

van Hiele 모델에 의한 기하학적 사고력 개발에 관한 연구* (0 수준과 1 수준의 조작활동 중심으로)

최 창 우 (대구교육대학교)

I. 서론 1)

기하학은 전미수학교사협회(NCTM)에 의해 기본도구로써 인식되어왔다. 그도 그럴 것이, 학교수학 교육과정을 통해 기하학은 핵심적인 토픽이기 때문이다. 불행히도 그렇지 않은 경우가 있다. 많은 학교에서 계산기술을 개발하고 완벽하게 하는데 더 많은 시간을 할애하기 위하여 학년도의 끝으로 기하 단원을 미루고 있다. 왜 기하학이 기본도구인가? 많은 어린이들이 그들의 교사나 혹은 학교운영 체제가 기하학을 기본도구로 생각하고있지 않기 때문에 기하학을 배우고 시각적 사고 경험을 가질 기회를 갖지 못한다는 말이 있다. 기하학은 정말로 여러 측면에서 기본 도구이다. 우리는 자주 산술적인 개념의 시각적 표현을 사용한다. 그러한 의도는 산술적인 개념을 그림을 사용해서 전달하려는 것이다. "그림을 그리는 것이 천마디의 말보다 더 가치있다"라는 말은 여기에 어울리는데 그것은 종종 개념이나 혹은 기술을 의사소통하는데 시각적인 상을 만드는 것이 훨씬 더 쉬울 때가 있기 때문이다. 그림으로 표현된 개념은 종종 학생들이 빨리 이해할 수 있을 뿐만 아니라 일련의 말보다 훨씬 더 오랜 기간 동안 보존된다.

또한 어린이들이 그림에 대한 본질적인 기하학을 공부할 때까지 어떤 개념을 설명하기 위해 그림이나 혹은 그래프 같은 것을 사용하지 않는다는 것은 대단히 중요하다.

기하학은 도형이 갖고 있는 성질로부터 출발하여, 그것이 놓여 있는 위치의 변화나 모양의 변화에 관심을 갖고 결국에는 그 도형이 놓여 있는 공간구조의 고찰(공간감각의 개발)로 발전하는 것이다. 즉 기하학은 도형들에 대한 인식, 그들의 성질에 관한 지식, 그들의 관계에 대한 의식 등을 포함한다. 공간 감각이란 종종 공간 시각화 또는 공간 인식으로 여겨진다.

Del Grande(1990)는 기하학과 공간감각은 상호 종속관계에 있으므로 어느 한 분야에서의 학습이 결국은 나머지 한 분야에서의 학습이 된다고 했다.

National Research Council(1989)은 기하학에 관한 지식은 수학적인 힘을 줄 뿐만 아니라 그것은 또한 수학의 보다 진일보한 연구를 가능하게 해주며 과학과 공학의 세계에로의 기틀을 제공해 준다고 했다.

자연적인 그리고 인공적인 물건(물체)들이 기하학적인 개념들을 나타내 보이고 있기 때문에 기하학에 대한 연구는 또한 진정한 세계에 대한 인식과 이해에 기여한다.

네덜란드의 두 교육자 van Hiele 부부의 연구는 결국 기하학적인 사고의 개발에 관한 그들의 모델이 되었다.

그 모델에는 다섯 가지 수준이 있는데 본 고에서는 그 모델의 특성과 기하학을 가르치기 위하여 그 모델을 어떻게 사용할 것인가를 생각해 보고 특히 0 수준과 1수준의 조작 활동을 중심으로 기하학적 사고력 개발에 관한 고찰을 해보고자 한다.

* 이 논문은 1996년도 대구교육대학교 초등교육연구소의 자유공모과제 연구비에 의하여 연구되었음

II. 기하학적인 사고에 관한 van Hiele 모델

van Hiele (1959)는 문제를 사고하고 분석하는 그들의 학생들을 도와주는 방법을 찾는 데 관심이 있었다. 학생들이 기하학을 답습하는 방법에 있어서의 어려움을 van Hiele는 학생들이 그러한 어려움을 갖는 이유에 대한 설명을 명확히 했다. van Hiele는 기하학을 가지고 토론하고, 학습하고 그리고 연구 해야하는 사고수준이 존재함을 주장했다. 이 수준들은 학생과 교재사이는 물론 학생과 교사 사이에 의사소통을 위한 장애물을 포함하고 있다. 만약 어떤 교사나 혹은 교재가 학생들의 수준을 넘어서는 수준에서의 개념을 제시한다면 학생들은 그 질문이나 혹은 문제를 이해할 것 같지 않으며 그래서 그들은 요구된 문제나 혹은 질문에 답할 수 없을 것이다. 기하학적인 사고의 van Hiele 모델은 다섯 가지 수준을 포함하고 있는데 어떤 특징들은 그 수준들을 구별 짓는다.

1. 사고수준(thought levels)

0 수준(시각화수준): 학생들은 도형을 인식한다 그러나 직각과 같은 그러한 도형의 성질들은 인식하지 못한다. 학생들은 대체로 모양에 의해서 도형을 파악하며 많은 도형들을 인식할 수 있다. 학생들은 종이와 연필 또는 지오보드를 사용하여 모양을 본뜰 수 있다. 그러나 어떤 도형에 방향을 붙이는 것과 같은 그러한 무관한 속성들은 어린이들의 판단을 흐리게 할 수 있다. 초등학교 어린이들은 종종 기하학적인 도형들에 관한 사고와 관련되는 질문들에 반응으로 이 수준을 나타낸다.

1 수준(도형의 분석적 수준): 학생들은 기하학적인 도형들을 분석하기 시작한다. 학생들은 그들이 관찰했던 성질들을 습득하므로써 도형들의 속성을 인식하고 개념을 개발한다. 이를테

면 학생들은 삼각형은 세 변을 갖는다고 말한다. 그들은 도형들을 설명할 수 있으며 인식할 수 있다. 이를테면 평행사변형이란 똑같은 마주보는 변과 각을 가지는 네 변으로 이루어진 도형이다. 그러나 그들은 도형들 사이의 관계는 규명하지 못한다. 이를테면 직사각형은 평행사변형이다 라는 사실은 모른다. 도형들을 정의하는데 있어서 그들은 종종 중복된 말을 내포하고 있다. 이를테면 직사각형은 두 쌍의 길이가 같은 대변과 네 직각과 평행한 변을 가진다고 말하는 것 등이다. 이 수준에서 어린이들은 정의들을 암기 할 수는 있지만 이해하지는 못한다. 그래서 그들 나름대로의 의미있는 설명을 위해 교과서의 정의들을 무시한다. 그러므로 그들에게 정의를 암기하도록 요구해서는 안된다. 초등학교에서 몇몇 학생들은 1수준 사고의 정조를 보인다.

2 수준(이론적 배열수준): 이 수준에서 학생들은 정확한 정의들을 이해하고 수용한다. 그래서 도형을 공부하는데 정의들을 연관시킬 수 있다. 그들은 도형자체와 도형들 사이의 관계되는 성질을 이해한다. 예를 들면 평행사변형에서 대변이 평행하기 때문에 대각이 서로 같음을 추론할 수 있으며 정사각형은 직사각형의 모든 성질을 가지고 있기 때문에 직사각형이다라는 것을 이해한다. 그들은 류(class)의 포함관계의 개념을 세우고 그리하여 정사각형은 직사각형이며, 직사각형은 평행사변형이며, 평행사변형은 사변형임을 인식한다. 그들은 만약 무엇무엇이라면 무엇무엇이다 즉 "if ... , then"식의 사고는 할 수 있으나 증명을 하지는 못한다.

3 수준(연역적 추론수준): 이 수준에서 학생들은 증명을 할 수 있고 수학적 명제들의 참여부를 결정하기 위해 증명에 의존한다. 이 수준의 사고는 고등학교 기하 교육과정을 계승하는데 필요하다.

4 수준(기하학적 엄밀화 수준): 이것은 수학자들의 사고 수준이며 고도로 추상적인 기하적인 사고의 형태이다.

2. 모델의 특성(characteristics of the model)

① 수준들은 연속적이다 그래서 학습자들은 순서대로 수준들을 거쳐가야 한다. 어떤 학생이 한 수준에서 이해했을 때 그는 바로 다음수준으로 나아갈 수 있다. 한 수준에서 밝혀진 개념들은 바로 다음 수준에서의 사고를 학습하기 위해 통합되고 확장되어진다.

② 한 수준으로부터 다음수준으로의 전진은 나이보다는 교수에 더 많이 좌우된다. 적절한 활동들을 가진 경험이 학생들로 하여금 보다 높은 수준으로 나아가게 해준다. 보다 낮은 수준에서 학생들이 단지 묵시적으로 이해했는지 모르는 개념들이 보다 높은 수준들에서 명백해지며 그래서 우리는 학생들에게 새로운 개념과 더불어 학생들이 익숙해질 수 있는 적당한 경험을 줄 필요가 있다. 초등학교 저학년 어린이들은 대개 0 수준이며 상급학년의 어린이들은 1 수준이다. 그러나 1학년생과 6학년생 모두 0수준일 수 있다.

③ 보다 높은 기하적인 사고의 수준에 도달하기 위해서는 활동들에서 제시된 개념들을 토의하고, 문제를 해결하고, 복습과 요약을 통한 개념들을 통합하기 위한 어떤 특별한 수준의 내용과 관계를 나타내 보이는 활동들에 참여하는 많은 기회를 가져야 한다. 학습자들은 공식이나 일반화들과 관련되는 명제들(예를 들면 정사각형은 마름모이다)을 암기할 수는 있지만 그들이 학습한 것에 관한 이해는 부족할 수 있다.

④ 교사의 수준과 학생의 학습 수준간의 분리성이 존재하면 학습은 일어나지 않는다.

학습자들이 이해할 수 있는 것보다 훨씬 더 높은 사고의 수준에서 내용과 자료와 어휘를 구사하는 교사들은 학생들의 학습을 방해하는

것이 되며 학생들로 하여금 좌절과 근심거정에 빠트릴 수 있을지 모른다. 그래서 교사는 학생들이 어떤 수준에 있는지를 인식하여 그 수준에서 이야기를 할 필요가 있다.

III. 초등학교에서의 기하학교수

초등학교에서의 기하수업은 그 수준을 위해서 고안된 몇 가지 활동들과 함께 0 수준과 1 수준에 집중된다. 이들 수준들을 위해서 기술될 활동들은 크로울리(1987)의 수준분석, NCTM의 권고사항 그리고 상호교수(interactive teaching)에 근거한 지침들을 따른다.

1. 지침(guidelines)

0 수준의 학생들은

- ① 기하학적인 도형들을 조작하고 인식할 수 있어야 한다.
- ② 도형들을 분류하고 배열할 수 있어야 한다.
- ③ 도형들을 그릴 수 있고 구성할 수 있어야 한다.
- ④ 그들 자신의 말로 도형을 설명할 수 있어야 한다.
- ⑤ 도형과 관련되는 문제해결을 할 수 있어야 한다.

1 수준의 학생들은

- ① 0수준의 활동들과 유사한 활동에 관계하지만 활동의 초점은 0 수준에서처럼 도형의 일반적인 형태를 아는 것이 아니고 도형의 성질들을 인식하는데 있다.
 - ② 성질들에 의해 도형을 분류한다.
 - ③ 귀납적으로 즉 예를 공부하므로써 일반화를 이끌어 낸다.
 - ④ 적절한 어휘를 사용한다.
- #### 2 수준의 학생들은
- ① 포함관계를 이해한다.

- ② 추론한다.
- ③ 정의를 학습하고 사용한다

2. 교수를 위한 준비(organizing for teaching)

최근 몇 년 동안 어린이들을 위해서 출판된 상업적인 자료들 중에 기하학에 관한 관심이 고조되고 있으며 그러한 자료들의 종류가 상당히 증가하고 있다. 이제 이러한 자료들은 공간에 대한 어린이들의 첫 탐구가 사실상 결정적으로 위상적이라는 사실을 명백히 반영해 준다. 그럼에도 불구하고, 이유야 어찌든, 초등학교 교실을 방문해 보면 기하는 일반적인 산술 계산보다 덜 관심을 받는다는 것을 계속해서 확인하게 된다. 이것은 불행한 일이다. 왜냐하면 어린이들의 환경은 기하학적인 모델들로 가득 차있기 때문이다. 학교 환경은 어린이들의 사전 경험의 연장선상에 있다는 측면에서 이들 모델들을 이용할 필요가 있다. 이것은 예리한 지각력과 아울러 공간관계에 대한 개념들을 귀납적으로 개발하는 활동들을 통해 이루어 질 수 있다. 활동들은 기하학적인 개념을 가르치기 위한 전달수단이며 학습자들이 공간에 관해 사고하는데 있어서 앞으로 나아가도록 도와주는 것이다. 초기 활동들은 질문, 정보수집 그리고 어휘 개발 등을 포함하며 뒤이어 일어나는 후속 활동들은 구조화되고 연속적이다. 그러므로 학생들은 특수한 개념과 관계들에 적응시킨다. 가능한 한, 지침은 학생들로 하여금 어떤 문제가 해결되도록 하는 활동에 근접하도록 제시되어야 한다. 활동들이 끝난 후에는, 학생들은 그들의 활동을 명확히 하고 그들의 사고를 다듬기 위해 토론한다. 토론을 하는 동안에 교사는 학생들이 그들이 발견한 것에 대한 개념과 이유를 표현하는 것을 도와주기 위해 많은 질문을 한다. 질문은 학생들이 관찰한 것을 설명하고, 어떻게 활동을 실행했는지, 문제를 어떻게 함께 해결했는지, 언제 추론을 하고 학습을 요약하는 것이 적절한지를 물어본다. 활동들은 어떤 전체 수업 환경 속의 그룹이나 또는 개인적인 일에

주어지는 혹은 어떤 경우는 학교 정책이 과제를 부여하는 것이라면 과제로서 주어지는 핵심 속에서 사용될 수 있다. 어떤 활동들은 아마도 모든 어린이들이 조작하기 위해 이용할 수 없는 자료들을 필요로 한다. 그러한 활동들은 며칠에 걸쳐 계획될 수 있으며 매일 매일 어떤 그룹은 서로 다른 활동에 참여하고 서로 다른 자료들을 사용한다.

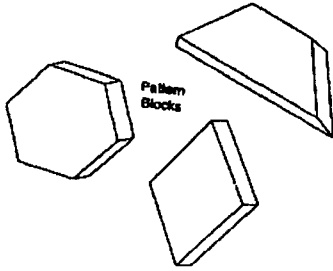
IV. 0 수준을 위한 활동(시각화 학습)

이 절에서 묘사할 활동들은 대체로 도형을 인식하는데 주안점을 둔다. 이들 활동들은 어린이들이 직관적으로 도형의 성질들을 알도록 도와준다. 활동들은 대상을 조작, 확인, 분류, 정렬, 그리고 구성하도록 준비되어 있다.

1. 조작과 인식을 위한 활동

[활동 4.1] 형태(패턴)만들기

패턴을 소개하기 위하여, 여러분은 “툼의 서츠에 있는 줄무늬에 대해 무엇이 특별한가?”라고 말할 수 있다. 그 경우 수업은 여러분이 수업에 가지고 온 의복이나 교실에 있는 물건들에 관해 토론한다. 어린이들이 패턴의 개념을 이해한다는 것이 분명할 때 어린이들로 하여금 패턴블록(패턴블록의 그림에 대해 아래 그림을 보라)을 사용하여 패턴을 만들도록 하라. 필요하다면, 같은 모양의 블록이나 또는 같은 모양과 다른 모양의 블록을 사용하도록 제안하라. 패턴이 완성되었을 때, 어린이들은 그들이 사용한 모양들의 이름을 붙이기 위해 패턴들을 설명한다. 만약 어린이들이 어떤 패턴의 특성을 이해하기 어려우면, 그들이 패턴을 창조할 준비를 갖추는 때까지 여러분이 완성한 패턴을 본뜨거나 계속하게 하라.



<그림 1> 패턴블록

[활동 4.2] 서로 다른 위치에 있는 도형

어린이들에게 마분지로부터 자른 패턴블록이나 모양을 사용하게 하라. 파트너와 함께 활동하면서 도형이 한 장의 종이 위에 놓일 수 있는(예를 들면, 30° , 45° , 혹은 90° 각도에서) 서로 다른 방법들을 보여 주라. O.H.P로 어린이들에게 도형의 개념을 보여주고 서로 다른 위치에 놓였을 때 도형이 어떻게 보이는지 토론하여라.

[활동 4.3] 그림 그리기

패턴블록을 사용하여, 어린이들은 고양이, 개, 집 모양 또는 다른 그들 나름대로 선택한 물건들을 만들 수 있다. 그들은 그들의 작업을 기록하기 위하여 도형을 그릴 수 있다. 그들의 도형에 공통점이 있을 때, 그 도형에 이름을 붙일 수 있다.

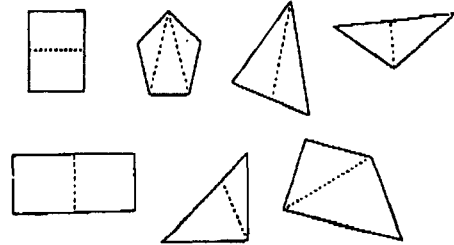
[활동 4.4] 파트너의 도형 알기

두 어린이가 함께 작업하도록 하라. 우선 각자 6개의 패턴블록(그들 중 어떤 것들은 같은 도형인)을 선택해서 두 사람이 그 블록들을 볼 수 있도록 그들을 둔다. 그 활동을 보다 흥미있게 하기 위해 다른 위치에서 그 블록을 두도록 제안해라. 어린이들은 교대로 만져보고 그들의 파트너가 선택한 똑같은 도형의 블록에 이름을 붙인다.

[활동 4.5] 접어서 발견하기

어린이 각자에게 몇 개의 종이 정사각형을 주어라. 어린이들에게 그 사각형을 조사하고 그 도형에 관해서 말해보라고 하라. 그 다음에 각

자에게 사각형을 다른 방향에서 반으로 접게해서 각 사각형에 무슨 일이 일어났는지(접기는 두개의 서로 다른 도형을 만들었다)말하게 해보라. 그리고 난 다음에 반으로 접는데 사용하기 위해 어린이들에게 종이로 된 직사각형을 나누어주고 그 결과의 그림을 그리게 한다. 마지막으로, 어린이들은 다른 도형들로부터 도형이 어떻게 구성될 수 있는가에 대한 발견을 하기 위해 서로 다른 종이도형을 접어봄으로써 실험을 한다.



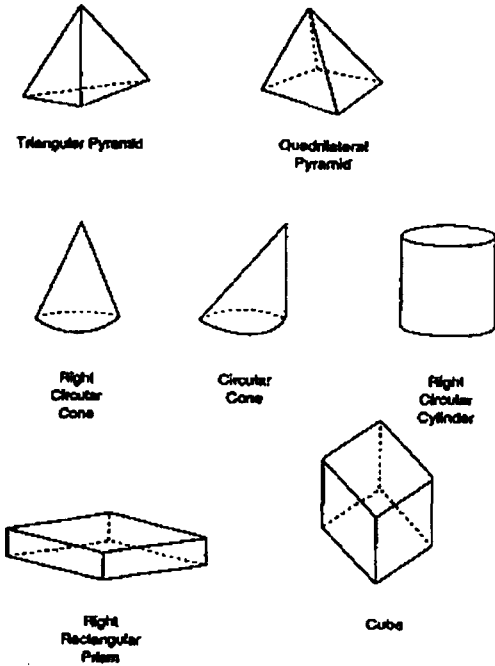
<그림 2> 다른 도형을 보여주기 위한 도형 접기

[활동 4.6] 도형 찾기

어린이들에게 학교 안팎에서 도형을 찾게 해보라. 그들 각자에게 며칠 혹은 몇 주 동안 서로 모양이 다른 도형을 찾게 해보라. 예를 들면 정사각형, 직사각형, 타원체, 원, 육면체, 각기둥, 그리고 원기둥과 같은 2차원과 3차원의 도형 둘 다를 포함해야 된다. 그들은 자신들의 발견에 관한 보고서에서 사용하기 위하여 그림을 그릴 수 있으며 이와 같은 활동은 훌륭한 과제 활동이 될 수 있다.

[활동 4.7] 나의 모양은 어떤 것일까요?

어린이들에게 아래와 같은 입체를 조사해서 평면상에서 바라보는 모양을 결정하게 하라. 예를 들면, 피라미드는 옆면의 모양이 삼각형이고, 삼각형이 밑면의 모양이 될 수도 있다. 각기둥은 직사각형이나 정사각형을 옆면으로 가지며, 밑면은 삼각형이 될 수도 있다.



<그림 3> 기하학적인 입체

[활동 4.8] 게임으로 느끼기

큰 자루가 부착되어져 있는 상자 속에 물체가 놓여져 있다. 물체의 그림에 대한 도표가 또한 준비 되어있다. 어린이들이 상자 속에 손을 넣어 물체를 느끼고, 상자 속에 있는 물체들의 도표를 쳐다보고, 그들이 느끼는 물체를 가리킨다. 그들은 또한 선택한 물체의 이름을 부르거나 그려도 좋다. 확인 하기 위해, 상자 밖으로 물체를 끄집어 낼 수 있다. 기하학적인 도형은 물론 스폰과 같은 일상적인 물체들이 그 활동에 사용되어질 수 있다.

2. 분류와 배열을 위한 활동

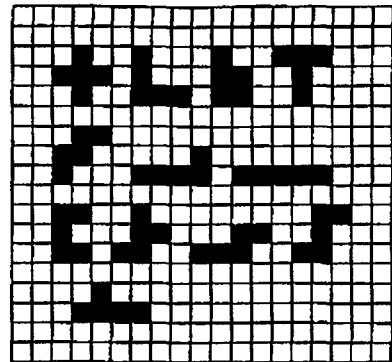
[활동 4.9] 패턴블록 분류하기

패턴블록을 분류하기 위하여 두 사람씩 짝을 지워 수업활동을 시켜라. 각자의 두 어린이는

두 가지 또는 세 가지 도형을 포함하는 약 10개의 패턴블록을 가져야한다. 지침은 “어떤 방식으로 조화를 이루는 블록들을 모으기”가 될 수 있다. 그들은 사물을 분류하는 방법을 말할 수는 없다. 이유는 만약 두 어린이들이 색깔에 의해 사물을 분류한다면 다른 방법으로 분류하도록 요구해 보라. 수업이 대부분 끝났을 때, 서로 다른 어린이들에게 어떻게 그들의 패턴블록을 분류했는지 설명해보게 하라. 만약 그들이 도형의 이름을 사용하지 않으면, 그들에게 도형의 이름을 붙이는 방법을 말해 주라.

[활동 4.10] 펜토미노

펜토미노는 그들의 모서리를 따라서 연결된 다섯 개의 정사각형들의 집합이다. 아래 그림처럼 12가지의 가능한 펜토미노들이 있다. 어린이들에게 다섯 개의 정사각형을 주고 모서리를 따라서 연결하는 것이 무엇을 의미하는지를 설명하기 위하여 한 개의 펜토미노를 보여주어라. 그리고는 그들에게 나머지 11개의 펜토미노를 찾는 문제를 해결하게 하라. 펜토미노들은 모서리를 따라서 연결한 정사각형들의 집합인 일종의 폴리오미노이다. 어린이들은 서로 다른 폴리오미노들을 가지고 실험할 수 있다. 즉 그들은 1개의 모노미노, 2개의 트리오미노, 5개의 테트로미노, 12개의 펜토미노 그리고 35개의 헥소미노들이 있다는 것을 발견할 수 있어야한다.



<그림 4> 펜토미노

3. 작도와 구성을 위한 활동

[활동 4.11] 지오보드를 이용한 작도와 구성

지오보드는 어린이들로 하여금 다양한 크기와 방향을 갖는 도형을 만들 수 있게 해준다. 우선 어린이들에게 실험을 해보게 하고 그들 자신이 선택한 도형을 만들게 해보라. 그리고 난 후 행동지침은 서로 다른 크기와 다른 위치에서의 삼각형(직사각형, 정사각형)들을 만드는 것이다. 그러한 일이 끝났을 때 그들의 한 일에 대해 서로 이야기를 나눈다. 어린이들이 도형을 만들었을 때 그들이 생각했던 것을 다른 방향에서 설명하기 위해 그들의 도형을 위치하게 한 이들을 격려하라. 이와 함께 보다 작은 도형으로부터 더 큰 도형만들기 거꾸로 더 큰 도형으로부터 더 작은 도형 만들기 또한 내부에 나무못이 하나도 없는 도형과 3, 4, 5개의 나무못을 갖는 도형을 만들어 보게 한다. 어린이들이 이와 같은 일에 열중하는 동안에, 여기저기 다니면서 어떤 활동을 실행하기 위해서 그들이 어떻게 생각했는지를 설명하도록 학생들에게 요청하라.

[활동 4.12] 도형을 모은 책

어린이들이 지오보드 상에서 구성했을 도형들을 기록하는 수단으로 여러 가지 도형을 모은 책을 만들도록 제안하라. 그들이 지오보드상에서 만들었을 도형을 본뜨기 위해 모눈종이와 자 또는 지오보드의 사진을 사용하게 하라. 도형 그리기는 또한 패턴블록을 그리므로써 만들 수 있다. 어린이들에게 어떤 페이지에서 같은 도형의 여러 가지 크기와 방향을 보여주어라. 그들이 활동한 것을 집에 가져가서 가족들과 나누어 볼 수 있도록 도형을 모은 책에 수집하라. 도형을 모은 책들을 위한 페이지들은 또한 신문광고나 또는 광고책자들로부터 오려낸 사물들로부터 만들 수 있다. 접시, 테이블, 침대 등이 도형을 설명하기 위하다 사용될 수 있다.

[활동 4.13] 도형 본뜨기

이 활동의 목적은 학생들이 한 때에 하나씩,

따로따로 3초 동안 O.H.P.로 보여준 그림을 본뜨는 것이다. 학생들이 1분 동안 작업을 한 후에, 두번째로 3초 동안 그림을 보여준다. 만약 학생들이 이번에도 완성하지 못하면 세번째로 그림을 보여주고 학생들이 그림을 완성하거나 혹은 수정할 수 있도록 보여준 상태로 내버려둔다. 학생들이 끝마쳤을 때, 무엇을 그려야 할지를 어떻게 결정했는지를 토론한다. 여러분은 “그림에서 무엇을 보았습니까?” “첫째로 무엇을 주목했습니까?” “어느 부분을 제일 먼저 그렸습니까?” “왜”와 같은 그러한 질문을 할 수 있다.

[활동 4.14] 3차원에서의 홍미

이 활동은 어린이들에게 서로 다른 유리한 위치에서 3차원의 물체를 볼 수 있도록 도와준다. 정육면체들의 어떤 군은 서로 다른 육면체들의 배열을 보여줄 수 있다. 학생들은 그들에게 주어진(정육면체 또는 연결된 육면체)부분품들의 집합으로부터 부분품들을 선택해서 진열된 입체를 구성한다. 그들은 입체를 구성하기 위해서 개인적으로 또는 짝을 지워 작업한다.

변화: (1)학생들은 10개(혹은 또 다른 갯수)의 육면체들로부터 얼마나 많은 건물들이 구성될 수 있는지 조사한다.

(2) 상급학년의 학생들은 3차원의 입방체들의 배열을 그리기 위해 사각형 또는 삼각형 모양의 점이 찍혀있는 종이를 사용할 수 있다.

[활동 4.15] 격자종이사용

어린이들이 도형을 구성하고 더 작은 도형으로부터 더 큰 도형들이 어떻게 만들어지는지를 조사하기 위하여 정사각형, 점, 또는 삼각형 모양의 점이 찍혀있는 격자종이를 사용할 수 있다. 그 활동은 O.H.P.로 어떤 격자를 보여주고 그리고 “다른 도형들로부터 만들어진 도형들을 보여 주기 위해 이 종이를 어떻게 사용할 수 있는가?” 질문하는 것으로서 시작할 수 있다. 어린이들은 격자종이를 가지고 활동하는 수업이 시작되기 전에 O.H.P.로 격자의 부분을 가리키거나 또는 대요를 말하므로써 자신들의

아이디어를 설명할 수 있다. 과제는 자유로운 시간(학교나 또는 집에서)을 이용할 수 있을 때는 언제든지, 어린이들은 격자종이 위에 도형을 만들 수 있다는 뜻에서 개방될 수 있다. 어린이들의 완성된 작품은 게시판에 게시해서 반원들은 서로 다른 도형들을 주목해야한다. 도형을 한데 모은 책은 학생들의 작품으로부터 만들 수 있으며 학생들이 도서관을 이용하는 시간동안에 즐길 수 있다.

V. 1 수준을 위한 활동(분석학습)

이 수준에서 학생들은 도형의 성질에 초점을 맞출 수 있어야한다. 도형의 성질들이란 단지형에 의해서 도형을 인식하는 것을 초월한다. 1 수준 사고를 위한 활동들은 기하학적인 도형들의 성질들을 인지하고 분류하고 그리고 성질들에 의한 도형설명, 성질들을 사용하여 도형을 그리고 구성하며 그리고 일반화하는 것을 취급한다.

1. 기하학적인 도형들의 성질 인식을 위한 활동

[활동 5.1] 성질 인식

3개, 4개, 5개, 6개, 7개 혹은 8개의 변을 갖는 3개 이상의 도형을 만들기 위하여 어린이들에게 격자 종이를 사용하도록 요구하라. 그들에게 8개의 변에 딸린 4개를 가지고 가능한 한 많은 서로 다른 도형들을 만들게 해보라. “네가 만든 도형에는 얼마나 많은 변이 있습니까?”와 같은 제목으로 게시판에 그들의 작품을 전시하라.

도형의 성질이나 혹은 특성들을 인식하도록 어린이들을 도우면서 학급토론을 위해서 게시판을 사용하라. 만약 어린이들이 후속의 학습 경험에서 내포되어지는 성질을 가진 도형을 제공하지 못하면 평행선, 직각, 예각, 둔각 그리고 합동인 변과 같은 그러한 성질들의 예를 보여줄 수 있는 여러분 자신이 만든 도형을 어린이들이 전시해 놓은 것에 첨가해라.

[활동 5.2] 이름 붙이기

도형과 도형들의 성질들에 대해서 그들이 알고있는 이름들이 무엇인지 삼삼오오 결정하도록 어린이들에게 요구하라. 그들에게 자신들의 아이디어를 서로 나누게 하라. 2차원과 3차원의 그림을 포함시켜라. 어린이들이 모르는 이름들은 소개 해야한다. 예를 들면, 각기둥, 이등변삼각형, 면 등의 용어들은 어린이들이 모를지 모른다. 학생들이 활동에서 사용될 용어들에 대한 편리한 참고가 되도록 이름이 붙어있는 도형들의 그림을 가진 차트를 준비하라.

[활동 5.3] 게임: 나는 무엇입니까?

기하학적인 도형들에 관한 설명을 가진 36장의 카드와 그 카드 상에 그려진 그림들의 정확한 이름들을 결정하기 위한 열쇠를 준비하라. 2차원 및 3차원의 그림과 그리고 그들의 성질들을 포함시켜라. 학생들은 또한 그 카드들을 쓸 수 있다(카드들의 보기: 나는 여섯 개의 면들을 가진 입체 모양이며, 모든 면들은 정사각형의 영역들이다; 나는 결코 만나지 않는 같은 방향으로 가는 선들이다). 그 카드들은 섞어서 떼어지며 각 선수(4명 혹은 6명)는 9장 혹은 6장의 카드를 받는다. 각 선수들은 그들의 카드를 교대로 읽고 그리고 카드 상에 묘사된 그림들에 이름을 붙인다. 한 선수가 어떤 그림을 이름 부를 때, 그 게임에 참가한 사람들은 놀이판의 한 가운데에 그 카드를 놓는다. 만약 그들 중에서 그림을 이름 부를 수 없으면, 그 선수는 그 집단에게 그림의 이름을 말해주는 열쇠를 쳐다보고 자기 오른쪽 또는 왼쪽의 선수에게 그 카드를 주고 그 사람의 손에서 카드 한 장을 가져온다. 그러면 그 다음 선수가 자기차례를 가진다. 카드가 제일 먼저 없어지는 선수가 승자가 된다.

[활동 5.4] 추적과 대칭

어린이들에게 대칭성을 갖는 도형들을 만들어서 대칭선 상에서 그들을 자르게 해보라. 잘린 반 조각들을 모아서 며칠 후에 각자의 어린이에게 반조각을 주어라. 대칭성을 갖는 그림을 만들기 위해 그 조각들을 사용하는 방법들을

학생들에게 생각하게 하라. 어린이들은 이 문제를 해결하기 위해 짝을 지워 혹은 소집단으로 활동할 수 있다. 어떤 투명도 위에 그들의 패턴을 다시 겹쳐 보게 하고, 추적 하게 하고, 대칭시켜보게 함으로서 그들의 답을 설명하게 하라.

2. 성질에 의한 도형 분류와 묘사

[활동 5.5] 공통점은 무엇인가?

학생들의 집단에게 도형들을 모아 놓은 것 또는 도형들의 그림을 모아 놓은 것을 주라. 어떤 집합에서는 2차원과 3차원의 도형 둘 다를 포함한다. 학생들에게 성질들에 의해 각 집합에서 가능한 한 많은 방법으로 도형들을 분류하도록 하라. “어떤 면에서 여러분이 할 수 있는 한 여러 번 조화를 이루는 도형들을 모은다”라고 말할 수 있다. 예를 들면, 분류는 정삼각형과 정삼각형이 아닌 것 등이 될 수 있다.

[활동 5.6] 어떻게 이들이 분류되어졌는가?

O.H.P.로 몇 가지 도형의 분류를 보여주어라. 각각의 분류는 4개 혹은 5개의 항목을 갖는다. 어린이들에게 각 분류에서 사용되어진 성질들을 결정하기 위한 분류법을 공부하게 하고 그들에게 각각의 분류에 대한 기본을 설명하도록 해보라.

[활동 5.7] 내 모양은 무엇입니까?

학생들에게 반에 있는 다른 사람들을 위해서 읽을 그리고 인식할 도형들에 대한 설명을 쓰게 하라.

[활동 5.8] 공간에 있는 것들을 위하여

학생 각자에게 도형을 그리는데 사용할 어떤 공간이 존재한다와 같은 그러한 도형을 한번도 보지 못한 사람을 위하여 2, 3개의 기하학적인 도형에 대한 설명을 쓰게 하라.

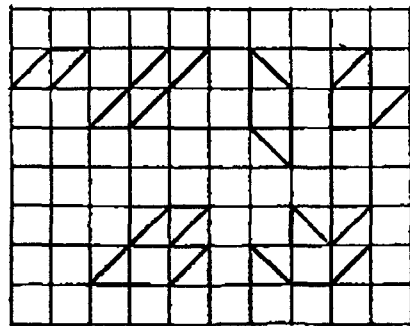
학생 각자가 한 설명을 소집단에게 읽게 하라. 그 설명은 한번 다시 읽혀질 수 있다. 그 집단의 각 구성원들은 주어진 설명에 따라서 어떤 도형을 그릴 것이다. 모든 것이 끝난 후에는 그들의 그림을 비교한다. 그와 같은 절차를 반복할 수 있다.

3. 성질에 의한 도형 그리기와 구성

[활동 5.9] 도형의 구성

학생들에게 격자무늬의 작업종이와 4개 혹은 그 이상의 직각 이등변삼각형을 주어라.

두개의 삼각형이 하나의 직각 정사각형을 채울 수 있을 것이다. 학생들에게 도형을 잘라내게 해서 2개, 3개 혹은 4개(혹은 그 이상)의 삼각형을 사용하여 격자종이 위에 새로운 도형을 만들게 해보라. 그들의 활동에 대한 기록을 보존하기 위하여 도형을 그리게 해보라. 2개, 3개 혹은 4개의 이등변 삼각형의 조합을 사용하여 19개의 도형들이 구성될 수 있다(Silverman, 1990). 학생들은 가능한 한 많은 도형을 만들기 위하여 소집단에서 활동할 수도 있다. 함께 나누기 위해 그들의 작품을 전시하라. 만약 모든 19개의 도형이 만들어지지 않으면 자유시간에 19개 도형 모두를 만들기 위해 개인적으로 혹은 짝을 지워 활동하도록 제안하라. 그들에게 답을 주지 말아라. 도형을 구성하기 위하여 얼마동안 의무적으로 활동 하게 하라. 그러한 문제는 학생들에게 모든 도형들에 대한 가능성들을 그들이 생각할 때 공간감각의 개발을 가능하게 해준다. 그 활동은 4개의 평행사변형을 사용하여 반복될 수 있다. 평행사변형은 아래 그림처럼 격자를 채우기 위한 2개의 직각 이등변 삼각형으로부터 구성될 수 있다.



<그림 5> 2개 혹은 3개의 평행사변형으로부터 구성된 도형

[활동 5.10] 도형관찰하기

활동 5.9의 이등변 삼각형으로부터 그들이 만든 도형들을 학생들에게 분류하게 해보라. 만약 그들이 분류를 하는데 있어서 이들 범주들을 사용하지 않으면 등각등변인 또는 등각등변이 아닌 그리고 대칭인 것 또는 대칭이 아닌 도형들을 찾는데 그들을 도와 주라. 등각등변과 등각등변이 아닌 말의 어휘를 소개하라.

[활동 5.11] 점이 찍혀있는(격자)종이를 사용한 대칭성

학생들에게 그들이 만드는 도형에 있어서의 대칭성을 보여주기 위하여 격자 종이를 사용하게 하라. 첫째로, 그들에게 점이 찍혀있는 종이 위에 선을 그리게 하고 그 다음 선의 한쪽면에 창의적인 모양을 만들게 하고 마지막으로 점들을 지침으로 삼아 선의 반대편 쪽에다 그 모양의 거울에 비친상을 만들게 하라. 그들은 그와 같은 절차를 모델화하기 위해 여러분을 필요로 할지도 모른다.

어린이들에게 선대칭에 관한 그들의 예를 만들기 위하여 어떻게 생각했는지를 설명하게 하라. 학생들은 대칭성을 보여주기 위해 그들이 고안한 것에 색칠을 하고 싶어할지도 모른다. 학생들이 만들어낸 대칭에 관한 예들을 전시하라.

[활동 5.12] 입체 자르기

찰흙으로 만든 입체는 여러 가지 다른 각도에서 입체를 자른 결과의 도형을 조사하는데 사용될 수 있다. Carrol(1988)은 어린이들이 사용하는 “모형제작 찰흙” 즉 기름이 섞여있는 찰흙이 가장 좋다고 제안했다. 왜냐하면 그것은 물이 섞여있는 찰흙처럼 쉽게 마르지 않기 때문이다. 미술품을 파는 가게에서 구입한 피아노 선이나 혹은 찰흙 절단기는 깨끗한 절단을 하는데 사용될 수 있다. 자르기 전에 학생들에게 단면도의 모양을 예상하게 해보라. 입체의 그림, 예상한 단면도의 그림, 잘라봄으로써 찾은 단면도 그리고 단면의 모양 이름을 주는 테이بل을 만들 수 있다.

[활동 5.13] 그러서 발견하기

학생들에게 아래 지시들을 실행한 결과로부터 몇 가지 관찰을 하게 하라.

1. 단 하나의 직각과 4개의 변을 가지는 도형을 그려라. 그 도형에 이름을 붙여라. 가능하면 다른 것도 그려서 그 도형을 명명하라.

2. 마주보는 변이 서로 평행이면서 적어도 한 각은 직각인 4개의 변을 가지는 도형을 그려라.

3. 모든 변의 길이가 같은 4변을 가진 도형을 그려라. 그 도형에 이름을 붙여라. 가능하면 다른 것도 그려서 그 도형에 이름을 붙여라.

4. 모든 변의 길이가 같고 적어도 한 각이 직각인 4개의 변을 가진 도형을 그려라. 그 도형에 이름을 붙여라. 가능하다면 다른 것도 그려서 그 도형에 이름을 붙여라. 그들의 관찰은 활동을 실행하는 동안에 이들 도형들의 성질과 그들의 사고 과정에 대한 진술을 포함해야한다.

[활동 5.14] 세계의 밀집

학생들에게 약 50cm의 길고 가는 다란 조각을 더 작은 세 개의 조각으로 잘라서 그것을 가지고 삼각형을 만들게 해보라. 학생들에게 3개의 조각만 있다고 해서 항상 삼각형이 되는 것은 아니라는 것을 보여주는 여러 가지 삼각형과 삼각형이 아닌 것들을 얻기 위해 단체로 활동하게 해보라.

변화: 학생들에게 3개, 4개, 5개, ..., 12개의 이쑤시개를 가지고 어떤 종류의 삼각형을 만들 수 있는지를 결정하기 위하여 실험을 하게 해보라. 학생들에게 아래 표에 보여준 테이블의 각 칸에 Y(맞음) 또는 N(틀림)을 써서 표를 완성하게 해보라. 만약 2개 이상의 종류의 삼각형들이 가능하다면, 빈칸에 2번 이상의 Y를 쓸 수 있다. 몇몇 학생들은 O. H. P.에 그들의 삼각형을 나타내 보일 수 있다. 학생들은 자기들의 활동의 의미(예를 들면, 이등변 삼각형을 만들기 위해서는, 이쑤시개의 갯수가 3에 의해 나누어 져야한다)를 토론해야한다.

	Equilateral	Isosceles	Right
Number of toothpicks			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

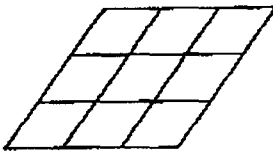
<그림 6> 이췌시개로부터 삼각형 만들기

[활동 5.15] 합동도형

학생들에게 적어도 3개가 같은 크기와 모양을 갖는 5개 혹은 6개의 삼각형이나 사각형을 그려서 그들을 잘라내게 해보라. 합동이라는 말을 소개하라. 그들에게 똑같은 크기와 모양을 갖는 도형들에 관해서 무엇을 인식하는지를 결정하게 하라. 그들이 도형들을 서로 교환하고 그들이 인식하는 도형들을 가지고 로봇트와 같은 도형을 만들도록 제안하라. 그들은 서로서로 다른 사람들의 도형들을 볼 수 있다. 몇몇 학생들은 도형에 관해 이야기를 할 것이다. 도형을 설명하는 가운데 합동이라는 용어를 사용하도록 격려하라.

[활동 5.16] 같은 각

모든 학생들에게 아래 그림과 같은 그림을 나누어주어라. 학생들에게 어느 각이 같은지 같은 색깔로써 같은 각을 색칠하게 해보라. 그리고 난 후 그들이 예상한 것을 시험해 보기 위해 이들 각들을 잘라내게 하라. 평행사변형의 마주보는 각은 같다는 결론에 도달하도록 그들을 도와주어라.



<그림 7> 평행사변형에서 같은 각을 조사하기 위한 그림

VI. 기하학습과 공간감각의 평가

어린이들이 기하학적인 도형을 가지고 추론하는 방법에 관한 다양한 연구들은 학교에서의 기하학이 단지 어휘와 측정 이상의 것을 내포하고 있어야 한다고 지적한다.

예를 들면 입체 도형들은 종종 미국학교 교육과정에서 거의 관심을 받지 못한다. 그러나 입체 도형들은 종종 수학을 일상 생활과 연관시켜주고 공간감각의 면을 개발시키며 발견학습을 통한 문제해결 기량을 연습할 기회를 제공해 준다. 기하학습과 공간감각의 개발에 대한 평가는 어린이들의 기하학적인 사고 수준을 결정하는 것을 도와준다. 어린이들의 사고 수준이 알려졌을 때, 적절한 활동을 부과할 수 있다. 어린이들은 만약 그들이 받는 수업이 그들로 하여금 개념을 개발하게 하고, 그들의 아이디어를 말로 표현하고 글로 쓰고, 그들의 견해를 다른 사람들과 교환하고 그들이 구성한 개념에 근거한 문제해결을 하는 의미있는 활동들에 관여하게 해준다면 한 수준에서 다른 수준으로 발전하게 된다(Crowley, 1987). 그러나 그 과정은 시간이 걸린다. 학생들이 기하학적인 개념을 형성하는데 오랜 시간과 의미있는 수업이 필요하다는 것은 분명하다(Burger and Shaughnessy, 1986). 초등학교 어린이들의 기하학적인 사고수준의 평가는 어린이들이 0수준인지 또는 1수준인지를 여러분으로 하여금 결정하는데 도움을 줄 것이다. 극소수의 학습자들만이 2수준의 사고로 옮겨갈 것이다. 그러므로 대부분의 평가 문항들은 어린이들이 어떤 모양의 형태를 찾는데 강조점을 둘 것인지 아니면 그것의 성질을 조사하는데 강조점을 둘지를 결정한다. Burger와 Shaughnessy(1986)의 활동에 근거한 평가활동들은 다음을 포함한다:

① 여러분이 할 수 있는 한 많은 서로 다른 모양의 삼각형을 그려라(어린이들이 직각삼각형, 정삼각형, 이등변삼각형 그리고 부등변삼각형 등을 그릴 수 있습니까? 그릴 수 있다면 도

형의 성질에 초점을 둔 1수준 사고이며; 그렇지 않으면 어떤 삼각형의 형태만 아는 0수준의 사고이다.)

② 학생들에게 어떤 면에서 모양이 같은 삼각형들을 한데 모으게 해보라. 그들에게 할 수 있는 한 많은 서로 다른 방법으로 그와 같은 일을 반복하게 하고 그들이 행한 것을 설명하게 해보라(예를 들면, 그들이 직각삼각형, 정삼각형, 이등변삼각형, 부등변 삼각형 등을 보여 주고 이와 같은 분류를 한 이유를 말할 수 있게 한다). 만약 그들이 여러 가지 방법으로 분류할 수 있으면 변과 각의 성질을 사용하는 것을 인지하는 것이고 그렇다면 1수준의 사고를 보여주는 것이며; 만약 그렇지 않다면 0수준의 사고를 보여주는 것이다.

③ 어린이들에게 서로 다른 차원과 방향을 갖는 많은 서로 다른 도형들을 보여 주라. 어린이들에게 그 도형을 명명하게 하고 왜 그와 같이 명명하게 되었는지를 설명하게 하라. 그리고 난 다음에는 모든 직사각형과 정사각형(만약 그들이 이와 같은 도형을 공부했다면 평행사변형과 마름모)에로 방향을 바꿔서 이러한 것들이 왜 직사각형인지 등등을 말하게 해보라. 1 수준의 사고를 보여주는 그들이 선택한 것을 설명하기 위하다 도형의 성질 사용에 주목하게 하라. 도형의 포함관계를 언급하는 어린이들은 2수준의 사고를 보여주는 것이다.

평가문항 ①과 ③은 종이와 연필로 하는 활동을 위해 채택될 수 있다. 예를 들면 평가문항 ③에서 어린이들은 직사각형 위에는 "R" 정사각형 위에는 "S" 등을 쓸 수 있다. 학생들에게 만약 그렇게 할 수 있다면 도형 위에 한 개 이상의 문자를 쓰도록 제안하라. 그들의 반응을 보면 학생들이 포함관계를 이해하는지 어떤지를 여러분이 결정하는데 도움을 줄 것이다. 그러나 종이와 연필로 한 평가는 제기된 질문에 구두로 답변한 것만큼 충분히 어떤 학생의 기하학적인 사고의 발달을 결정하지 못한다. 평가를 기초(토대)로 하여 수업과 학생들의 사고간에

조화를 이루도록 적절한 수준에서 활동을 선택하라. 만약 사고와 수업수준사이에 조화를 이루지 못하면 학생들은 기하학을 배울 수 없으며 그 과목을 좋아하지 않는 것을 배울 수 있을지 모른다. 대부분의 어린이들은 기하학을 배우는 것과 관련되는 활동들에 흥미가 있다. 그들은 대개 공간도형과 연관되는 주제를 가지고 활동할 때 즐거움을 표시한다. 관찰력은 여러분들 반에 있는 어린이들이 여러분이 계획하고 있는 도전적이고 즐길만한 활동들을 찾을 수 있을지 어떨지를 결정해준다. 여러 분은 기하학에 있어서 어떤 주제를 공부할 때 어린이들의 얼굴표정을 보고 또한 그들의 견해에 귀 기울여야 한다. 만약 그들이 어떤 활동들에는 관심이 있는 것처럼 보이고 다른 활동들에는 관심이 없는 것처럼 보이면, 그들이 좋아하는 활동들의 특징을 공부하게 하고 이들을 많은 기하학 활동들 중에 한 부분으로 만들려고 노력하라.

VII. 요약

기하학적 사고력 개발이라는 우리의 목표는 궁극적으로 보다 낮은 수준의 학생들에게 보다 높은 수준으로 나아가게 하는 경험을 주는 것이다. 학생들이 보다 높은 수준에서 추론할 수 있도록 하기 위하여 그들이 보다 낮은 수준에서 충분하고 효율적인 학습 경험을 가져야 한다는 것이다. 예를 들면 분수에서 이루어지는 것처럼 기계적인 암기식으로 사물을 학습함으로써 수준(단계)을 뛰어 넘으려고 노력하면은 그들이 학습한 것에 관한 많은 것을 기억할 수 없을 것이다. 조작에 관한 보다 풍부한 경험과 시각적으로 입체감을 주는 설명을 들은 어린이들이 보다 훌륭한 공간 추론을 할 수 있을 것이라 믿는다. 본 고에서는 기하학적인 사고의 개발에 관한 van Hiele 모델이 초등학교에서 기하 수업의 토대를 위한 기초로서 사용되어졌다. 그 모델의 수준들이 묘사되었고 일반적으로 초등학교 아동들의 사고는 0수준과 1수준이라

는 것이 밝혀졌다. 단지 극소수의 아동들이 2수준의 사고에 도달해 있을 것이다. 그러나 만약 초등학교에서의 수업이 기하학적인 개념을 구성하는데 주안점을 둔다면 보다 많은 어린이들이 2 수준의 사고를 보여줄 수 있을 것으로 생각된다. 0 수준의 어린이들은 도형의 형태에 초점이 맞추어져있고 1 수준의 어린이들은 도형의 성질을 이해하는데 에 있다. 2 수준의 사고자는 도형의 포함관계를 이해하고 비공식적으로 추론 할 수 있다. 처음 세 수준에서의 활동들에 대한 지침이 주어져 있으며 0 수준과 1 수준에 연관되는 다수의 활동들을 묘사했다. 0 수준의 어린이들을 위해 묘사된 활동들은 그들이 2차원 및 3차원의 도형 들 다를 시각화하는데 도움을 주는 것이다. 1 수준에서 사고하는 학습자들을 위해 묘사된 활동들은 2차원 및 3차원 도형의 성질들을 강조했다. 아울러 본 고에서 언급한 활동들은 상호교수예의 접근을 반영했다. 그러한 접근방식은 학습자들로 하여금 그들의 활동과 의견으로부터 개념을 구성하게 해주며 그들의 활동 결과에 대해 다른 사람들과 의사소통 함으로서 개념을 명확하게 다듬어지게 해줄 수 있을 것이다. 아울러 평가 활동들이 본고의 마지막 부분에 주어져있다. 그러한 활동들은 교사들에게 어린이들의 기하학적인 사고수준을 결정하게 해주며 학습자들로 하여금 수업시간 이외에 보다 높은 사고수준으로 나아가게 해줄 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

- 신택균 외 (1994). 수학교육, 서울: 동명사.
- 한태식 (1995). van Hiele 이론에 근거한 대표적 연구의 비교, 대한수학교육학회논문집 5(1), 29-38.
- Burger, W. F. (1985). Geometry. *Arithmetic Teacher* 32, 52-56.
- Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education* 17, 31-48
- Caroll, W. M. (1988). Cross Section of Clay Solids. *Arithmetic Teacher* 35, 6-11.
- Crowley, M. L. (1987). The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12*, (pp. 1-16). Reston, VA: NCTM.
- Schminke, C. W. & Dumas, E. (1981). *Math Activities Forchild Involvement*, Allyn and Bacon, Inc.
- Del, G. J. (1990). Spatial Sense. *Arithmetic Teacher* 37, 14-20.
- Dickson, L. (1984). *Children learning mathematics*. Oxford: Alden Press Ltd.
- Holmes, E. E. (1995). *New Directions in Elementary School Mathematics*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc.
- National Research Council (1989). *Everybody Counts*. Washington, DC: National Academy Press.
- Silverman, H. (1990). Ideas: Spatial Sense. *Arithmetic Teacher* 37, 29-42.