

3차원 대칭단면 유동장에서의 개선된 난류모델

손 창 현^{*1}

Improved Turbulence Model on the 3 Dimensional Plane of Symmetry Flow

C.H. Sohn

Two versions of anisotropic $k-\epsilon$ turbulence model are incorporated in the modified $k-\epsilon$ model of Sohn et al. to avoid the need for the experimental normal stress value in the model and applied to convergent and divergent flows with strong and adverse pressure gradients in the plane of symmetry of a body of revolution. The models are the nonlinear $k-\epsilon$ model of Speziale and the anisotropic model of Nisizima & Yoshizawa. All of the models yield satisfactory results for relatively complex flow on a plane-of-symmetry boundary layer. The results of the models are compared with those results of experimental normal stress value.

Key Words : 비등방성 $k-\epsilon$ 모델(anisotropic $k-\epsilon$ model), 대칭단면 유동(plane of symmetry flow) 레이놀즈 법선응력(Reynolds-normal-stress), 역압력 구배 유동(Adverse pressure gradient flow), 와류 인장(Vortex Stretching)

1. 서론

항공기, 자동차, 선박 및 잠수함 등의 대부분은 3차원 중앙 대칭단면을 가지고 있다. 3차원 중앙 대칭 단면에서는 대칭단면을 통한 유속의 흐름은 없지만 대칭단면에서의 유속의 미분은 영이 아니다. 즉 유동의 흐름이 대칭단면으로 수렴(convergence)되던가 발산(divergence)되는 유동이 존재하며, 이로 인해 대칭단면에서의 유동은 2차원 유동과는 다른 복잡한 유동이 된다. 그러나 기존의 대부분의 난류모델은 2차원 유동장에서의 실험을 통해 유도 된 것으로 3차원 대칭 단면에서의 이들 난류모델의 적용은 실

험과 많은 차이가 나고 있다.[1]

Pope[2]는 와류(vortex)의 영향을 고려한 난류모델을 제안하여 축대칭 제트 난류유동에 적용한 결과 표준 $k-\epsilon$ 난류모델보다 정확한 제트 폭의 증가율을 예측하였다. Hanjalic과 Launder [3]는 실험적인 관측으로부터 난류에너지 소산율이 전단응력(shear stresses) 외에 법선응력(normal stresses)에도 크게 영향을 받음을 알고, 법선응력의 영향을 크게 한 수정 $k-\epsilon$ 난류모델을 제시하였다. 이 난류모델은 역압력구배가 큰 2차원 평판유동에 적용한 결과 매우 향상된 결과를 주지만 축대칭 제트유동에 대해서는 제트 폭이 실험치와 차이가 있어 만족 할만한 결과를 보여주지 못하였다. Rodi와 Scheuerer[4] 및 Nagano와 Tagawa[5]도 Hanjalic & Launder의 모델을 사용하여 역압력 구배가 큰 2차원 평

^{*1}정회원, 경북대학교 기계공학부

판유동을 계산해 실험치와 잘 일치함을 재 입증 하였다.

Sohn등[6,7]은 3차원 대칭단면에서 일어나는 강한 역압력 구배 및 수렴과 발산유동을 예측하기 위하여 Hanjalic 과 Launder[3]의 난류모델 및 Pope[2]의 와류의 영향을 고려해준 난류모델을 결합한 새로운 난류모델을 제시하였다. 그런데 Hanjalic과 Launder[3]의 난류모델은 이 모델에 필요한 법선응력들을 실험으로부터 구하여 사용하였으나, 법선응력 값은 각 유동에 따라 다른 값을 가지고 복잡한 형상에의 적용이 곤란하므로 법선응력 값을 실험에 의존하지 않는 보다 일반적인 방법이 필요하다.

본 연구에서는 역압력 구배와 함께 수렴 및 발산유동이 동시에 일어나는 3차원 대칭단면에서의 난류유동을 계산하기 위하여 제시된 Sohn 등의 난류 모델에 법선응력 값을 실험으로부터 구하여 사용하지 않는 방법을 제시하고 이를 실험과의 비교를 통해 3차원 대칭단면에서의 난류 유동 계산이 표준 k-ε 난류모델보다 향상되는 것을 보여 주고자 한다.

2. 지배방정식

표면 직교 곡선 좌표계에서 정상, 비압축성, 난류경계층의 대칭단면에 대한 연속방정식과 운동량방정식은 다음과 같이 된다[8].

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + W_1 + K_{31}U = 0 \tag{1}$$

$$\frac{U}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{uv}) - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{U}{h_1} \frac{\partial W_1}{\partial x} + V \frac{\partial W_1}{\partial y} + W_1^2 + 2K_{31}UW_1 + \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial W_2}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} = 0 \tag{3}$$

여기서

$$W_1 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial W}{\partial z}, \quad W_2 = \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w})$$

이며, (U, V, W)는 (x, y, z)방향의 평균 속도를 나타내고, h₁, h₃은 x, z방향의 좌표변환 계수이다. 대칭단면에서 Fig. 1과 같은 회전체의 축을 따른 길이를 X라 했을 때 회전체의 반경을 r(X)로 표시한다면 좌표변환상수와 곡률계수는 다음과 같다.

$$h_1 = \left(1 + \left(\frac{\partial r}{\partial X} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad h_3 = r(X), \tag{4}$$

$$K_{31} = \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial X}$$

2차원 평판유동의 경우 W₁ = W₂ = K₃₁ = 0이며, h₁=1, h₃=∞ 이다.

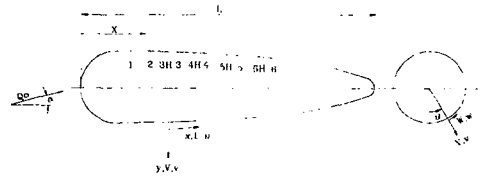


Fig. 1 Geometry of a combination body and coordinate system.

경계층 바깥에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$y = 0 \text{에서 } U = W_1 = 0 \tag{5}$$

$$y = \delta \text{에서 } U = U_e, \quad W_1 = W_{1e}$$

여기서 U_e, W_{1e}는 경계층 바깥에서의 값을 나타내는데, 본 계산에서는 실험치를 사용하였다. 경계층방정식을 풀기 위한 경계조건으로의 압력 분포식은 다음 Bernoulli관계식으로부터 구한다.

$$-\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{U_e}{h_1} \frac{\partial U_e}{\partial x} \tag{6}$$

$$-\frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{U_e}{h_1} \frac{\partial W_{1e}}{\partial x} + W_{1e}^2 + 2K_{31}U_e W_{1e}$$

이들 경계층방정식의 계산은 지금까지 많이 사

용되어 온 Crank-Nicolson법을 이용한 Chang과 Patel [9]의 프로그램을 이용하여 수행하였다.

3. 수정 k-ε 난류모델

Hanjalic과 Launder의 k-ε 난류모델과 Pope의 와류항을 고려한 k-ε 난류모델을 결합하면 k와 ε에 대한 전달방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{U}{h_1} \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right) + P_k - \epsilon \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{U}{h_1} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = & \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) \quad (8) \\ & + c_\epsilon \frac{\epsilon}{k} P_\epsilon - \frac{\epsilon^2}{k} (c_{\epsilon 2} - c_{\epsilon 1} \chi) \end{aligned}$$

여기서

$$P_k = P_{k,s} + P_{k,n} = -\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial y} + \left[-(\overline{u^2} - \overline{v^2}) \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial x} + (\overline{v^2} - \overline{w^2})(W_1 + K_{31}U) \right] \quad (9)$$

$$P_\epsilon = P_{\epsilon,s} + \frac{C_{\epsilon 3}}{C_{\epsilon 1}} P_{k,n} \quad (10)$$

이며, 모델상수 $C_k, C_\epsilon, C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}, C_{\epsilon 4}$ 의 값은 1.0, 1.3, 1.44, 1.92, 0.4 이고 Nagano와 Tagawa [5]가 사용한 $C_{\epsilon 3} = 2.5C_{\epsilon 1}$ 의 값을 사용하였다. 그리고 $P_{k,n}$ 은 (9)식의 밑줄 친 항으로 법선응력에 의한 난류 에너지 생성항 (production term)을 나타내며, χ 는 무차원 vortex stretching invariant로 $\chi = \omega_{ij}\omega_{jk}S_{ki}$ 로 정의된다. 여기서

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \frac{k}{\epsilon} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \omega_{ij} = \frac{1}{2} \frac{k}{\epsilon} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (11)$$

이며, 대칭단면에 적용한 식은 다음과 같다.

$$x = \frac{1}{4} \left(\frac{k}{\epsilon} \right)^3 \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{1}{h_3} \left| \frac{\partial W}{\partial z} \right| + K_{31}U \right) \quad (12)$$

k-ε 난류모델에서 난류응력항은 다음과 같이 주어진다.

$$-\overline{uw} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y}, -\overline{vw} = \nu_t \frac{\partial W}{\partial y}; \nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (13)$$

(9)식을 살펴보면 2차원 평판유동의 경우 $P_{k,n}$ 의 두 번째 항은 영이 되고, 또 압력구배가 없는 유동의 경우 $P_{k,n}$ 의 첫 번째 항은 영이 되어 표준 k-ε 난류모델과 같아짐을 알 수 있다. 역압력 구배인 감속하는 유동에서는 $P_{k,n}$ 의 첫 번째 항이 양의 값이 되어 생성항이 커지게 되어 k와 ε모두 증가하게 된다. $P_{k,n}$ 의 영향은 (10)식에서와 같이 ε-방정식에서 전단응력항보다 법선응력항에 의한 영향을 $C_{\epsilon 3}/C_{\epsilon 1}$ 만큼 크게 해주어 ε값이 k값에 비해 크게 증가되어 (13)식에 의해 ν_t 를 감소시켜 주게 된다. 표준 k-ε 난류모델이 평판 유동에서는 실험치와 잘 일치하는 반면, 역압력 구배가 있는 평판 유동에서는 실험치에 비해 상당히 높은 마찰 계수(C_f)을 예측하는데 비해 Hanjalic과 Launder의 모델은 앞에서 설명한 이유에 의해 ν_t 의 감소로 인해 마찰계수가 낮아져 실험과 잘 일치할 수 있었다.

(12)식을 살펴보면 2차원 평판유동의 경우에 $\partial W/\partial z = 0$ 이고 $K_{31} = 0$ 이므로 χ 값은 영이 되어 (8)식은 Hanjalic과 Launder의 난류모델과 같아지고, 대칭단면에서의 속도 미분 값이 영이 아닌 경우 ($\partial W/\partial z \neq 0$), 즉 와류가 인장을 하거나 압축될 때 χ 값은 양의 값을 가지게 된다. χ 가 양의 값으로 되면 ε-방정식의 생성항이 증가되어 ε값을 크게 해주어 그 결과로 ν_t 를 감소시켜줄 수 있다. 이와 같은 χ 의 변화는 기존의 난류 모델이 수렴 및 발산 유동이 존재하는 대칭단면에서 실험치에 비해 상당히 큰 ν_t 를 예측하는 것을 개선할 수 있는 난류모델을 제시한 것으로 Sohn등은 (8)식의 난류 모델에 실험치의 법선응력을 이용하여 대칭단면 유동에서 좋은 결과를 얻었다.

실험치의 법선응력을 사용하지 않고 등방성 난류 모델인 표준 k-ε 난류모델로 부터 법선응력을 구한다면 실험과는 달리 $\overline{u^2} \approx \overline{v^2} \approx \overline{w^2}$ 이 되어 $P_{k,n}$ 값은 거의 영이 되므로 (9)식을 사용하여 역압력 유동장에서의 계산이 개선되지 않

는다. 이와 같은 문제를 해결하기 위해 Hanjalic과 Launder[3]는 법선응력값을 실험치로 이용하게 되었으나 법선응력은 각각의 유동에 따라 다른 값을 가질 뿐만 아니라 기하학적 형상이 복잡한 물체의 경우에 적용이 곤란하다. 또한 실험치를 이용하는 경우에는 이들 법선응력 값이 좌표 변환에 따른 불변량이 아니기 때문에 실험에 의존하지 않고 법선응력을 구할 수 있는 방법이 필요하다. 본 연구에서는 이와 같은 목적을 위해 비등방성 난류모델인 Yoshizawa[10, 11]의 모델과 Speziale[12]의 난류모델을 사용하여 법선응력의 표현으로 사용하였다. 부록에서는 두 비등방성 난류모델의 법선응력을 2차원 일반 직교좌표의 경우에 대하여 유도하였으며, 이 식들은 경계층 근사를 하지 않은 보다 일반적인 유동장에서도 적용이 가능하다. 이들 모델들을 대칭단면에서 경계층근사를 하면 다음과 같다.

Yoshizawa의 비등방성 모델[10, 11]

$$\begin{aligned}\frac{\overline{u^2}}{k} &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(2c_{11} - c_{33})\left(\frac{k}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \\ \frac{\overline{v^2}}{k} &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(c_{11} - 2c_{33})\left(\frac{k}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \\ \frac{\overline{w^2}}{k} &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(c_{11} + c_{33})\left(\frac{k}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\end{aligned}\quad (14)$$

여기서 $c_{11} = 0.07$, $c_{33} = -0.015$ 이다.

Speziale의 비등방성 모델[12]

$$\begin{aligned}\frac{\overline{u^2}}{k} &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(c_D - 8c_E)\left(c_\mu \frac{k}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \\ \frac{\overline{v^2}}{k} &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(c_D + 4c_E)\left(c_\mu \frac{k}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \\ \frac{\overline{w^2}}{k} &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(-2c_D + 4c_E)\left(c_\mu \frac{k}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\end{aligned}\quad (15)$$

여기서 $c_D = c_E = 1.68$ 이다.

두 비등방성 난류모델은 그 유도방법에서 다른 접근 방법을 택하였지만, 경계층근사에 의해

나타난 식은 난류상수만 다를 뿐 같은 형태를 취함을 알 수 있다.

앞에서 언급한 난류모델들은 완전한 난류영역에서만 적합한 것이며 점성의 영향이 커지기 시작하는 벽면 근처(층류저층, 천이층, 완전 난류층의 일부)에서 1-방정식 난류모델을 사용하는 Chen과 Patel[13]이 제시한 방법을 사용하였다.

4. 계산결과 및 고찰

수치계산의 초기조건으로 U-속도는 실험치를 이용하였고, k 와 ϵ 의 초기조건은 Rodi 와 Scheuerer[4]가 사용한 다음 식을 사용하여 구하였다.

$$k = -\overline{uv}/0.3 \quad (16)$$

$$\epsilon = \frac{k^{3/2}}{L} \left(1 + \frac{c_\epsilon}{k^{1/2}L/\nu}\right) \quad (17)$$

여기서 $-\overline{uv}$ 는 Cebeci와 Smith의 0-방정식모델로부터 구하였으며, $L = C_D \min\{\kappa y, \lambda \delta\}$, $C_D = 6.41$, $C_\epsilon = 13.2$, $\lambda = 0.085$ 이고 $\kappa = 0.41$ 이다.

대칭단면에 대한 계산결과는 Patel과 Baek의 실험[1]과 비교하였다. 이 실험에 사용된 모형의 형태는 Fig. 1에 보인 반구(semi-sphere)와 7 : 1 반 spheroid를 결합하여 만든 물체로, 받음각이 15° 이고 모형의 길이를 기준으로 한 Reynolds수는 1.86×10^6 이다. 속도를 측정할 때 1에서 6까지의 위치는 $X/L = 0.169, 0.234, 0.326, 0.419, 0.530, 0.641$ 이고, 난류량을 측정할 때 3H부터 6H까지의 위치는 $X/L = 0.291, 0.384, 0.495, 0.606$ 이다. 수치계산의 초기조건으로 W_1 -값은 Patel과 Baek에서와 같이 U-속도와 유사하게 주었다. 대칭단면에서는 바람이 불어가는 방향($\theta = 180^\circ$)쪽의 유동형상이 바람이 불어오는 방향($\theta = 0^\circ$)쪽에 비해 더욱 복잡하고 정확히 예측하기가 어려운데, 이것은 $\theta = 180^\circ$ 쪽의 대칭단면이 보다 강한 역압력 구배가 있고 수렴유동의 영향 때문이다. 따라서 본 연구에서는 $\theta = 180^\circ$ 쪽의 유동만을 계산하여 실험과 비교하였다.

Fig. 2는 속도분포의 비교를 나타낸 것으로 표준 k- ϵ 난류모델은 점선으로, 법선응력을 실

험치로 이용한 결과는 이점 쇄선으로 나타내었다. 이 그림에서 표준 k-ε 난류모델이 실험결과와 가장 많이 차이가 남을 알 수 있는데, 이 이유는 표준 k-ε 난류모델로서는 대칭단면에서 일어나는 강한 역압력구배의 유동과 함께 일어나는 수렴 및 발산유동 현상을 적절히 고려해 주지 못하기 때문으로 생각된다. 법선응력을 실험치로 이용한 결과 및 비등방성난류모델로 부터 구한 각 모델의 결과는 이 그림을 통해서 큰 차이가 나지 않음을 알 수 있다.

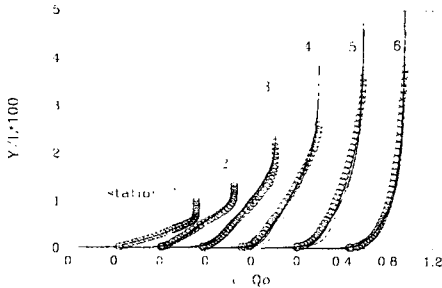


Fig. 2 Streamwise velocity profiles on the leeward plane of symmetry: symbol, experiment; —, predictions; — — —, Yoshizawa's model; — — — —, Spezial's model; — — — —, experimental relation; — — — —, standard k-ε model.

표면 마찰계수 C_f 와 형상 계수 H 의 비교를 Fig. 3에서 나타내고 있다. C_f 의 계산결과를 살펴보면 초기에 급격한 변화를 보이는데, 이것은 k 와 ϵ 의 초기조건이 정확하지 못하다는 것을 뜻하나 얼마 지나지 않아 맞는 값에 도달하므로 이를 개선하기 위한 노력은 기울이지 않았다. 표준 k-ε 모델로 계산한 결과인 점선의 경우는 C_f 의 값을 실험보다 크게 예측하며, H 의 경우는 낮게 예측함을 알 수 있다. 표준 k-ε 모델이 C_f 의 값이 실험과 차이가 나는 이유는 Fig. 8에서 알 수 있듯이 ν_t 을 크게 예측한 결과라 판단된다. 본 난류모델을 사용한 계산결과는 표준 k-ε 모델보다는 매우 향상된 결과를 보여주고 있으며, 그중 법선응력항들을 Yoshizawa의 난류모델로 사용한 실선의 결과가 실험치를 사용한 이점 쇄선의 결과와 좀더 일치하는 것을 볼 수 있다.

Fig. 4에서부터 Fig. 6은 실험치의 법선응력

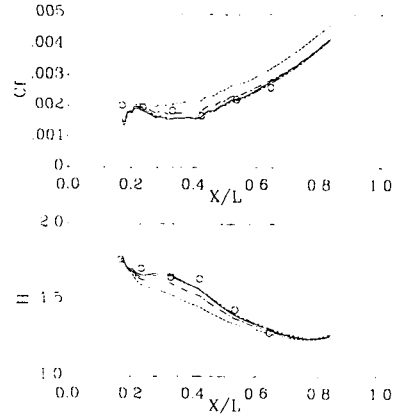


Fig. 3 Distribution of skin friction coefficient and shape factor along the leeward plane of symmetry: For legend see Fig. 2.

분포와 각 난류모델의 법선응력들을 비교한 것으로 실험치로부터 구한 법선응력은 $\overline{u^2}/k = 1.05$, $\overline{v^2}/k = 0.4$, 그리고 $\overline{w^2}/k = 0.55$ 이며, 이점 쇄선으로 나타내었다. Fig. 4에서 각 위치에서 측정된 $\overline{u^2}/k$ 의 실험값은 경계층안쪽에서 일정한 값을 유지하다가 경계층 바깥부분으로 감에 따라 감소됨을 알 수 있다. 따라서 $\overline{u^2}/k = 1.05$ 의 실험상수를 이용한 법선응력은 y -방향으로의 변화를 가질 수 없으므로 등방성

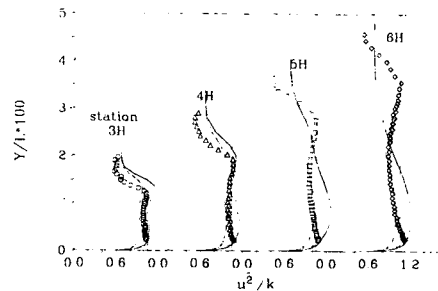


Fig. 4 Reynolds-normal-stress $\overline{u^2}/k$ profiles at various stations: symbols, experiment; —, Yoshizawa's model; — — — —, Spezial's model; — — — —, experimental relations.

을 띄는 경계층 바깥부분에서 실제의 법선응력과 차이가 나게 되나, 비등방성 난류모델들의 계산결과는 경계층 바깥부분으로 갈수록 2/3의 값으로 근접해짐을 알 수 있다. $\overline{u^2}/k$ 의 계산 값들을 살펴볼 때 Yoshizawa의 모델이 Speziale의 난류모델에 비해 좀더 큰 값으로 예측하며, 후류의 경계층 바깥 부분에서 두 모델이 실험에 비해 빨리 등방성으로 되어 짐을 알 수 있다.

Fig. 5의 $\overline{v^2}/k$ 의 분포에서는 $\overline{u^2}/k$ 와는 반대로 Speziale의 값이 Yoshizawa의 결과에 비해 조금 큰 값을 나타내며, 경계층 바깥으로 갈수록 이들 모델은 2/3의 값으로 됨을 알 수 있다. 두 등방성 난류모델의 결과는 상류 부근인 3H, 4H에서는 정확한 예측을 하지만 후류의 경계층 바깥 영역으로 유동이 진행됨에 따라 실험과의 차이가 크지는 경향을 보여 주고 있다.

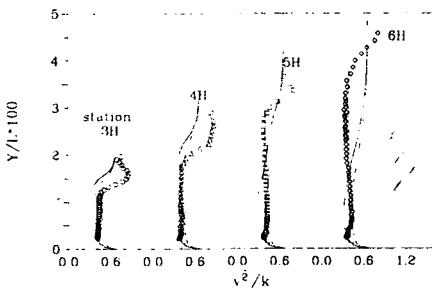


Fig. 5 Reynolds-normal-stress $\overline{v^2}/k$ profiles at various stations: For legend see Fig. 4.

Fig. 6의 $\overline{w^2}/k$ 실험결과는 등방성일 때의 값 2/3와 비슷한 값을 가지고 있고, 유동의 진행에 따라 거의 일정한 값으로 유지됨을 알 수 있는데 비등방성 난류모델로부터 구한 법선응력과 실험결과가 경계층 바깥 부근에서 비교적 잘 일치하는 경향을 보여주고 있다.

표준 k-ε 모델을 사용하여 법선응력값을 나타내었다면 모든 법선응력 값은 거의 2/3의 값으로 계산되어 법선응력값을 제대로 예측할 수 없는 것을 생각한다면, Fig 4에서부터 Fig. 6의

비등방성 난류모델의 결과는 대체적으로 법선응력 항들을 잘 예측한다고 생각되어 진다.

Fig. 7은 난류 운동에너지 k의 분포를 나타내고 있다. 3H와 4H에서 Yoshizawa의 비등방성 난류모델로 법선응력을 사용한 결과가 법선응력을 실험치로 사용한 경우와 잘 일치하며, 실험치와 좋은 예측결과를 보여줌을 알 수 있으나 5H와 6H의 후류 경계층 바깥부분에서 실험과의 차이가 많음을 알 수 있다. 이것은 Fig. 4에서 알

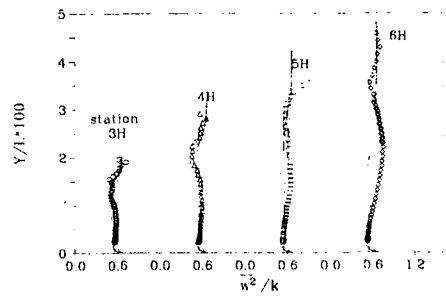


Fig. 6 Reynolds-normal-stress $\overline{w^2}/k$ profiles at various stations: For legend see Fig. 4.

수 있듯이 후류의 경계층 바깥부분에서 활발한 유동방향의 법선응력이 존재하여 난류운동에너지가 경계층 바깥부분에 까지 큰 값을 가지나 본 난류모델들은 이를 제대로 고려해 주지 못하고 있기 때문인 것으로 생각된다.

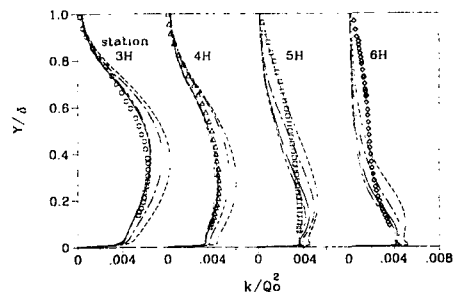


Fig. 7 Turbulent kinetic energy profiles at various stations: For legend see Fig. 2

와동점성계수 ν_t 의 분포를 Fig. 8에 나타내

고 있다. 표준 k-ε 모델의 결과인 점선은 ν_t의 값을 크게 예측함을 알 수 있는데 이는 역압력 구배와 대칭단면에서의 수렴 및 발산유동의 영향을 제대로 고려해 주지 못하기 때문인 것으로 판단된다. Yoshizawa의 난류모델로 법선응력 항을 사용한 결과가 3H와 4H에서 보다 정확히 예측함을 알 수 있으나 후류에서는 차이가 심해짐을 알 수 있다. 5H와 6H의 경계층 바깥부분에서는 Fig. 7의 난류운동 에너지 분포에 비해 좀더 실험치와 일치하는 경향을 보여 주고 있는데 이것은 ε의 값도 후류의 경계층 바깥 부근에서 실험치에 비해 낮은 값을 예측한 결과로 생각된다.

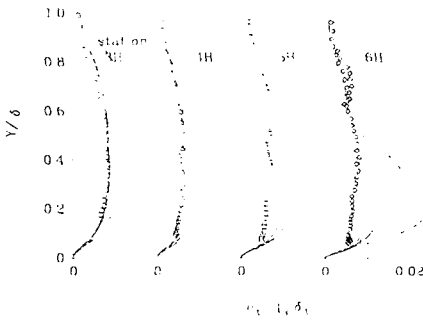


Fig. 8 Eddy-viscosity profiles at various stations: For legend see Fig. 2.

5. 결론

본 연구에서는 3차원 대칭단면에서의 강한 역압력 구배 유동 및 수렴 및 발산유동현상을 계산하는데 있어 Sohn등이 사용한 수정 k-ε 난류모델의 법선응력 항들을 Yoshizawa의 비등방성 난류모델과 Speziale의 비등방성 난류모델로 표현하여 계산하였다. 그 결과 표준 k-ε 난류모델로서는 잘 예측하지 못하였는 대칭 단면에서의 유동을 수정 k-ε 모델로서 잘 예측할 수 있었으며, 비등방성 난류모델로부터 구한 법선응력을 사용할 경우 법선응력을 실험치로 사용한 경우와 같은 좋은 결과를 얻을 수 있었다. 법선응력값을 실험치로 사용하면 복잡한 난류 구조를 제대로 반영하지 못하고, 기하학적 형상이 복잡한 경우에 적용이 곤란하므로 법선응력 항

들을 실험치로 사용하지 않는 본 방법이 보다 바람직하다고 판단된다.

부록

Yoshizawa는 DI(Direct Interaction)방법과 함께 공간과 시간에 빠르게 변하는 변수와 느리게 변하는 변수로 나누어 통계학적인 방법으로 Reynolds 응력을 다음과 같이 유도하였다.

$$-\overline{u_j u_i} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + 2\nu_t D_{ij} + \frac{1}{3} \left(\sum_{m=1}^3 \tau_m S_{mij} \right) \delta_{ij} + R_{ij}$$

여기서

$$D_{ij} = 0.5(U_{i,j} + U_{j,i})$$

$$\tau_m = c_{tm} \frac{k^3}{\epsilon^2}$$

$$S_{1ij} = U_{i,k} U_{j,k}$$

$$S_{2ij} = 0.5(U_{i,k} U_{k,j} + U_{j,k} U_{k,i})$$

$$S_{3ij} = U_{i,k} U_{k,j}$$

$$R_{ij} = -\sum_{m=1}^3 \tau_m S_{mij}$$

이며, 난류상수 $c_{t1} = 0.07$, $c_{t3} = -0.015$ 이다.

여기서 c_{t2} 가 포함된 항은 완전 전개된 수로유동이나 경계층근사 때는 나타나지 않는다. 직교좌표계에서의 속도구배를 구해보면 다음과 같다.

$$U_{1,1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial U}{\partial \xi} + K_{12} V, \quad U_{1,2} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial \eta} - K_{21} V$$

$$U_{2,1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial V}{\partial \xi} - K_{12} U, \quad U_{2,2} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial \eta} + K_{21} U$$

최종적인 2차원 직교 좌표계에서의 응력식은 다음과 같다.

$$-\overline{u^2} = -\frac{2}{3} k + \nu_t U_{1,1} + S_{\overline{u^2}}$$

$$-\overline{v^2} = -\frac{2}{3} k + \nu_t U_{2,2} + S_{\overline{v^2}}$$

여기서

$$S_{\overline{u^2}} = \frac{1}{3} \tau_1 (-2S_{111} + S_{122}) + \frac{1}{3} \tau_3 (-2S_{311} + S_{322})$$

$$S_{\overline{v^2}} = \frac{1}{3} \tau_1 (S_{111} - 2S_{122}) + \frac{1}{3} \tau_3 (S_{311} - 2S_{322})$$

이고

$$S_{111} = U_{1,1}^2 + U_{1,2}^2, \quad S_{122} = U_{2,1}^2 + U_{2,2}^2$$

$$S_{311} = U_{1,1}^2 + U_{2,1}^2, \quad S_{322} = U_{1,2}^2 + U_{2,2}^2$$

이며, $S_{\overline{u^2}}$ 과 $S_{\overline{v^2}}$ 항으로 인하여 법선응력항이

비선형화 된다.

Speziale은 레이놀즈응력을 다음과 같이 평균속도의 2차 함수로 표현하였다.

$$-\overline{u_i u_j} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + 2\nu_l D_{ij} + c_D l^2 (D_{im} D_{mj} - \frac{1}{3} D_{mn} D_{mn} \delta_{ij}) + c_E l^2 (D_{ij} - \frac{1}{3} D_{mn} \delta_{ij})$$

여기서

$$D_{ij} = U_k D_{ij,k} - U_{i,k} D_{k,j} - U_{j,k} D_{k,i}$$

$$l = 2c_\mu \frac{k^{3/2}}{\epsilon}$$

이며, 상수 c_D, c_E 는 완전 전개된 관유동의 실험 결과로부터 1.68이라는 값을 주었다. 위식의 첫 번째와 두 번째 항은 표준 k- ϵ 모델과 동일하며 나머지 항으로 인하여 법선응력 항이 비선형화 된다.

$$D_{ij} = U^k \frac{h_i h_j}{h_k} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{D_{ij}}{h_i h_j} \right) - \frac{h_i}{h_j} D_{kj} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{U^j}{h_j} \right) - \frac{h_j}{h_i} D_{ki} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{U^i}{h_i} \right)$$

이므로, Spezial의 법선 응력식은 다음과 같다.

$$-\overline{u^2} = -\frac{2}{3} k + \nu_l U_{1,1} + S_{\overline{u^2}}$$

$$-\overline{v^2} = -\frac{2}{3} k + \nu_l U_{2,2} + S_{\overline{v^2}}$$

여기서

$$S_{\overline{u^2}} = l^2 \left\{ c_D Q_{11} + c_E \left[D_{11} - \frac{1}{3} (D_{11} + D_{22}) \right] \right\}$$

$$S_{\overline{v^2}} = l^2 \left\{ c_D Q_{22} + c_E \left[D_{22} - \frac{1}{3} (D_{11} + D_{22}) \right] \right\}$$

참고 문헌

- [1] Patel, V. C. and Baek, J. H., "Boundary Layer in Planes of Symmetry, Part I: Experiments in Turbulent Flow," AIAA Journal, Vol. 25, April, 1987, pp. 550-559.
- [2] Pope, S. B., "An Explanation of the Turbulent Round - Jet/Plane-Jet Anomaly," AIAA Journal, Vol. 16, March 1978, pp. 279-281.
- [3] Hanjalic, K. and Launder, B. E., "Sensitizing the Dissipation Equation to Irrotational Strains," ASME Transaction, Journal of Fluids Engineering, Vol. 102, March 1980, pp. 34-40.
- [4] Rodi, W. and Scheuerer, G., "Scrutinizing the k- ϵ Turbulence Model Under Adverse Pressure Gradient Conditions," ASME Transaction, Journal of Fluids Engineering, Vol. 108, 1986, pp. 174-179.
- [5] Y. Nagano, M. Tagawa, "An Improved k- ϵ Model for Boundary Layer Flows", ASME Transaction, Journal of Fluids Engineering, Vol.112, March 1990 pp.33-39
- [6] 손창현, 최도형, 정명균, "대칭단면에 서의 난류모형 비교," 대한기계학회지, 제 13 권 5 호, 1989, pp. 1052-1060.
- [7] Sohn, C. H., Choi, D. H. and Chung, M. K., "Calculation of Plane-of-Symmetry Boundary Layers with a Modified k- ϵ Model," AIAA Journal, Vol.29, No 3, 1991, pp.395-400.
- [8] Nash, J. F. and Patel, V. C., "Three Dimensional Turbulent Boundary Layers," SBC Tech Books, Atlanta, GA, 1972.
- [9] Chang, K. C. and Patel, V. C., "Calculation of Tree-Dimensional Boundary Layer on Ship Forms," Iowa Institute of Hydraulic Research, Univ. of Iowa, IIHR Rept. No. 178, Jun. 1975.
- [10] Yoshizawa, A., "Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy-viscosity representation," Physics of Fluids Vol. 27, June 1984, pp. 1377-1387.
- [11] Nisizima, S. and Yoshizawa, A., "Turbulent Channel and Couette Flows Using an Anisotropic k- ϵ Model," AIAA Journal, vol.25, No.3, Mar. 1987, pp. 414-420.
- [12] Speziale, C. G., "On nonlinear k-1 and k- ϵ models of turbulence," Journal of Fluid Mech. Vol. 178, 1987, pp. 459-475.
- [13] Chen, H. C. and Patel, V. C., "Near-Wall Turbulence Models for Complex Flows Including Separation," AIAA Journal, Vol. 26, June, 1988, pp. 641-648.