 하지만 교육과정이 이중 어느 하나에 치중하여 유리수 개념을 소개한 결과 학생들의 유리수 개념에 유연성과 통합성이 결여된 것이 아닌가 생각된다. 분수의

<표 4> 각 문항에서의 오답율

번호	문 제	오답자수(명)	오답률
1	$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$	7	3.14%
2	$5\frac{3}{8}+2$	20	5.23%
3	$\frac{5}{7}-\frac{2}{7}$	3	1.57%
4	$2\frac{2}{3}-2\frac{1}{2}$	29	15%
5	$8\times1\frac{5}{12}$	46	24.08%
6	$2\frac{1}{6}\times3\frac{3}{5}\times8$	74	38.74%
7	$2\frac{2}{3}\div1\frac{5}{6}$	29	15.18%
8	$12\div\frac{4}{7}$	31	16.23%
9	$(3\frac{1}{4}-2\frac{1}{5})\times2\frac{2}{9}$	49	25%
10	0.5 + 0.3	6	3.14%
11	0.7 + 23.5	21	10.99%
12	14.6 - 5.003	71	37.17%
13	101 - 85.132 + 9.64	108	56.54%
14	$6.2\times0.07\times100$	56	28.80%
15	2.07×2.4	66	34.55%
16	$486\div12$	65	34.03%
17	$0.01368\div0.19$	81	42.40%
18	$5.16\times1.5+0.4\div0.025$	131	68.59%
19	$\frac{3}{4}\div2.5$	30	15.71%
20	$\frac{5}{6}\div0.5+1\frac{2}{9}\times1.5-\frac{2}{3}$	104	54.45%

<표 5> 분수 계산에서 오류 유형 분류

문항별 오답수 / 오류유형	1	2	3	4	5	6	7	8	9	계	빈도
대분수변환의 오류		1		1	5	4	8	1		20	6.76%
가분수 변환 오류		1		5	4	7	5		8	30	10.14%
통분오류	1	19	1	9	3	3	2	1	8	47	15.88%
약분오류		2			8	25	8	4	7	54	18.24%
역수오류		4			16	21	9	24	1	75	25.34%
덧셈 오류	3	2		11	3				3	22	7.43%
분수구성오류				6	6	2		1	1	16	5.41%
계산순서오류					3				1	4	1.36%
기술적오류					3	18			7	28	9.5%
계	4	29	1	32	51	80	32	31	36	296	
빈 도	1.35%	9.8%	0.34%	10.81%	17.23%	27.03%	10.81%	10.47%	12.16%		

<표 6> 소수 계산에서 오류 유형 분류

문항별 오답수 / 오류유형	10	11	12	13	14	15	16	17	18	계	빈도
분수변환오류	1	8	8	4	3	4	3	7	7	45	7.19%
분수오류		2	5	6	11	21	12	15	36	111	17.73%
자연수 지배오류	3	1	12	19	7	1	6	4	3	52	8.3%
자리값오류		2	4	12		1				19	3.04%
소수점오류		2	2	15	16	15	34	21		105	16.77%
계산순서오류		4		9					41	50	7.99%
기술적오류	2	1	7	28	5	3	2	2	11	61	9.74%
자연수 계산오류		3	32	46	10	23	42	9	18	183	29.23%
계	6	18	70	139	52	48	99	58	116	626	
빈 도	9.58%	2.88%	16.18%	22.2%	8.31%	7.67%	15.81%	9.27%	18.53%		

<표 7> 분수, 소수 혼합산에서 오류 유형 분류

문항별 오답수 / 오류유형	19	20	계	빈도
분수 변환 오류	2		2	1.92%
분수 오류	12	47	59	56.73%
계산순서		23	23	22.12%
기술적오류		19	19	18.27%
정수계산오류		1	1	0.96%
계	14	90	104	
빈 도	13.46%	86.54%		

동치개념 부족, 분수와 소수의 변환에서의 오류가 많았던 것은 특히 이러한 추정을 가능하게 하는 부분이다.

본 연구의 결과는 1개 도시의 6학년 일부 학생들을 대상으로 한 것이라는 점에서 일반화의 한계를 갖는다. 우리 나라 초등학생들이 유리수의 연산에서 나타내는 오류에 관한 연구, 또한 영미권 아동들의 오류와 우리 나라 아동들의 오류간 비교, 기존 연구에서의 오류 유형을 참조하여 본 연구의 오류 유형이 발전적으로 수정되기를 기대한다.

참 고 문 헌

교육부 (1992). 국민학교 교사용 지도서 수학 5-1, 5-2, 6-1, 6-2.

교육부 (1992). 국민학교 교육과정 해설 (I).

교육부 (1996). 초등학교 교사용 지도서 수학 3-1, 3-2, 4-1, 4-2.

김성만 (1994). 분수 계산에서 절차적 지식의 획득을 위한 학습 방법들의 적용 효과 분석, 한국교원대학교 석사학위 논문.

김옥경 · 권성룡 · 류희찬 (1995). 현행 분수 교육의 문제점과 개선책, 대한수학교육학회 논문집, 5(2), 215-225.

김응태 · 박승안 (1985). 현대대수학, 서울: 이우출판사

류희찬 · 신준식 (1995). 실제적 접근 방법을 통한 분수 지도 방법 연구, 대한수학교육학회 논문집, 5(2), 201-212.

박성택 외 (1993). 수학교육, 서울: 동명사.

유현주 (1995). 유리수 개념의 교수현상학적 분석과 학습-지도 방향에 관한 연구, 서울대학교 박사학위 논문.

조병윤 (1992). 분수 계산 오류의 효과적인 교정 지도 방안, 한국교원대학교 석사 학위논문.

KEDI (1986). 제 5차 초중학교 수학과 교육과정 시안연구개발, 서울: 한국교육개발원.

KEDI (1988). 수학과 기초기능에 관한 연구, 서울: 한국교육개발원.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational Number Concepts, In R. Lesh & R. Landau (Eds.), *Aquisition of Mathematics Concets and Process*, New York: Academic Press.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio and Proportion, In P. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York; MacMillan.

Behr, M. J., & Post, T. R. (1988). Teaching Rational Number and Decimal Concepts, In Post, T. R. (Ed.), *Teaching Mathematics in Grades K-8: Research Based Methods*, Boston; Allyn and Bacon.

Bezuk, N. S., & Bieck M. (1983). Current Reaserch on Rational Numbers and Common Fractions: Smmary and Implications for Teachers, In Owens, D. D. (Ed.), *Research Ideas for the Classroom - Middle Grades Mathemarics*, Reston, VA: NCTM.

Bezuk, N. S., & Cramer, K. (1989). Teaching about Fractions: What, When, and How?, In NCTM, *New Directions for Elementary School Mathematics* - 1989 yearbook.

Carpenter T. P., Corbit M. K., Kepner H. S., Lindgist M. M., & Reys R. E., (1981). Decimals: Results and Implications from National Assessment, *Arithmetic Teacher* 28, 34-37.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1988). A Cognitive Approach to Meaningful Mathematics Instruction: Testing a Local Theory Using Decimal Numbers. *Journal For Research in Mathematics Education,* 19(5), 371-384.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1989). Cognitive Changes during Conceptually Based Instruction on Decimal Fractions. *Journal of Educational Psychology,* 81(4), 507-513.

Hiebert, J., Wearne, D., & Taber, S. (1991). Fourth Graders' Gradual Construction of Decimal Fractions during Instruction Using Different Physical Representations. *The Elementary School Journal* 91(4), 321-341.

Hunting, R., & Korbosky, R. K. (1990). Context and Process in Fraction Learning, *International Journal of Mathematic Education & Science Technology* 21(6), 929-948.

Kieren, T. E. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers, In Hiebert, J., & Behr, M. (eds.), Number Concepts and Operations in the Middle Grades, Reston, VA: NCTM.

Kieren, T. E. (1980). Knowing Rational Numbers: Ideas and Symbols, In Lindguist, M. M. (Ed.), *Selected Issues in mathematics Education* (pp. 69-81), Berkeley, CA: McCutchcn.

Kouba V. L., Brown C. A., Carpenter T. P., Lindguist M. M., Silver E.A., & Swafford J. O. (1981). Results of the Fourth NAEP Assessment of Mathematics: Number, Operations, and Word Problems, *Arithmetic Teacher,* 35, April, 14-19.

Mack, N. K. (1990). Learning Fractions with Understanding; Building on Informal knowledge, *Journal for Research in Mathematics Education* 21(1), 16-32.

Mack, N. K. (1995). Confounding Whole-Number and Fraction Concepts When Building on Informal Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education,* 26(5), 422-441.

MSEB (Mathematics Sciences Education Board) (1990). *Reshaping School Mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

NCTM (1990). *Mathematics for the Young Child,* 18-22.

Owens D. T., & Super, D. B. (1983). Teaching and Learning Decimal Fractions, Owens, D. D. (ed)(1983), *Research Ideas for the Classroom—Middle Grades Mathemarics,* Reston, VA: NCTM

Resnick, L. B. (1989). Conceptual Based of Arithmetic Error: the Case of Decimal Fractions, *Journal for Research in Mathematics Education,* 26(1), 8-27.

Senders, J. W., & N. P. Moray (1991). *Human Error: Cause, Prediction, and Reduction.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

VanLehn, K. (1990). *Mind Bugs: The Origins of Procedural Misconceptions.* Cambridge, MA: The MIT Press.