

## 최소 에너지기법을 이용한 역 열전도 경계요소법의 공동 탐지

최창용

전주대학교 기계공학과

**요 약** 경계요소법에 최소 에너지기법을 적용하여 적외선 스캐닝을 이용한 물체 내부 미지의 공동(cavity)을 탐지하는 기하학적 역 열전도 문제의 해를 구하였다. 이 문제에서 경계요소식은 에너지 최소화 과정을 적용한 quadratic programming 문제로 전환되었으며, 가상적인 내부 경계가 실제 공동의 영역 내부에 위치하도록 정의되었다. 적외선 스캐닝 표면 온도가 측정 오차의 구속 조건을 만족하도록 가상 내부 경계에서의 온도 분포를 결정한 후, 이를 내부 경계 조건으로 하는 경계요소 해석을 수행하여 미지 경계의 위치를 결정하였다. 공동 탐지 알고리즘이 제시되었고 수치해석을 통하여 역 해법에 대한 최소에너지 기법의 효과를 분석하였다.

### 1. 서 론

적외선 스캐닝(infrared scanning or thermography)을 이용한 비파괴검사 방법은 물체 표면 온도를 분석하여 가열된 물체 내부의 공동(cavity) 또는 결함(flaw)을 탐지할 수 있는 방법으로써 적외선 장비(infrared thermographic system)의 발달과 함께 최근에 활발히 연구 개발되고 있는 분야이다<sup>1)</sup>. 기본 원리는 가열된 물체의 열전달 특성에 따라 달라지는 표면 온도 분포로부터 물체 내부의 기하학적 구조에 관한 정보를 얻을 수 있다는 사실을 이용하는 것이다. 이는 주어진 물체 구조 및 경계 조건으로부터 온도 분포를 구하는 고전적 열전도 문제가 아닌, 온도 분포 및 경계 조건이 주어질 때 역으로 미지의 물체 내부 구조 즉 경계 위치를 결정하는 기하학적 역 열전도 문제(geometrical inverse heat conduction problem)로 분류된다.

비파괴검사 방법으로서의 기하학적 역 열전도 문제는 열원에 의해 가열된 물체의 비정상 상태(unsteady state) 응답을 이용하거나 또는 정상 상태(steady state) 응답을 이용하는 두 가지 접근 방법<sup>2, 3)</sup>으로 연

구되고 있다. 비정상 상태에 근거한 방법은 레이저, IR lamp 등의 열원을 이용한 순간적 가열(pulse heating)에 따른 물체 표면 온도의 과도 변화를 스캐닝하는 것이며 Maldague의 최근 문헌<sup>4)</sup>에 잘 조사되어 있다. 본 논문에서는 가열된 물체 내부의 공동을 탐지하는데 정상 상태의 응답 방법을 이용하였다. 이러한 정상 상태 역 열전도 문제는 물체 표면 적외선 스캐닝에 의해 추가적으로 주어지는 온도 분포 조건이 주어진 다른 조건과 함께 사용되어 미지 공동의 경계 위치를 결정하는 것으로서, 특히 일정 열원을 가지고 정상 상태로 운전되는 원자력발전소의 원자로 열전달 계통 비파괴 검사에 응용될 수 있다.

정상 상태의 적외선 스캐닝 기술은 Hsieh 등<sup>5-7)</sup>에 의해 IR CAT(infrared computerized axial tomography) scan의 개발 적용 목적으로 여러 단계를 거쳐 연구되어 왔다. 초기 단계에서 template matching에 의한 패턴인식방법<sup>5)</sup>이 사용된 이후, 불규칙 형상의 물체 내부에 있는 불규칙 형상의 공동 위치를 탐지하는 일반적인 방법으로서 경계요소법(boundary element method)<sup>8)</sup>을 사용하는 방법이 Hsieh 등<sup>9)</sup>에 의해 연구

되었다. 또한 Kassab과 Pollard<sup>10)</sup>는 경계요소해법을 반복적으로 적용, 변수의 잉여값을 최소화함으로써 공동의 위치를 탐지하는 방법을 개발하였다. 이러한 방법들은 적외선 스캐너를 이용한 실험<sup>3, 11)</sup>에 의해 모두 성공적으로 검증되었다. 최근에는 역 열전도 문제가 갖는 수학적 부적절 상태(ill-posed)로 인한 경계요소 해의 불안정성으로부터 안정적인 해를 얻기 위한 노력으로 저자 등<sup>12~14)</sup>이 Tikhonov의 정규화 방법(regularization method)을 적용하였으며, 안정된 해가 어느 정도 정확도를 감소시킴으로서 얻어질 수 있는 반면에 탐지 정확도가 증가되면 해가 불안정해지는 결과를 얻었다. 한편 Ingham 등<sup>15, 16)</sup>은 부적절 상태 문제의 안정적인 해를 얻기 위해 제한적인 조건이 추가되어야 한다는 Hadamard의 정의에 따라 경계요소식에 에너지 최소화 조건을 도입하여 다양한 역 열전도 문제의 정확하고 안정된 해를 얻는데 성공하였다. 그러나 이의 공학적 적용 방법 및 적용 범위 확장에 있어서는 아직 연구가 미흡한 실정이다.

본 연구에서는 기존의 경계요소법에 Ingham의 최소 에너지기법을 도입하여 기하학적 역 열전도 문제의 해를 구하였다. 기본적인 경계요소식은 최소 에너지기법을 적용할 수 있도록 경계 조건을 나타내는 벡터 및 계수행렬 등이 수정되었으며, 불규칙 형상의 물체 내부에 온도 조건이 주어질 때 불규칙 형상의 공동 위치를 수치 해석적으로 탐지하는 알고리즘이 제시되고 이에 대한 탐지 정확도가 전산 시뮬레이션으로 연구되었다.

2. 역 문제 구성 및 해법

역 열전도 문제의 구성을 위해 Fig. 1(a)에 표시된 물체를 고려하였다. 물체 외부 경계  $\Gamma_a$ 에서는 대기 환경과 열을 교환하는 대류열전달 조건이 주어지고, 일정 열원에 의해 가열되는 내부 경계  $\Gamma_c$ 에서는 가열 온도 조건이 주어진다. 여기서 내부 경계 즉 공동의 위치는 알려져 있지 않으며, 본 문제의 목적은 물체 표면을 적외선 스캐닝하여 얻을 수 있는 표면 온도 분포를 이용하여 내부 경계 위치를 탐지하는 것이다. 2차원 정상 상태 열전도 지배 방정식은 Laplace 방정식으로 주어지며 측정되는 표면 온도 조건을  $\bar{T}_a$ , 측정값의 최대 오차를  $\epsilon$ , 영역 확장에 따른 가상적인 내부 경계  $\Gamma_b$ 로서 Fig. 1(b)와 같은 작은 원을 도입하면 기하학적 역 열전도 문제는 다음과 같이 구성된다.

$$\nabla^2 T(x, y) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

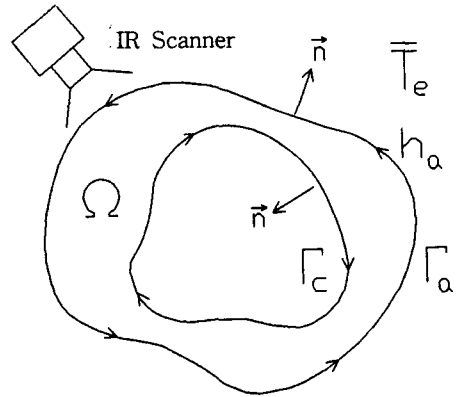
$$k \frac{\partial T(x, y)}{\partial n} + h_a(x, y) T(x, y) = h_a(x, y) \bar{T}_e(x, y), (x, y) \in \Gamma_a \dots\dots (2)$$

$$|T(x, y) - \bar{T}_a(x, y)| \leq \epsilon, (x, y) \in \Gamma_a \dots\dots (3)$$

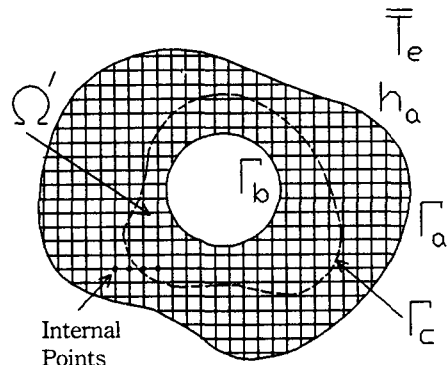
$$T(x, y) = \bar{T}_b(x, y) = ?, (x, y) \in \Gamma_b \dots\dots (4)$$

여기서  $T$ ,  $k$  그리고  $h$ 는 온도, 열전도도 그리고 대류열전달계수를 각각 나타내며  $T$ 위의 (-)표시는 주어진 온도를 나타낸다. 특히  $\bar{T}_e$ 는 주어진 대기 온도를,  $\bar{T}_b$ 는 결정되어야 하는 가상 내부 경계에서의 온도를 각각 의미한다. 온도  $T$ 의 편미분  $\partial T/\partial n$ 은 Fig. 1(a)에 나타난 바와 같이 바깥으로 향하는 법선을 따라 수행된다.

- $\Omega$  : Actual Domain       $\Omega'$  : Extended Domain
- $\Gamma_a$  : Outer Boundary     $\Gamma_b$  : Hypothetical Inner Boundary
- $\Gamma_c$  : Cavity Boundary     $h_a$  : Convective Heat Transfer Coeff
- $\bar{T}_e$  : Environmental Temperature



(a) Original Problem



(b) Inverse Problem

Fig. 1. Test system for inverse analysis

위 식(1)-(4)들은 실제 영역  $\Omega$ 로부터 확장된  $\Omega'$  영역에서의 경계  $\Gamma_b$ 에 대한 가상적인 조건들을 결정하는데 이용된다. 본 논문에서는 이러한 역 문제 해법에 가장 적합한 수치 해석 방법인 경계요소법을 이용하여 경계에서의 온도를 결정한 후 확장 영역  $\Omega'$ 에서의 내부점들의 온도 분포를 결정하였으며, 실제의 공동 위치  $\Gamma_c$ 는 Fig. 1(b)에 표시된 바와 같이  $\Omega'$  내부에 Grid Net를 형성하여 공동에 가해진 특정 온도 조건을 만족하는 점들을 찾음으로써 구해질 수 있다.

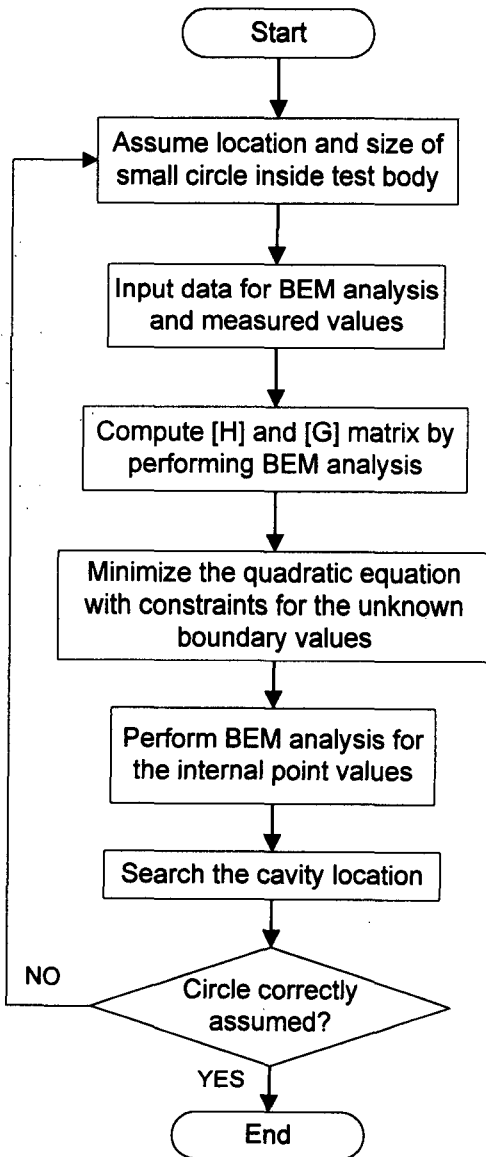


Fig. 2. Flow chart of cavity detection analysis

한편 가상 영역  $\Omega' - \Omega$ 에서의 온도 분포는 물리적인 의미를 갖지 않는 수학적 해로서 실제 영역  $\Omega$ 에서의 온도 분포와는 명백히 구분되는 비현실적인 값을 나타낼 것이다.

이러한 역 문제는 다양한 공학적 응용성에도 불구하고 수학적 부적절성으로 인하여 그 해를 구하는 것이 고전적인 문제(direct problem)에 비하여 매우 어렵다<sup>15)</sup>. 수학적 부적절 문제는 작은 오차에도 매우 민감한 특성으로 인하여 특별한 해석 방법이 요구되며, 따라서 최소 에너지기법이 경계요소식에 도입되어 공동 위치  $\Gamma_c$ 에 대한 해를 구하였다. Fig. 2는 공동 탐지 해석 흐름도를 나타낸다.

### 3. 경계요소식

대류열전달 경계 조건을 갖는 지배방정식 (1)은 경계요소법의 일반적인 유도과정<sup>8)</sup>을 통해 다음과 같은 경계적분식(boundary integral equation)으로 유도된다.

$$C_i k T_i = \int_{\Gamma} T q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q T^* d\Gamma - \int_{\Gamma} h_a T T^* d\Gamma \dots (5)$$

여기서  $C_i$ 는 경계의 형상에 따라 결정되는 상수 값,  $T^*$ 는 기본해(fundamental solution), 그리고  $q^*$ 는  $-k \frac{\partial T^*}{\partial n}$ 를 각각 나타낸다. 또한 적분식 (5)의 수치 해를 얻기 위해 적분항에 포함되어 있는  $T$ 와  $q$ 는 아래와 같은 선형함수로서 모델링될 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} T q^* d\Gamma &= T_j h^1_{ij} + T_{j+1} h^2_{ij} \\ \int_{\Gamma_j} q T^* d\Gamma &= q_j g^1_{ij} + q_{j+1} g^2_{ij} \dots \dots \dots (6) \\ \int_{\Gamma_j} h_a T T^* d\Gamma &= h_a T_j g^1_{ij} + h_{a,j+1} T_{j+1} g^2_{ij} \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} h^1_{ij} &= \int_{\Gamma_j} \phi_1 q^* d\Gamma, & h^2_{ij} &= \int_{\Gamma_j} \phi_2 q^* d\Gamma \\ g^1_{ij} &= \int_{\Gamma_j} \phi_1 T^* d\Gamma, & g^2_{ij} &= \int_{\Gamma_j} \phi_2 T^* d\Gamma \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

이다.  $h$ 와  $g$ 의 첫 번째 아래첨자는 온도가 계산된 특정 지점의 위치를 나타내며, 두 번째 아래첨자는 contour 적분이 수행된 경계 요소를 나타낸다. 또한 위첨자 1과 2는 각각 선형함수  $\phi_1$ 과  $\phi_2$ 로 가중된 적

분 식을 나타낸다.

식 (5)에서 전체 경계를  $N$ 개의 요소(element)로 나누고,

$$\hat{H}_{ij} = h^2_{i(j-1)} + h^1_{ij} \text{과 } G_{ij} = g^2_{i(j-1)} + g^1_{ij} \dots (8)$$

를 도입하여 그 결과를 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$C_i k T_i = \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} T_j - \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j - \sum_{j=1}^N G_{ij} h_j T_j \dots (9)$$

식 (9)에서 Kronecker delta  $\delta_{ij}$ 를 사용하여  $H_{ij} = \hat{H}_{ij} - C_i k \delta_{ij}$  라 두면 다음과 같은 일반식이 도출된다.

$$\sum_{j=1}^N (H_{ij} - G_{ij} h_j) T_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \dots (10)$$

최종적으로 식 (10)은 다음의 행렬식<sup>8)</sup>으로 간단히 표현될 수 있다.

$$[H]\{T\} = [G]\{q\} \dots (11)$$

여기서  $\{T\}$ 와  $\{q\}$ 는 본 논문에 해당하는 외부 및 내부 경계를 각각  $N/2$ 개의 요소로 나눌 때 각 절점에서의 온도 및 열유속을 나타내는 벡터이며, 그 성분은 각각

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_{N/2} \\ T_{N/2+1} \\ \vdots \\ T_N \end{Bmatrix} \text{과 } \{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{N/2} \\ q_{N/2+1} \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix} \dots (12)$$

으로 표현된다. 한편 물체 표면 즉 외부 경계에서는 대류열전달 조건이 주어지므로 이에 해당하는 절점 1에서  $N/2$ 까지의 열유속값은  $q = -h_a \bar{T}_e$ 의 조건을 갖는다. 행렬  $[H]$ 와  $[G]$ 는 각각 벡터  $\{T\}$ 와  $\{q\}$ 의 계수를 나타낸다.

#### 4. 최소 에너지기법

식 (1)-(4)는 참고 문헌<sup>15, 16)</sup>에 증명된 바에 따라서 아래와 같이 구속 조건을 갖는 최소 에너지 문제로 동등하게 전환될 수 있다.

$$\text{minimize } [J(T)] \dots (13)$$

$$\text{constraint } |T - \bar{T}_a| \leq \epsilon \dots (14)$$

여기서

$$J(T) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla T|^2 d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} T \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma \\ = -\frac{1}{2k} \int_{\Gamma} T q d\Gamma \dots (15)$$

이며, 정상 상태 온도장(temperature field)의 운동에너지 개념<sup>16)</sup>을 의미한다. 결국 원래의 역 열전도 문제는 식 (13), (14)를 만족하는 식 (4)의 온도 조건을 구하는 문제로 귀착되며, 그 해를 구하기 위해 경계요소 식이 이용된다.

식 (11)을 재 조합하면

$$[H]\{T\} = [G]\{q\} \dots (16)$$

의 형태로 표현된다. 여기서  $\{T\}$ 와  $\{q\}$ 는 식 (11)로부터 성분

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{N/2} \\ T_{N/2+1} \\ \vdots \\ T_N \end{Bmatrix} \text{과 } \{q\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_{N/2} \\ q_{N/2+1} \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix} \dots (17)$$

으로 정리될 수 있는 벡터이며  $[H]$  그리고  $[G]$ 는 오직 경계 요소의 기하학적 구조에만 의존하는 크기  $(N \times N)$  계수행렬을 나타낸다. 한편  $J(T)$ 는 외부 경계  $\Gamma_a$ 와 가상 내부 경계  $\Gamma_b$ 에 대하여 아래의 이산화된 식으로 표현될 수 있으며

$$J(T) = -\frac{1}{2k} \left[ \int_{\Gamma_a} T q d\Gamma + \int_{\Gamma_b} T q d\Gamma \right] \\ = -\frac{1}{2k} \left[ \sum_{j=1}^{N/2} \int_{\Gamma_j} T q d\Gamma + \sum_{j=N/2+1}^N \int_{\Gamma_j} T q d\Gamma \right] \dots (18)$$

여기서 각 적분항을 선형함수  $\phi_1$ 과  $\phi_2$ 로서 표현하고 가상 내부경계  $\Gamma_b$ 를 동일 크기의 경계요소  $\Gamma_j = \delta$ 로 나누면

$$J(T) = -\frac{1}{2k} \left[ \sum_{j=1}^{N/2} T_j q_j \Gamma_j + \sum_{j=N/2+1}^N T_j q_j \delta \right] \dots (19)$$

이며, 외부 경계  $\Gamma_a$ 에서의  $T_j$ 와  $q_j$ 는 경계 조건에 의해 주어지는 값이다. 따라서 표현식 (16)에서  $\{q\} = [G]^{-1}[H]\{T\}$ 을 식 (15)에 대입 정리하고  $[P] = [G]^{-1}[H]$ 라 두면 식 (13)은 다음과 같이 최소 값을 구하는 문제로 귀결된다.

$$\begin{aligned} \text{minimize } [J(T)] &= \min. \left[ \sum_{j=1}^N T_j q_j \right] = \\ \text{min. } & [\{T\}^t [P] \{T\}] \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

또한  $N \times N$ 행렬  $[P]$ 를 각각 크기가  $N/2 \times N/2$ 인 4개의 부분행렬

$$[P] = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (21)$$

로 나누고, 위와 동일한 방법을 적용하면 구속조건 식 (14)는 아래 식으로 유도된다.

$$| [P_{11} \ P_{12}] \{T\} - \{ \bar{T}_a \} | \leq \{ \epsilon \} \dots\dots\dots (22)$$

여기서  $\{ \bar{T}_a \}$ 는 측정 온도 벡터 ( $\bar{T}_{a1}, \bar{T}_{a2}, \dots, \bar{T}_{aN/2}$ ),  $\{ \epsilon \}$ 은 각 표면 경계 절점에서의 측정 온도에 해당하는 오차값을 나타내는 벡터이다. 결국 식 (1)-(4)의 공동탐지를 위한 기하학적 역 열전도 문제는 구속 조건 식 (22)를 만족하면서 식 (20)을 최소화하는 가상 경계에서의 온도  $T_{N/2+1}, T_{N/2+2}, \dots, T_N$ 을 찾는 문제로 정리된다.

한편 위 식 (20)과 (22)는

$$\Psi = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{N/2} \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} T_{N/2+1} \\ T_{N/2+2} \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

라고 두면 아래와 같은 quadratic programming 문제로 표현된다.

$$\begin{aligned} \text{minimize : } & \{ \Psi^t, \Phi^t \} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ \Phi \end{bmatrix} \\ & = \Psi^t P_{11} \Psi + \Psi^t P_{12} \Phi + \Phi^t P_{21} \Psi + \Phi^t P_{22} \Phi \dots\dots (24) \end{aligned}$$

$$\text{constraint : } | P_{11} \Psi + P_{12} \Phi - \{ \bar{T}_a \} | \leq \{ \epsilon \}$$

여기서 벡터  $\Psi$ 는 알려져 있는 물체 표면의 경계 조

건이고, 벡터  $\Phi$ 는 가상 경계  $\Gamma_b$ 에 주어지는 미지의 온도 조건이다. 본 논문에서는 식 (24)의 벡터  $\Phi$ 를 구하기 위하여 MATLAB Optimization Toolbox의 quadratic programming routine<sup>17)</sup>을 이용하였으며, 구해진 온도 조건은 다시 원래의 경계요소식 (11)의 입력 조건으로 사용되어 정상적인 경계요소법의 해석 과정에 따라 경계에서의 온도 및 열유속 조건을 완전히 결정된 후 주어진 내부점에서의 온도를 결정하였다.

### 5. 수치 해석

최소 에너지기법을 이용한 경계요소법의 공동 탐지 알고리즘은 다음과 같은 단계로 구성된다.

- 1) 검사 대상 물체 내부에 가상적인 내부 경계로서 작은 원을 도입하며, 원의 반경과 중심 위치를 가정하여 기하학적 위치 및 크기를 가정한다.
- 2) 경계 요소 해석을 위하여 외부 및 내부 경계의 절점좌표, 물체의 열물성치(thermophysical properties) 그리고 적외선 스캐닝에 의해 측정된 표면 온도 등의 자료를 입력한다.
- 3) 경계 요소 해석을 수행하여  $[H]$ 와  $[G]$  행렬을 계산한다.
- 4) 표면 온도 측정 오차의 구속 조건을 갖는 최소 에너지기법을 이용하여 가정된 내부 경계에서의 온도 분포를 구한다.
- 5) 위에서 구한 온도 분포를 내부 경계 조건으로 입력하여 경계 요소 해석을 수행, Fig. 1(b)와 같은 내부점에서의 온도 분포를 계산한다.
- 6) 실제 공동에 가해진 특정 온도 조건을 만족하는 점들을 찾아 공동의 위치를 결정한다.
- 7) 가정된 작은 원이 적절치 않았다면 반경과 중심 위치를 다시 가정하여 위의 단계들을 반복한다.

본 논문에서의 수치적 실험을 위하여 Fig. 1(a)의 물체에 대해 아래와 같은 조건들을 취하였다.

- 공동(cavity)의 온도 조건 :  $\bar{T}_c = 100 \text{ }^\circ\text{C}$
- 열전도도 :  $k = 40 \text{ W/m }^\circ\text{C}$
- 대류열전달계수 :  $h_a = 25 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$
- 대기온도 :  $\bar{T}_e = 20 \text{ }^\circ\text{C}$
- 측정 오차 :  $\epsilon = 0.001 \text{ }^\circ\text{C}$

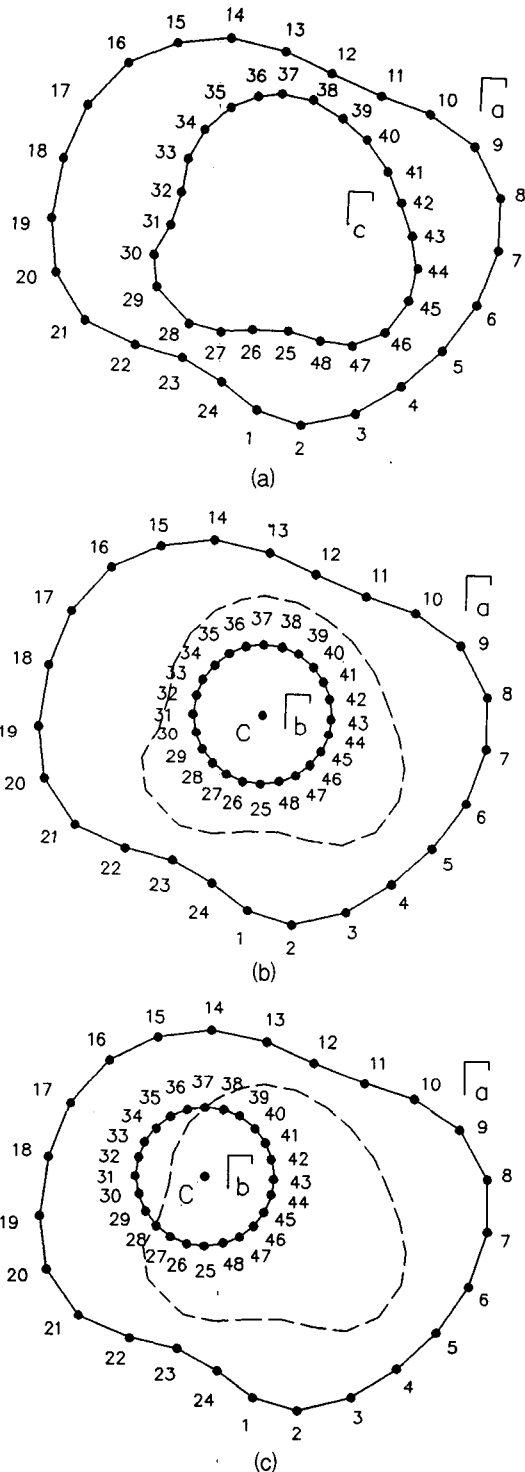


Fig. 3. Discretized geometry of the test system for direct and inverse analysis

한편 표면 온도 자료  $\overline{T}_a$ 를 생성하기 위하여 일반적인 열전도 문제를 우선적으로 풀었다. 검사 대상 물체는 저자에 의해 개발되어온 방법<sup>9, 12)</sup>들을 시험하기 위해 채택되어 온 형상이다. 여기서 경계  $\Gamma_a$ 와  $\Gamma_c$ 는 Fig. 3(a)와 같이 24개의 경계 요소로 각각 나누었으며, 얻어진 표면 온도는 역 열전도 문제에서 공동의 위치  $\Gamma_c$ 를 구하기 위한 측정 온도 조건으로 사용되었다. 이러한 방법은 수치적 방법으로 해법을 시험, 확인하기 위한 통상적인 관행이다. 또한 Fig. 3(b), 3(c)와 같이 경계  $\Gamma_a$ 와  $\Gamma_b$ 에서도 각각 24개의 경계 요소가 이용되었으며, 특히  $\Gamma_b$ 는 동일 크기의 경계 요소로 나누어졌다. 결국 수치적으로 생성된 측정 표면 온도  $\overline{T}_a$ 와 위에 주어진 자료를 미지의 공동 탐지를 위한 입력 자료로 사용하였다.

### 6. 결과 및 고찰

본 연구에서의 수치적 실험은 이전의 접근 방법<sup>12)</sup>과 같이 두 가지 경우에 대해 수행되었다. 첫 번째 경우는 Fig. 3(b)와 같이 경계  $\Gamma_b$ 로서 원점을 중심으로 한 반경 0.6의 작은 원을 선택하였고, 두 번째 경우는 Fig. 3(c)와 같이 임의로 선정하였다. 분명한 것은 이 경우들이 원형의 경계  $\Gamma_b$ 가 적절히 위치한 경우와 그렇지 않은 경우를 나타내는 두 가지 가능성들이다. 여기서 두 번째 경우에는 탐지 알고리즘에 따라 적절한 작은 원의 위치 및 크기를 가정할 수 있는 결과를 얻을 수 있어야 할 것이다.

Fig. 4에서 Fig. 7까지는 두 가지 경우에 대한 해석 결과를 나타내며, 특히 Fig. 4와 Fig. 6에서의 (x)표시는 탐지된 공동 위치 즉  $\overline{T}_c = 100^\circ\text{C}$ 의 위치를 표시한다. 또한 Table 1은 적외선 스캐닝 측정 오차  $\epsilon = 0.001^\circ\text{C}$ 의 구속 조건을 갖는 최소 에너지기법을 적용하여 얻어진 가상 내부 경계  $\Gamma_b$ 에서의 온도 분포를 나타낸다. 이 분포 결과는 내부 경계가 적절히 가정된 첫 번째 경우의 온도가 그렇지 않은 두 번째 경우에 비하여  $10^3$  정도로 온도의 변동이 적음을 보여준다. 한편 Table 1의 결과를 이용한 경계 요소 해석으로부터 계산된 물체 표면 온도는 Table 2에서와 같이 두 가지 경우에 대해 모두 주어진 측정 오차 구속 조건을 만족한다.

Table 1. Temperature solution at the boundary  $\Gamma_b$  by minimum energy technique

Node #	1st test case (°C)	2nd test case (°C)
25	2.444260729249000e+002	-4.258203990279856e+004
26	-3.036515226225692e+002	1.177435741642362e+005
27	7.051016539336692e+002	-2.243585951129490e+005
28	-4.528308797116982e+002	3.747707670184698e+005
29	9.285045780847290e+002	-5.661267591459153e+005
30	-5.653021212004021e+002	7.785955978383058e+005
31	5.593147450110714e+002	-9.776844123072664e+005
32	-1.826636301105920e+002	1.142613984237597e+006
33	2.794368003095778e+002	-1.273801077988807e+006
34	9.095281735557344e+001	1.339213542313412e+006
35	-5.662687536049020e-001	-1.239923262267533e+006
36	4.556240116831808e+002	9.208780912796660e+005
37	-4.067411721427878e+002	-4.77771622236900082e+005
38	8.812105927113333e+002	9.284940626618558e+004
39	-7.722185515912637e+002	1.309471959172690e+005
40	1.067846463450784e+003	-2.174221017040726e+005
41	-8.127223825804002e+002	2.388125287937302e+005
42	1.036113667085505e+003	-2.414883014551225e+005
43	-7.287726224848041e+002	2.415378367330175e+005
44	9.129758216705424e+002	-2.316777256709259e+005
45	-8.349306880360142e+002	1.990980249649060e+005
46	1.625625895722906e+003	-1.399949186347135e+005
47	-8.769255799565180e+002	7.528151204926557e+004
48	4.131351505841772e+002	-1.625269345703449e+004

Table 2. Temperature solution at boundary  $\Gamma_a$  by boundary element analysis

Node #	1st test case (°C)	2nd test case (°C)	Scanned data (°C)	Error
1	0.7442999E+02	0.7442999E+02	0.7442899E+02	0.001
2	0.7212007E+02	0.7212007E+02	0.7212107E+02	0.001
3	0.7458630E+02	0.7458630E+02	0.7458530E+02	0.001
4	0.7815516E+02	0.7815516E+02	0.7815616E+02	0.001
5	0.7836874E+02	0.7836874E+02	0.7836774E+02	0.001
6	0.7474837E+02	0.7474837E+02	0.7474937E+02	0.001
7	0.7065891E+02	0.7065891E+02	0.7065791E+02	0.001
8	0.6825796E+02	0.6825796E+02	0.6825896E+02	0.001
9	0.6962013E+02	0.6961813E+02	0.6961913E+02	0.001
10	0.7517967E+02	0.7518167E+02	0.7518067E+02	0.001
11	0.8342455E+02	0.8342255E+02	0.8342355E+02	0.001
12	0.8664910E+02	0.8665110E+02	0.8665010E+02	0.001
13	0.8209198E+02	0.8208998E+02	0.8209098E+02	0.001
14	0.7461989E+02	0.7462189E+02	0.7462089E+02	0.001
15	0.6935381E+02	0.6935181E+02	0.6935281E+02	0.001
16	0.6562463E+02	0.6562663E+02	0.6562563E+02	0.001
17	0.6404640E+02	0.6404640E+02	0.6404540E+02	0.001
18	0.6426763E+02	0.6426563E+02	0.6426663E+02	0.001
19	0.6452423E+02	0.6452623E+02	0.6452523E+02	0.001
20	0.6518890E+02	0.6518757E+02	0.6518857E+02	0.001
21	0.6870183E+02	0.6870183E+02	0.6870083E+02	0.001
22	0.7752676E+02	0.7752676E+02	0.7752776E+02	0.001
23	0.8505758E+02	0.8505758E+02	0.8505658E+02	0.001
24	0.8092652E+02	0.8092652E+02	0.8092752E+02	0.001

첫 번째 경우에 대하여 공동의 위치는 Fig. 4와 같이 매우 정확하게 탐지되었다. 또한 Fig. 5는 주어진 영역에 대한 온도 분포를 3차원으로 여러 각도에서 보여준다. 여기서 실제 공동과 가상 내부 경계 사이의 확장 영역  $\Omega' - \Omega$ 에서는 온도 분포가 매우 불규칙함을 보여주지만 이는 앞에서 언급한 바와 같이 물리적 의미를 갖지 않는 영역이며, 따라서 탐지 알고리즘에서는 외부 표면에서 가상 내부 원의 중심방향으로 주어진 온도 조건점들을 찾아감으로서 실제 영역  $\Omega$ 를 효과적으로 결정한다. 특히 온도 조건을 만족하는 점 중에서 공동 경계에 해당하는 점들은 가상 원의 중심에서 바깥쪽의 점들이고 안쪽에 위치한 점들은 명백히 확장 영역에 해당하므로 주어진 온도 조건을 만족할지라도 무시되었다. 한편 경계요소법을 이용한 이전의 공동 탐지해법<sup>9, 12-14)</sup>에서는 해가 구해지는 계수 행렬(coefficient matrix)의 ill-condition 문제에 따른 해의 불안정성이 항상 중요한 문제가 되었으나 최소 에너지 기법에서는 항상 well-condition의 계수행렬을 다루기 때문에 이러한 문제를 피할 수 있고, 따라서 역문제의 수치 해석 문제에서 가장 중요한 해의 안정성 및 수렴성을 얻을 수 있다.

두 번째 경우, 잘못 위치한 내부 원  $\Gamma_b$ 는 공동의 위치 탐지에 대한 중요한 결과를 제공한다. Fig. 6은 탐지된 결과를 보여 주며, 이들은 원  $\Gamma_b$ 가 실제 공동을 가로 질러 위치해 있음을 명백히 나타낸다. 또한 이 결과는 공동의 위치에 대한 만족할 만한 해를 구하기 위하여 원  $\Gamma_b$ 를 다시 적절히 가정할 수 있는 근거를 제공하며, 여기서 가상 내부 원  $\Gamma_b$ 는 공동 내부에 위치하도록 반경과 중심 위치가 조정되어야 한다. 본 연

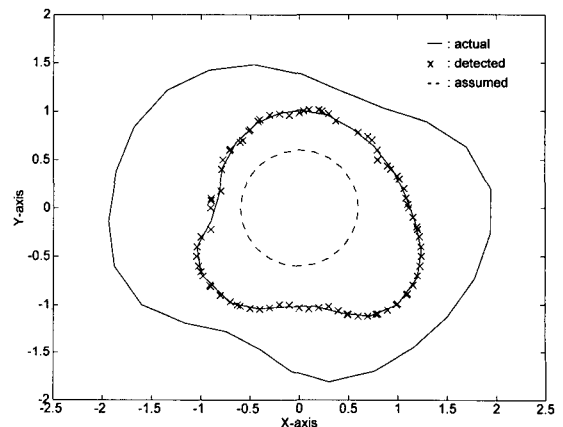


Fig. 4. Detected cavity positions for the first test case

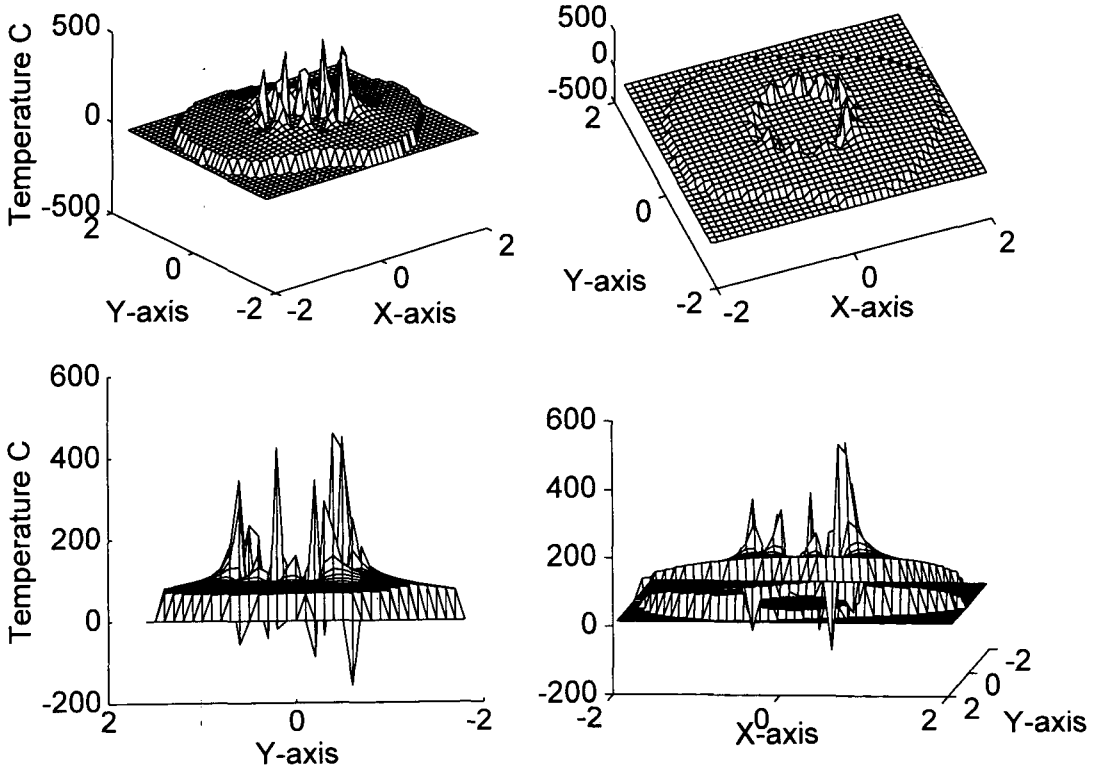


Fig. 5. 3-dimensional view of the temperature distribution at different view angle for the first test case

구에서는 원의 중심 위치를 Fig. 6의 일부 탐지된 공동 경계의 방향으로 이동시키는 것으로 충분하지만, 일단 조정된 가상 원을 이용한 탐지 결과는 좀더 근접한 공동 경계를 나타낼 것이므로 필요에 따라 원의 반경도 함께 변화시킨 후 다시 공동 탐지 해석을 행하는 반복 과정을 수행한다. Fig. 7은 여러 각도에서의 3차원 온도 분포이며 수직축(z-axis)의 온도 척도에 주목할 때 극심한 불규칙상태의 온도 변화를 보여주고 있다. 이는 가정된 원의 위치가 부적절하다는 것을 나타내는 간접지표로서 이용될 수 있다.

마지막으로 위 결과들은 가상 경계  $\Gamma_b$ 의 선택에 관계없이 최소 에너지법을 적용한 경계 요소 해석 알고리즘을 기존의 정규화 방법에 의한 동일 문제의 경계 요소 해석 결과<sup>12)</sup>와 비교할 때 정규화계수의 선택에 따른 탐지 정확성 문제, 이에 따른 최적의 정규화계수 선정의 어려움, 그리고 탐지 정확도가 높은 정규화계수의 사용으로 인한 해의 불안정성 증가 문제

등을 피할 수 있는 정확하고 안정된 공동 탐지 해법임을 보여주고 있다.

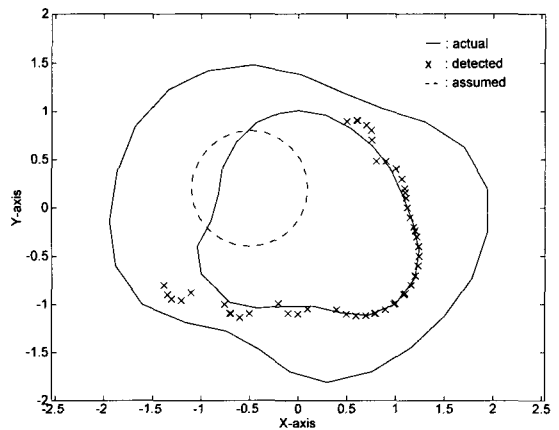


Fig. 6. Detected cavity positions for the second test case



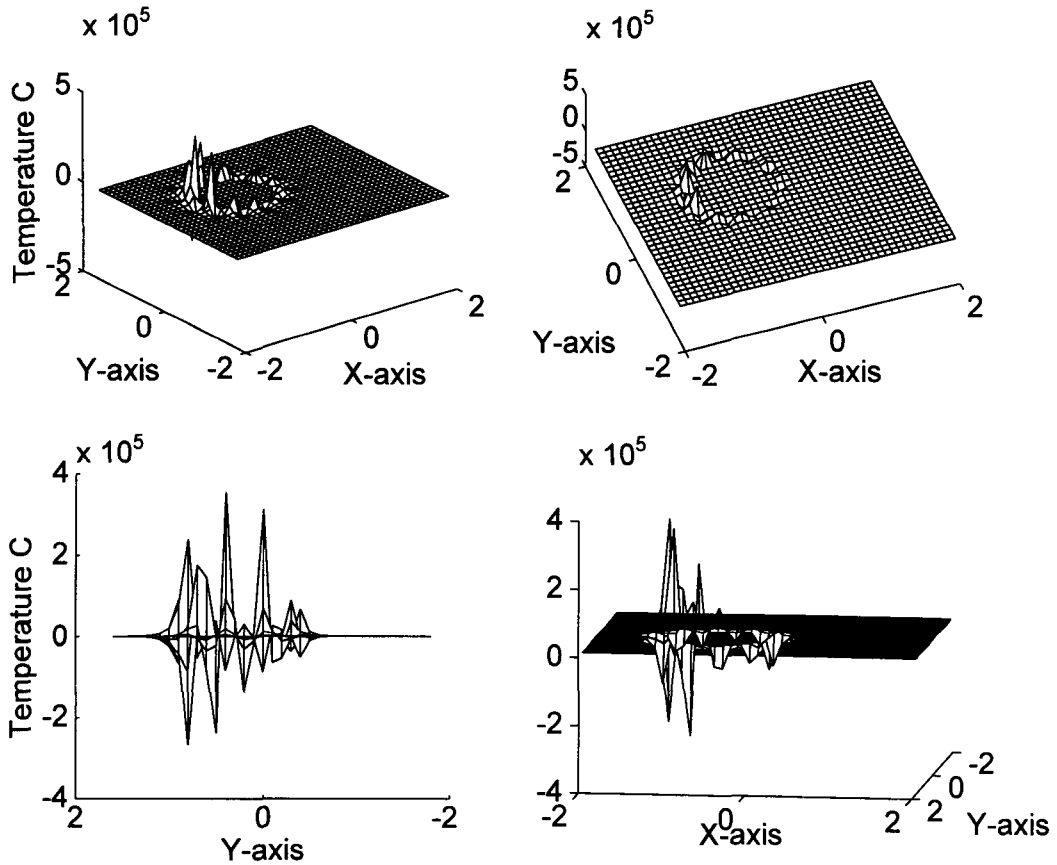


Fig. 7. 3-dimensional view of the temperature distribution at different view angle for the second test case

7. 결론

물체 내부 열원의 정상 상태 응답을 적외선 스캐닝 하여 미지의 공동을 탐지하는 기하학적 역 열전도 문제에 대하여, 최소 에너지기법을 적용한 경계 요소 해법을 개발하고 두 가지 경우로 선택된 가상 경계에 대하여 시험한 결과는 다음과 같다.

- 1) 원래의 역 열전도 문제를 경계요소식에 에너지 최소화 과정을 적용한 quadratic programming 문제로 전환함으로써 수치적으로 안정된 해석 과정을 개발하였다.
- 2) 가상 내부 경계가 적절히 선정된 경우, 탐지된 공동 위치는 실제 공동 위치와 잘 일치한다. 또한 가상된 확장 영역에서의 온도 분포는 불규칙한 변화를 보이지만 탐지 정확도에 영향을 미치지 않는다.

3) 가상 경계의 위치가 부적절하게 선정된 경우에 대해서도, 항상 가상 경계의 위치를 적절히 예측할 수 있는 명확한 결과를 얻을 수 있다. 이 경우의 가상된 확장 영역에서의 온도 분포는 앞의 경우에 비하여  $10^3$  정도로 온도의 변동이 크게 나타남을 보여준다.

4) 최소 에너지기법의 적용은 항상 well-condition의 경계 요소 계수행렬을 구성하며, 따라서 이는 기존의 방법에 비하여 안정성, 수렴성 및 정확성을 보장하는 적외선 스캐닝 공동 탐지 해법이다.

후 기

이 논문은 1996년도 전주대학교 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

## 참고 문헌

- 1) G. Gaussorgues, *Infrared Thermography*, Chapman & Hall, London, (1994), pp. 414-452
- 2) V. P. Vavilov, "Advances in Signal Inversion with Applications to Infrared Thermography", *Advances in Signal Processing for Non-destructive Evaluation of Materials*, ed. X. P. V. Maldague, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1994), pp. 161-184
- 3) A. J. Kassab, J. Pollard, C. K. Hsieh and L. C. Chew, "BEM Solution of the Inverse Geometric Problem-Experimental Results", *Boundary Elements XVII*, eds. C. A. Brebbia, S. Kim, T. A. Osswald and H. Power, Computational Mechanics Publications, Boston, (1995), pp. 323-329
- 4) X. Maldague, *Nondestructive Evaluation of Materials by Infrared Thermography*, Springer-Verlag, New-York, (1992)
- 5) C. K. Hsieh, W. A. Ellingson and K. C. Su, "A Model Study for Quantitative Flaw Detection Using Infrared Scanning", *Brit. J. Non-destruct. Evaluation*, (1979), pp. 185-192
- 6) C. K. Hsieh and K. C. Su, "A Methodology of Predicting Cavity Geometry Based on the Scanned Surface Temperature Data-Prescribed Surface Temperature at the Cavity Side", *J. Heat Transfer*, Vol. 102(1980), pp. 324-329
- 7) C. K. Hsieh and A. J. Kassab, "A General Method for the Solution of Inverse Heat Conduction Problems with Partially Unknown System Geometries", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 29(1986), pp. 47-58
- 8) C. A. Brebbia, J. C. F. Telles and L. C. Wrobel, *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, New-York, (1984)
- 9) C. K. Hsieh, C. -Y. Choi and K. M. Liu, "Domain-Extension Method for Quantitative Detection of Cavities by Infrared Scanning", *J. Nondestruct. Evaluation*, Vol. 8(1989), pp. 195-211
- 10) A. J. Kassab and J. E. Pollard, "Automated Algorithms for the Nondestructive Detection of Subsurface Cavities by the IR-CAT Method," *J. Nondestruct. Evaluation*, Vol. 12(1993), pp. 175-187
- 11) A. J. Kassab and C. K. Hsieh, "Application of Infrared Scanners and Inverse Heat Conduction Methods to Infrared Computerized Axial Tomography", *Rev. Sci. Instrum.*, Vol. 58(1987), pp. 89-95
- 12) 최창용, 박천태, 김태한, 한기남, 최순호, "IR CAT Scan 개발을 위한 기하학적 역 열전도 문제의 경계요소 해법", *비파괴검사학회지*, 제15권, 제1호(1995), pp. 299-309
- 13) Chang Yong Choi and Hong Gun Kim, "Higher Order Regularization Effects on the Boundary Element Solution of Inverse Problem", *J. of the Institute of Engineering Research, Jeonju Univ.*, Vol. 2, No. 1(1996), pp. 39-47
- 14) C. Y. Choi and H. G. Kim, "Boundary Element Solutions of the Geometrical Inverse Heat Conduction Problems Using Regularization Procedure", *Proceedings of the 2nd European Thermal-Sciences and 14th UIT National Heat Transfer Conferences*, Vol. 2(1996), pp. 1089-1095
- 15) D. B. Ingham and Y. Yuan, "The Boundary Element Method for Solving Improperly Posed Problems", *Computational Mechanics Publications*, Southampton, (1994)
- 16) D. B. Ingham and Y. Yuan, "Boundary Element Solutions of the Steady State, Singular, Inverse Heat Transfer Equation", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 37, Suppl.1 (1994), pp. 273-280
- 17) A. Grace, *Optimization Toolbox User's Guide*, The MathWorks Inc, (1992)

## Detection of Cavities by Inverse Heat Conduction Boundary Element Method Using Minimal Energy Technique

C. Y. Choi

Dept. of Mechanical Engineering, Jeonju Univ., Jeonju 560-759

**Abstract** A geometrical inverse heat conduction problem is solved for the infrared scanning cavity detection by the boundary element method using minimal energy technique. By minimizing the kinetic energy of temperature field, boundary element equations are converted to the quadratic programming problem. A hypothetical inner boundary is defined such that the actual cavity is located interior to the domain. Temperatures at hypothetical inner boundary are determined to meet the constraints of measurement error of surface temperature obtained by infrared scanning, and then boundary element analysis is performed for the position of an unknown boundary (cavity). Cavity detection algorithm is provided, and the effects of minimal energy technique on the inverse solution method are investigated by means of numerical analysis.