국민학교 아동의 수학적 추론 능력 향상을 위한 방안 탐색

방 정 숙(한국교원대 석사 과정)
전 평 국(한국교원대)

Ⅰ. 서론

최근 학교 수학의 목적과 내용과 교수·학습 활동에 대한 개선은 사회적인 변화에 따라 강력하게 요구되고 있으며 이에 따른 수학 교육의 새로운 변화가 시도되고 있다. 학교 수학이 변해야 한다는 일차적인 근거는 학생들의 낮은 수학적 성취도와 관련되지만, 더 중요한 이유는 오늘날의 기술 공학적·정보화 사회는 학생들에게 과거와는 다른 수학적인 준비를 요구한다는데 있다. 즉, 논리적으로 탐구하고 추측하고 추론하는 능력, 비정형적인 문제를 해결하는 능력, 수학에 대해 그리고 수학을 통해 의사 소통하는 능력, 수학의 여러 영역간에 그리고 다른 지적 활동간에 아이디어를 연결하는 능력, 자신감과 수학적 성향의 개발 등의 내용을 포함하고 있는 수학적 힘(mathematical power)의 개발이 모든 학생들에게 필요하다는 것이다(NCTM, 1989, 1991).

여기서 특히 추론은 일상 생활에서 접하는 여러 가지 문제를 수학적으로 이해하고 이를 해결할 수 있는 수학적 사고력과 연결되어 수학 교육에서 강조되고 있다. 특히 『학교 수학을 위한 교육 과정과 평가 규준(Curriculum and Evaluation STANDARDS for School Mathematics』에서 강조되고 있는 것 중의 하나로 수학은 곧 추론하는 것이며 추론 없이는 수학을 잘할 수 없다고 기술하면서 모든 학생들이 가설의 논리적인 타당성을 추측하고 증명하는 것이 수학을 행하는 창조적 행위의 본질임을 깨닫고 추론의 역할을 음미할 수 있도록 수학적 활동에서 추론을 강조하는 것이 필요하다고 주장하고 있다. 특히, 문제의 해에 대한 옳고 그름은 교사의 권위에 의하기보다는 학생들의 논리적이고 타당한 근거에 의해 판단되어져야 한다고 주장한다. 또한 추론의 지도와 관련하여 MAA(Mathematical Association of America)(1991)도 『변화의 요구 : 예비 수학 교사를 위한 권고(A Call for Change : Recommendations for the Mathematical Preparation of Teachers of Mathematics』에서 수학 교사는 패턴을 인식하고 추측과 정의를 만들고 수정하며 결과를 정당화하는데 논리적인 논제를 만들어 봄으로써 수학적 추론을 연습해야 한다고 기술하고 있다. 요컨대, 학생들 자신이 수학적으로 추론하는 능력을 확신하고 자신들의 사고를 논리적으로 정당화하는 방법을 깨달아 올바른 수학을 행할 수 있기 위해서는 먼저 교사가 추

론의 중요성을 인식하여야 한다는 입장이다.

한편 이와 같은 추론의 역할과 중요성을 고려해 볼 때 현재의 학교 수학에서의 추론 지도에서는 몇 가지 문제점이 지적되고 있다.

첫째, 수학에 관한 태도의 측면에서, 학생들은 수학 시간에 생각해 볼 기회를 충분히 갖지 못하기 때문에 수학은 단지 일련의 규칙들을 학습하고 연습해야 하는 교과라고 인식하게 되며 결과적으로 일상 생활에서 수학이 매우 유용하고 강력하다는 것을 깨닫지 못하고 있다. 또한 대부분의 학생들은 자신이 추론할 수 있다는 자신감을 갖고 있지 못하다 (Trafton & Shulte, 1989).

둘째, 수학의 교수·학습에 관한 측면에서, 수학 학습이 대부분 학생들의 능동적인 참여를 허용하기보다는 수동적인 입장에서 전달되기 때문에 학생 스스로의 추론에 의한 수학적 지식의 연결이나 통합이 잘 이루어지지 못하고 있을 뿐만 아니라 새로운 지식의 생성에도 매우 제한되고 있다는 점이다. 다시 말하면, 학생들은 자신이 가지고 있는 경험이나 지식을 새롭게 학습되는 지식과 연결을 하거나 통합하는 데에 충분한 시간적 여유를 갖지 못할 뿐만 아니라 추론에 의해 새로운 지식을 생성하는 자극을 가질 여유도 없다. 즉, 기억해야 할 낱낱의 지식으로 수학 학습이 이루어지고 있어 지식의 구조화가 잘 이루어지지 않기 때문에 필요한 때에 그것을 재생하거나 새로운 문제 상황에 적용하는 데에 어려움을 갖게 된다.

셋째, 교육과정의 측면에서, 특히 국민학교 수학 교육과정에서는 계산 기능을 비롯하여 다른 전통적인 기능에 대하여 과거부터 지속되어 오고 있는 선입견 때문에 교육과정의 범위가 좁았으며, 수학적 통찰이나 추론 능력을 향상시키는데 실패했으며, 기계적 활동만이 다분히 강조되어 왔다(NCTM, 1989).

본 원고에서는 이와 같은 학교 수학의 변화 추세와 그에 따른 추론의 역할과 중요성을 인식하고 수학적 추론에 영향을 미치는 중요한 요소를 고찰하고, 이를 바탕으로 학생들의 수학적 추론 능력을 개발할 수 있는 구체적인 방안을 모색하려 한다.

Ⅱ. 잘 구조화된 지식의 획득과 추론과의 관계

인간이 여러 가지 정보를 회상하고 추리하고 일반적으로 지식을 사용하는 복잡한 능력을 설명할 때 우리는 우리의 기억을 조직화하고 구조화된 것으로 보아야 할 필요가 있다.

사실, 장기 기억에서의 의미적 기억(semantic memory)에 관한 이론이나 모델들은 학자(cf : Anderson, 1976; Anderson & Bower, 1973; Norman & Rumelhart, 1975)에 따라 조금씩 다르지만, 이것들의 공통점은 인간의 지식은 다분히 구조적이고 조직적이라는 데에 있다. 이제 여기서 잘 구조화된 지식이란 어떤 것인지 그 준거를 알아보고 구조화된 지식의 정도가 실제적으로 어떻게 차이가 있는지 살펴본 후 추론 과정과 관련지어 잘 구조화된 지식의 획득과 추론과 어떤 관계가 있는지 고찰하려 한다.

1) 잘 구조화된 지식

(1) 잘 구조화된 지식의 기준

Greeno(1978)는 이에 대한 준거로써 다음과 같은 세 가지를 제시했다.

첫째, 표상(representation)의 내적 통합성(integration)이 있어야 한다. 여기서 통합성이란 수학의 특별한 분야 내에서 개념들 간의 상호 관련성을 의미하는 것으로 개념이 풍부하면서도 순서적인 방법으로 결합되어 있는 정도를 말한다. 따라서 통합된 지식의 구조에는 중핵적인 개념들이 있으며, 이 개념들은 특히 다른 많은 개념들과 결합되어 있기 때문에 지식의 구조를 조직하는 집합점들(nodes) 즉, 중심 개념이 되는 것이다.

둘째, 정보와 사람들이 알고 있는 다른 사물들 간에 연결성(connectedness)이 있어야 한다. 여기서 연결성이란 수학의 한 분야의 지식이 다른 분야의 지식과 관계된 정도를 말하는 것으로써 예를 들어 산술의 개념과 연산이 요구되는 다양한 문제 상황, 문제 해결이 연산의 정의와 어떻게 관계되는가, 그리고 이 지식의 구조가 일반적인 수학적, 논리적 개념과 어떻게 관계되는가를 다루는 것이다. 즉, 연결성을 가지고 있는 지식의 구조는 다른 지식과 잘 연결되어 있기 때문에 분석적인 질문에 답하고 새로운 문제 상황에 그 구조를 적용할 수 있게 해 준다.

셋째, 표상과 이해되어야 할 자료와의 일치성(correspondence)이 있어야 한다. 여기서 일치성이란 개인의 지식 구조의 형태와 그 분야의 전문가가 갖고 있는 지식 구조의 형태 간의 일치 정도를 말하며 곧 사고 구조와 정확한 수학적 개념과의 일치를 의미한다.

사실 이러한 준거에 비추어 볼 때 수학 학습과 관련지어 수학 교육자들은 학생들의 지식의 구조가 어떠한가에 대해서 생각할 때 그들의 지식의 구조는 잘 통합되어 있는가, 다른 관련된 주제들과 얼마나 잘 연결되어 있는가, 그리고 그것은 수학 교과 내에서 상세화된 수학적 지식의 구조에 얼마나 일치하는가에 대해서 알아야 할 필요가 있다.

(2) 잘 구조화된 지식과 잘 구조화되지 않은 지식

전문가(expert)와 초보자(novice)가 각각 가지고 있는 지식의 구조에서는 지식의 양에서도 차이가 있을 수 있으나 보다 더 중요한 것은 지식의 질에 차이가 있다고 볼 수 있다. 사실 전문가나 초보자가 가지고 있는 지식의 양은 어떤 특정 분야에서는 같을 수도 있다. 그러나 여기에는 앞에서 언급한 지식의 구조에서 차이가 있게 마련이다. Greeno(1978)가 제시한 곱셈과 나눗셈에 대한 지식의 구조를 가지고 생각해 보자.

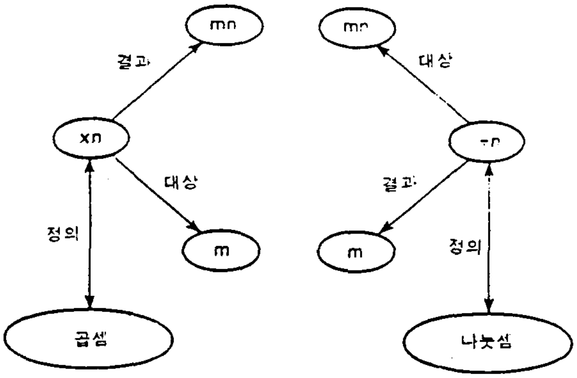

그림 1-1

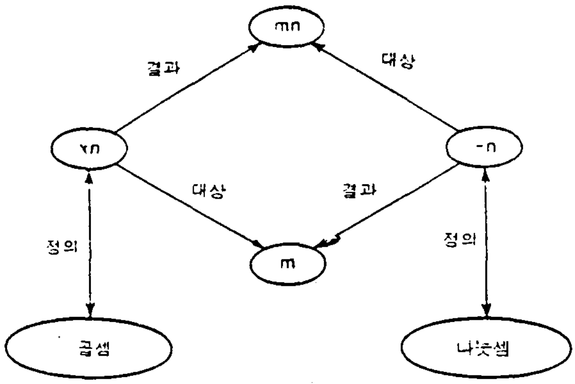

그림 1-2

<수학 학습 심리학(1995. pp. 249-250)에서 인용>

그림 1-1은 곱셈과 나눗셈에 대해서 알지만 그들 간의 역관계를 이해하지 못하는 사람의 구조를 나타내고 있다. 즉, 곱셈은 'n배(xn)'라는 연산으로 정의되고 이것은 대상으로 수량 m을 갖고 그 결과로써 수량 mn이 되고, 나눗셈 역시 ÷n 연산으로 정의되고 이 연산도 대상이 되는 양과 결과가 되는 양을 가지고 있다는 것을 알지만, 곱셈과 나눗셈 구조가 서로 연결되지 못하고 있다. 반면에 그림 1-2는 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계를 이해하여 두 연산에서 대상이 되는 양과 결과가 되는 양 사이에 특별한 관계가 있다는 것을 인식하고 있는 지식의 구조를 나타낸다. 여기서 한 수량에 어떤 수(n)를 곱한 다음, 그 결과를 같은 수(n)로 나누면, 분명히 처음의 수량이 얻어지기 때문에 한 연산의 결과는 다른 연산에서 대상이 된다는 것을 이해할 수 있다. 즉, 곱셈과 나눗셈의 지식의 구조는 결합되고 이 과정에서 전체 구조가 단순화되어지는 것이다.

한편 위의 예에서 산술에 대한 개인의 개념적 지식이 증가함에 따라 지식의 구조에서 관계들의 개수도 증가하게 된다. 그러나, 이러한 지식이 분리된 낱낱의 정보로 저장되기보다는 잘 조직되고 결합된 지식으로 저장된다면 약간의 노드만 추가되는 것이다. 그리고 그림 1-2와 같은 잘 구조화된 지식을 가지고 있는 전문가는 그림 1-1을 가지고 있는 초보자 보다 산술에 대해서 더 많이 알고 있는 셈이지만, 더 많은 지식을 동일한 노드나 정보

의 항목만으로 곱셈과 나눗셈의 지식 체계 모두에서 작용하게 하기 때문에 실제적으로 지식의 구조화가 잘 이루어진 더 단순한 구조를 가지고 있는 것이다.

한편 지식의 조직화(구조화)에 있어서 Krutetskii(1976)는 수학적으로 재능 있는 학생들이 사용하는 사고 과정은 고도로 조직화된 지식을 가지고 있지 못한 사람은 접근할 수 없는, 질적으로 다른 사고 체계라고 주장한다. 즉, 보통의 학생들은 모든 논리적인 단계들을 거치는 반면에 재능 있는 학생들은 중간 단계를 뛰어넘어 문제에서 해결로 빨리 옮겨감으로써 전형적인 일련의 추론 과정을 줄이고 나아가 폭넓고 빠르게 일반화할 수 있다는 것이다. 여기서 중요한 것은 안정되지 못하고 구조화되지 않은 채로 지식을 가지고 있는 학생들에게는 폭넓게 일반화하거나 문제의 구조를 확인하는 것 또는 단계들을 건너뛰는 것을 가르칠 수 없다는 것이다. 즉, 다른 지식과 연결되지 못한 개념이나 절차 또는 전략은 조직되지 않은 하나의 파일에 불과하며 따라서 먼저 문제를 잘 해결하지 못하거나 추론 능력이 부족한 학생들에게는 자신이 가지고 있는 지식을 전체적으로 재구조화할 수 있는 새로운 사고 양식을 개발시켜 주는 것이 필요하다.

결국, 잘 구조화된 지식은 학생들에게 의미 있는 학습의 결과로서 이루어지게 되며 이것은 문제 해결이나 추론에 절대적으로 영향을 주는 요인이 되는 것으로써 구성주의의 입장이나 정보처리 심리학의 입장 모두에서 매우 강조되고 있다. 구성주의자들은 학생들이 세계에 대해서 이미 알고 있는 것에 '적합'하도록 지식을 구성한다고 주장한다(Stiff, Johnson, & Johnson, 1993). 때로 이 '적합도' 또는 '적응'이 쉽게 획득되지 못하는 경우--새로운 지식을 기존의 인지구조에 동화하지 못하는 것--가 있으며 이때에는 새로운 지식을 수용하기 위해서 새로운 관계나 스키마를 구성하게 된다. 즉, 학생들은 인지적 성장을 겪으면서 그러한 지식을 재구조화하는데 능동적으로 참여하게 되며 자신에게 의미 있는 지식으로 직접 구성하였을 때만 그 지식에 대한 진정한 이해를 하는 것이라고 볼 수 있다. 또한 정보처리 심리학자들은 인간의 장기 기억 속에 논리적인 추론을 가능하게 하는 산출 체계를 가지고 있다고 기본적으로 가정하고(Howard, 1983) 이러한 추론이 일어나기 위해서는 학생들이 새로이 획득할 경험과 지식이 기존에 획득한 경험과 지식에 잘 연결되거나 통합됨으로써 관련된 지식들이 잘 구조화된 청크(chunk)로 조직되어야 할 필요가 있다고 주장하고 있다(Anderson, 1985).

2) 추론의 과정

(1) 지식의 조직화(organization)와 네트워크 이론 (network theory)

인간이 지식을 어떻게 저장하고 구조화하며 이것을 이용하여 어떻게 추론하는가? 만약 인간이 지식을 장기 기억 속에 일련의 긴 목록(lists)으로만 저장한다면, 어떤 항목을 망각하거나 다른 항목과 혼동하게 되면 그 망각된 항목들을 다시 생각해 내거나 새로운 정보를 재구성할 수 있는 방법이 없게 된다. 따라서 정보 처리 심리학에서는 지식이 조직되는 방법에 대해서 네트워크(network) 이론을 소개하고 있다.

그림 1-3은 Collins와 Quillian(1969, 1972)이 개발한 의미적 기억에서의 일부 지식의 구조를 나타내고 있다. 이 구조는 명사인 단위(units)로 구성되어 있으며 각각의 단위는 어떤 성질과 결합되어 있고 또 화살표는 네트워크에서 항목들 간의 관계를 나타내고 있는 것으로써 이러한 항목들 간의 연결은 결합이다. 또한 이 네트워크 관계는 어떤 특별한 지식의 항목을 중앙의 위치에 놓고 상호 관련된 큰 덩어리(chunk)로 지식을 조직한다는 것을 나타내고 있다.

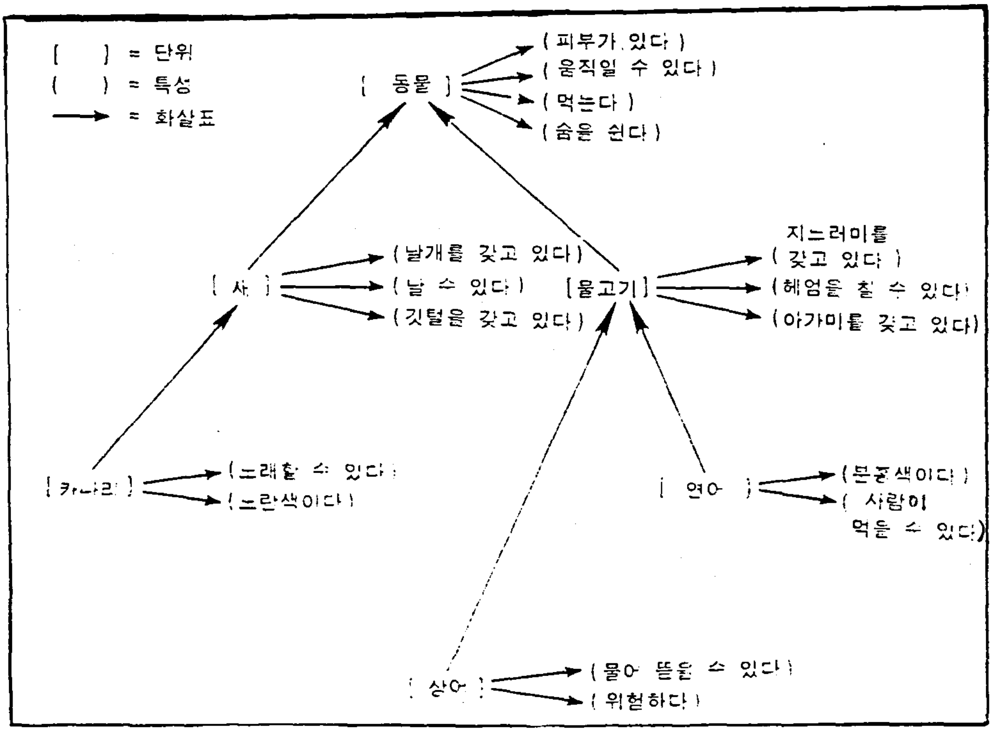

그림 1-3 : 수학 학습 심리학(1995, p.247)에서 인용

지식에 대한 이와 같은 의미적 네트 워크 이론은 인간의 사고 능력을 몇몇 측면에서 설명해 준다(Resnick & Ford, 1981).

첫째, 사람들이 어떤 특정한 주제에 대하여 만들고자 하는 진술의 종류와 그러한 진술을 하는 상대적인 속도를 설명할 수 있다. 즉, 개념 사이의 거리가 멀면 멀수록(거쳐야 할 화살표의 개수가 더 많으면 많을 수록), 두 개념 사이에 관계가 존재하는지를 결정하는데 시간이 더 오래 걸리게 된다.

둘째, 인간이 추리하는 방법을 설명해 준다. 예를 들어 이전에 카나리아의 피부에 대해서 생각하지 않은 사람은 카나리아가 동물이고 동물은 피부가 있다는 것에 의하여 카나리아는 날개뿐만 아니라 피부도 있다는 것을 추론할 수 있게 된다. 즉, 인간이 모든 지식의 항목을 각기 열거해 보지 않고도 사물을 어떻게 알 수 있는가를 설명할 수 있다.

셋째, 인간은 외부로부터 수동적으로 정보를 결합하는 것이 아니라 능동적으로 구조화한다는 것을 알 수 있게 한다. 발달 과정에서 지식은 의미 있는 방법으로 구조화되는 것이지 단편적인 정보들을 수집하는 것이 아닌 것이다.

(2) 지식의 정교화(Elaboration)

정교화란 직접적으로 또는 유추에 의해서 새로운 자료를 기존 지식과 관련짓는 과정일 뿐만 아니라 그 자료의 요소들 간에 논리적인 관계를 만들어 내거나 추리를 이끌어 내는 것으로써(Silver, 1982에서 재인용) 인간은 정보를 받아들일 때 자연스럽게 정교화하는 경향을 가지고 있다(Bower, Black, & Turner, 1979, Haviland & Clark, 1974).

이와 같은 정교화는 두 가지 방식으로 추론에 필요한 지식의 인출을 촉진하게 한다. 그 중 하나는 명제망(propositional network)을 통한 대안적인 재생 통로(alternative retrieval routes)를 제공하는 것으로써 하나의 통로가 막히면 다른 통로를 이용할 수 있게 한다 (Anderson, 1985). 둘째는 추리(inference)에 의해서 필요한 지식이 구성될 수 있는 다른 부가적인 정보를 제공한다는 것으로써(Reder, 1982) 실제로 더 이상 기억할 수 없는 것도 추리하게 한다(Anderson, 1985). 예를 들어 문제 해결자가 다음과 같은 기하 문제를 증명하기 위해서 명제 P1을 회상해야 하는데 실제로 그 명제를 기억하지 못한다고 생각해 보자. 이러한 경우에 그는 대안적인 재생 경로로써 명제 P2와 P3을 재생하고 다시 추리에 의해서 명제 P1을 구성할 수 있게 된다.

P1 : 삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않은 두 내각의 합과 같다.
P2 : 삼각형의 내각의 합은 180° 이다
P3 : 삼각형의 한 외각과 그와 이웃한 내각의 합은 180° 이다.

(Jeon, 1988)

한편 어떤 정교화는 다른 것보다 재생 단서로써 보다 효과적인데 이러한 정교화는 학습 맥락에 대해서 기억하거나 적절한 회상을 자극하고자 하는 명제들을 함께 묶어 주는 것이다. 반면에 상대적으로 효과가 덜한 정교화는 기억해야 할 명제들을 묶어 내지 못하며, 학습 맥락의 회상을 자극하지도 못한다(Gagné, 1985에서 재인용). 즉, 새로운 지식에서 한가지 이상의 부분에 관계하는 정교화가 한가지에만 관계하는 정교화보다 지식의 재생 면에서 더 효과적인 것이다.

3) 잘 구조화된 지식의 획득과 추론과의 관계

결국 잘 구조화된 지식이란 일련의 새로운 정보를 받아들일 때, 어떤 특별한 개념을 중심적인 위치에 두고 나머지 정보들을 그것과 서로 관계지어 하위 지식으로 청크화하는 조직화가 잘 일어난 상태이고 나아가 지식의 재생을 촉진시킬 수 있도록 정교화가 잘 일어난 상태라고 볼 수 있다. 또한 이렇게 잘 구조화된 지식이 있어야 추론을 할 수 있다는 것을 쉽게 유추할 수 있다. 즉, 특정한 수학적 개념과 절차에 대한 지식만 많다고 해서 자연스럽게 추론을 통해서 문제를 해결할 수 있는 것은 아니다. 추론에 필요한 지식을 재생하기 위해서는 네트워크를 통해 지적 탐색을 유도하기 위한 메커니즘이 또한 있지 않으면 안되는데 이것은 바로 잘 조직화된 지식을 의미하는 것이다. 그리고 필요한 정보가 요구된 형태로 정확하게 저장되지 않았을 때는 개념들과 구조들 사이의 새로운 관계를 능동적으로 생성하고 고안할 수 있는 메커니즘이 있어야 하는데 이것은 효과적으로 정교화된 지식을 의미하는 것이다.

한편, 정보 처리 이론에서는 인간의 사고는 지식의 구조와 더불어 문제를 해석하는데 도움이 되고 저장된 지식과 절차를 찾아낼 수 있고 분리 저장된 개념들 사이에 새로운 관계를 생성할 수 있는 일련의 추론 능력을 태어날 때부터 가지고 있다고 여긴다. 단지 추론 과정에서 오류나 편견이 발생하는 이유는 추론의 내용이나 형태의 영향을 받아 전제들을 잘못 또는 불충분하게 코딩하기 때문이라고 해석하고 있다(Anderson, 1985; Howard, 1983; Mayer, 1983; Nickerson, 1985). 아동들의 추론 능력에 관한 Jeon & Park(1993)의 연구는 추론은 추론 능력 그 자체 보다는 수학적인 내용에 의해 영향을 더 받는 것으로 보고하고 있다.

따라서 중요한 것은 아동들의 추론 능력은 아동이 수학적 지식을 얼마나, 어떤 방법으로 획득했는가, 그리고 획득한 수학적 지식들이 어떻게 구조화되어 있는가에 큰 영향을 받을 수 있다는 것이다. 더우기 교사가 어떤 방법으로 추론을 자극하는 상황을 제시했는

가에 따라서 그 수행 능력의 정도가 다르게 나타나는 것이다. 즉, 학생들의 수학적 추론 능력의 개발은 그것을 할 수 있는 능력의 향상보다는 추론의 대상이 되는 지식의 양과 잘 구조화된 지식의 질에 달려 있는 것 같다.

Ⅲ. 추론 능력 향상을 위한 방안 모색

잘 구조화된 수학적 지식의 획득과 추론과의 관계를 바탕으로 어떻게 하면 학생들의 수학적 추론 능력을 향상시킬 수 있는지 구체적으로 나누어 그 방안을 생각해 보려 한다.

1. 수학적 지식의 연결과 통합의 강조

교사는 수학 학습에서 학생들이 다음과 같은 여러 가지 면에서 지식을 연결하고 통합하도록 도와주어야 한다.

첫째, 개념적 지식과 절차적 지식이 연결되어야 한다.

여기서 개념적 지식(선언적 지식)은 무엇이 어떻다는 지식(knowledge that)인 반면에 절차적 지식은 무엇을 어떻게 하는가에 대한 지식(knowledge of how)으로써 무엇보다 추론 능력의 향상을 위해서는 추론의 바탕이 되는 이들 기본적인 수학적 지식들이 필요하고 그러한 지식들이 서로 연결되거나 통합되는 유의미한 학습이 이루어져야 한다. 사실 명확한 개념의 이해 없이 규칙이나 절차들을 학습한다면 결과적으로 너무 많은 규칙들이 개별적인 낱낱의 지식으로 기억되고 학습되어야 할 문제로 남게 되기 때문에 학생들이 새로운 상황에서 필요한 지식을 재생하는데에 어려움이 있기 때문에 추론을 잘 할 수 있으리라고 기대할 수가 없게 된다.

둘째, 귀납적 방법과 연역적 방법이 연결되어야 한다.

사실 발달 단계에 대한 지나친 선입견으로 우리의 수학 수업은 특히 저학년에서 지나친 구체물을 사용해 왔다. 그러나 저학년의 학생들도 개개인에 따라 귀납적 방법 뿐만 아니라 연역적 방법에 의한 사고도 얼마든지 가능하다. 사실 간단한 덧셈을 하는 경우에 '5+5=10'이라는 사실을 이용하여 '5+6=11'이라는 것을 알아내는 아동은 그 학년 수준에서 훌륭한 연역 추론을 활용했다고 볼 수 있다. 또한 '15-7'을 계산하는 데 있어서도 같은 학년 수준이라 하더라도 구체물이나 손가락을 사용하여 구잔의 방법을 통하여 감가법(구체물 15개를 10개와 5개로 나누어 늘어놓고 10개에서 7개를 제거하고 남은 나머지 3개와 5개를 더하는 것) 또는 감감법(구체물 15개를 10개와 5개로 나누어 늘어놓고 5개에서 5개를 제거하고 다시 10개 중에 2개를 제거하는 것)에 대한 원리를 귀납적인 방법으로 이해하는 아동도 있지만, 구차(비교 : 10-(7-5))를 이용하는 아동도 있게 마련이다. 또는 이미

알고 있는 수에 대한 덧셈 구구('7+7=14'라는 사실과 '15는 14보다 1만큼 더 크다')를 활용하는 아동도 있다. 따라서 어느 특정한 한 방법에 의존하는 형식화를 강조할 것이 아니라 구체물이나 손가락을 이용하여 센 방법과 기억하고 있는 수 구구(number facts)나 유도된(derived) 수 구구를 이용하여 답을 낸 방법을 서로 의미 있게 연결해 줘야 한다.

셋째, 수학에서의 주제들(topics)을 연결해야 한다.

물론 수학과 교육과정에서 주제들을 서로 통합하여 제시해 준다면, 학생들이 이러한 연결을 자연스럽게 잘할 수 있겠지만, 가르치면서도 주제들의 통합이 강조되어야 한다. Tyler(1949)에 의하면 수학적 개념과 원리들은 위계적인 반복성과 연계성을 통하여 습득된다. 따라서 교사는 수학 시간에 다루는 주제들이 영역과 영역간에 그리고 영역 내에서 서로 어떤 위계적인 연계성과 관련성을 가지고 있는지 알고 아동들이 이러한 주제들을 제대로 학습할 수 있도록 도와줄 수 있어야 한다. 이와 같은 수학적 주제들의 연계성이 이루어지지 못한다면, 아동들은 여러 영역에서 공통적이며 중핵적인 아이디어를 이해하지 못한 채 일반적인 원리들보다는 개별적인 주제들의 암기가 강조되어 결국 추론 능력의 향상을 기대할 수가 없게 된다.

넷째, 학생 개개인이 가지고 있는 사전 경험 또는 사전 지식을 연결해야 한다.

학생들이 항상 자신이 가지고 있는 지식을 추상적인 아이디어로 조직할 수 있는 것은 아니다. 즉, 어떤 지식은 종종 일상적인 경험과 사건에 연결되었을 때만 유용할 수도 있다. 따라서 이러한 경험이나 지식들이 서로 연결되지 않는다면, 학생들은 수학 수업을 위한 하나의 지식망(network of knowledge)을 가지고 있어야 하고 다시 일상적인 문제를 해결하기 위해서 또다른 지식망을 가지고 있어야 할 것이다. 예를 들어 75+26을 계산할 때, 이 문제를 수를 세는 문제로 이해하고 '75, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101'로 풀 수 있다. 한편 돈에 대한 경험을 바탕으로 '75원과 26원을 더하면 100원짜리 하나와 1원짜리 하나'라고 답할 수도 있으며, 학교에서 학습하게 되는 덧셈에 관한 표준적인 알고리즘을 적용하여 계산할 수도 있다. 즉, 기본 바탕이 되는 수학 문제(75+26)는 동일하지만 이용하는 지식 체계는 서로 다를 수 있다. 따라서 중요한 것은 학생들이 이와 같은 덧셈 과정에 대한 서로 다른 표상들을 잘 연결하여 상황에 따라 적절하고 융통성있게 활용할 수 있어야 한다는 것이다.

사실, 학생들은 덧셈과 뺄셈을 포함하여 일상적인 문제를 해결하기 위해서 유용한 많은 개념과 직관을 가지고 국민학교에 들어오게 된다(Carpenter, Moser, & Romberg, 1982). 그러나 흔히 간단한 문장제에서조차 1학년 학생들이 그 문제에 적합한 덧셈과 뺄셈의 연산을 결정하는 데에 어려움을 겪는 것을 볼 수 있다. 아마도 이것은 학생들이 직관적으로

자연스럽게 가지고 있을, 세는 방법과 덧셈과 뺄셈을 하기 위해 학교에서 학습한 지필 접근 방법을 연결하지 못했기 때문이라고 생각된다. 따라서 수학적 개념을 처음 도입할 때는 학생들에게 익숙한 실재 대상이나 활동을 이용하는 것이 필요하다. 학생들에게 그 활동의 패턴이나 규칙성을 기술해 볼 수 있는 기회를 주면 학생들은 자신이 가지고 있는 자연적인 언어를 이용하여 그 현상을 기술하게 된다. 이제 그들이 서로 서로 대화하게 함으로써 자신들이 발견한 현상을 설명하는데 공통적인 언어를 사용하도록 해 준다. 그리고 점차로 학생들이 선택한 언어를 교사가 선택한 언어, 즉, 수학적인 언어로 연결해 주게 되면(예 : '같이 놓는다'는 말은 '더한다'는 말과 연결하고 '전체'라는 말은 '합'으로 연결) 학생들은 자신들이 가지고 있는 일상 경험과 그에 기초한 지식(예 : 언어)과 수학에서 사용하는 지식을 자연스럽게 연결할 수 있을 것이다. 분명히 학생 개개인의 사전 경험과 무관한, 추상적인 절차로써 수학적 지식을 도입하게 되면, 동일한 수학적 개념과 기능을 일상생활에서 사용함에도 불구하고 일상 생활의 지식 체계와 학교 수학의 지식 체계는 완전히 서로 분리된 개별적인 입장이 될 것이고 이것은 학년이 올라갈 수록 더욱 심하게 될 것이다. 따라서 먼저 학생들이 가지고 있는 일상 생활의 경험이 수학화되는 것이 필요하며, 결국 학교 수업의 목적 중의 하나는 학생들이 다양한 문제 상황에서 유용한 도구가 될 수 있는 풍부하고 융통성 있는 표상 체계(representational systems)를 발달시킬 수 있도록 학생들이 가지고 있는 일상 경험에 기초한 사전 지식과 수학에서 다루는 지식을 연결하는 것이다. 이것은 수학의 구조와 학습자의 사고 구조가 연결되어야 한다는 Dienes(1960)의 주장과도 연결된다. 곧, 수학 학습은 그 기호 체계를 이해하고 그 결과를 생활에서 일어나는 실제적 상황에 응용할 수 있는 능력을 획득하도록 돕는 것이기 때문에 특히 식의 사용에 있어서 아동들이 가지고 있는 사고 구조와 맞지 않는 것은 무의미한 기호의 나열이나 암기해야 할 절차가 될 뿐이라는 사실을 기억하고 두 구조가 연결되도록 가르쳐야 한다.

2. 추론할 수 있는 기회 제공

학생들은 수학 시간에 다양한 방법으로 추론 능력을 발휘할 수 있다. 여기서 중요한 것은 교사가 학생들에게 얼마나 그리고 어떤 방법으로 추론할 수 있는 기회를 제공해 주는가 하는 것이다.

첫째, 다양한 과제 환경을 제시하여 추론할 수 있는 기회를 제공해 주어야 한다.

일상적이고 정형적인 과제보다는 학습한 지식을 바탕으로 다양한 사고를 자극할 수 있는 문제 상황이나 유형이 제시되어야 한다. 즉, 알고 있는 단편적인 지식이나 알고리즘을 그대로 적용하여 쉽게 해결될 수 있는 과제보다는 새로운 유추나 추리에 의한 폭넓은 사고를 요하는 과제를 제공해 주어야 한다. 또, 자연스럽게 자신의 생각에 대한 타당성을 입증해 보고 다른 사람의 아이디어도 들을 수 있는 기회를 제공하기 위해서 소집단이나 전

체 학급의 학생들이 협동하여 풀 수 있는 문제도 제시하는 것이 바람직하다고 생각한다.

둘째, 적절한 발문 전략을 사용하여 학생들이 추론할 수 있는 단서를 제공해야 한다.

학생들이 생각한 것에 대해서 기술하도록 요구하거나 그들이 생각하기에 왜 그것이 옳은지, 원래의 문제 상황에서 그 대답이 무엇을 의미하는지, 또는 그 문제를 푸는데 도움이 되었던 것이 무엇인지 물어 봄으로써 학생들이 추론할 수 있도록 자극하여야 한다. 여기서 중요한 것은 교사가 더 많이 말하고 모델링하고 설명하기보다는 학생들에게 그러한 기회를 제공해 주어야 한다는 것이다. 유용한 발문 전략으로는 다음과 같은 것을 들 수 있다(NCTM, 1991).

수학을 의미 있게 하기 위한 발문	· "○○가 말한 것을 다른 사람은 어떻게 생각하니" · "너는 동의하니 / 반대하니"' · "답은 같지만, 다른 방법으로 이것을 설명할 수 있는 사람 있니?' · "발표자가 말한 것을 이해할 수 있니?"
수학적으로 추론할 수 있게 하기 위한 발문	· "왜 너는 그렇게 생각하니?" · "왜 이것이 사실이니?" · "어떻게 그런 결론에 도달했니?" · "모델을 만들어 볼 수 있겠니?" · "모든 경우에 항상 성립할 수 있겠니?" · "어떻게 그것을 증명할 수 있니?"
문제를 추측하고 창안하게 하기 위한 발문	· "만약 -라면? 어떻게 되겠니?" · "패턴을 찾을 수 있겠니?" · "어떤 가능성이 있겠니?"
수학과 그것의 아이디어를 연결하기 위한 발문	· "이것은 어떻게 관련이 되니?" · "이와 비슷한 문제를 풀어 본 적이 있니?" · "이것에 대한 예를 하나 들 수 있니?"

셋째, 생각할 수 있는 충분한 시간을 제공해 주어야 한다.

학생들에게 추론에 필요한 충분한 시간적 여유를 주어야 한다. 즉, 학생들이 쉽게 풀리지 않는 과제를 만나거나 서로 관련된 개념들을 연결하거나 통합하여 어떤 새로운 대안적

인 경로를 찾아야 할 때 학생들에게 그렇게 할 수 있는 충분한 시간을 제공해 주어야 한다. 또, 제시된 과제에 대해서 학생들이 쉽게 포기할 때, 교사는 학생들이 계속하여 사고할 수 있도록 동기화를 꾀하며 다시 한번 학생들이 이해하도록 시간을 주어야 한다. 또한 의사 소통할 때 교사는 성급히 끼어 들지 말고 학생들이 자신의 생각과 타당성에 대해서 충분히 말하고 논의할 수 있도록 격려해야 할 것이다.

3. 학습 분위기의 변화 필요

대부분의 아동들에게 수학 수업에서의 권위는 교사나 정답에 부여된다. 그러나 학생들이 잘 구조화된 수학적 지식을 바탕으로 추론을 하기 위해서는 이러한 권위의 바탕이 바뀌어져야 한다. 즉, 학생들 스스로 탐구하고 추측하고 타당한지 알아봄으로써 그 타당성과 논리성이 권위의 근거로써 강조되어야 하며, 결국 수학 학습은 빠른 시간 내에 정답을 찾는 것으로 끝나는 것이 아니라 교사나 학생 모두 왜 그렇게 되는가에 대해 이해하기를 원하는 분위기가 되어야 한다. 곧, 의문을 제기하고 그것을 해결하기 위한 방안을 모색하고 서로 질문하고 다른 사람의 주장을 들으며 자신의 관점과 비추어 비교하고 평가하는 탐구적·개방적 수업의 전개 방법이 자연스럽게 일어날 수 있는 학습의 장소가 되어야 한다. 이러한 학습 분위기에서 학생들은 서로 다른 수준에 있는 동료들의 경험을 관련시키며 듣고, 말하고, 읽고, 쓰는 것을 통하여 자신들의 생각을 명백하게 하고 그것을 다른 사람과 공유할 수 있게 된다.

4. 모든 영역에서의 사고 전략의 강조

사실 사고하고 추론하는 것은 국민학교 수학 수업에서 거의 관심을 받아 오지 않아 왔다. 추론이나 문제 해결의 강조보다는 수학에 필요한 지식이나 기능을 먼저 숙달시켜야 한다는 선입견 때문에 많은 학생들은 자신들이 구성한 지식에 터 해서 생각해 볼 기회를 거의 갖지 못해 왔고 그로 인해 추론의 경험은 극히 제한되어 있었다. 즉, 지식을 가르치는 것, 그 과정을 중시하는 것, 그리고 생각하는 사고 전략을 가르치는 것간에 균형이 이루어지지 못했었다. 그러나 우리는 앞에서 지식과 추론이 얼마나 밀접한 관계가 있는가를 알아보았다. 따라서 추론 능력은 어떤 특정한 영역이나 지식과 관련되어 향상되는 것이 아니라 수학의 모든 영역에서 사고 전략을 강조함으로써 발달시켜 줄 수 있다고 생각한다. 예를 들어, 기본적인 산술 지식을 학습하는데서도 사고 전략을 통해서 추론 능력을 향상시킬 수 있다. 여기서의 사고 전략이란 미지의 합이나 차를 알기 위해서 학생들이 이미 알고 있는 합이나 차를 활용하는 것을 의미한다. 실제 39+53을 계산하는 데 있어서 학생들은 다음과 같이 각기 다르게 사고 전략을 활용하는 것이 관찰되었다(Cobb & Merkel, 1989).

첫번째 방법은 보충(compensation)전략이다. 즉, “50 더하기 30은 80이고, 그 다음 9 더하기 1은 90이 되고 다시 2를 더하면 92가 된다”

두번째 방법은 “처음에 53을 가지고 있다. 10을 더하면 63이 되고 다시 10을 더하면 73, 또 10을 더하며 83, 마지막으로 9를 더하면 92가 된다”

세번째 방법은 반복적인 전략으로써 “39 더하기 10은 49이고 이것을 연속적으로 이용하여 한번에 10씩 세어 올라간다. 즉, 39, 49, 59, 69, 79, 89이고 이것에 마지막으로 3을 더하여 92가 된다”

네번째 방법은 반복적인 알고리즘을 약간 간단하게 변형한 방법으로써 “39 더하기 50은 89이고 여기에 3을 더하면 92가 된다”

다섯번째 방법은 표준적인 알고리즘과 가장 밀접한 것으로써 “30 더하기 50은 80이고 9 더하기 3은 12이므로 함께 더하면 92”

이와 같은 사고 전략을 활용함으로써 아동들은 단지 정답을 만들어 내기 위한 방법으로서보다는 수들 간의 관계에 대해서 생각하고 구성하는 방법을 활용할 수 있게 된다.

5. 교사와 학생 개개인의 추론 능력에 관한 신념

어린 아동이라 하더라도 아이디어를 구성하고 수정할 수 있으며 물리적인 세계, 자료, 다른 아동과의 상호 작용을 통하여 기존의 지식을 새로운 지식에 연결하거나 통합할 수 있는 능동성을 가지고 있다. 따라서 교사는 아동들 스스로도 각자의 수준에서 자기에게 의미 있는 방법으로 자신의 개념적 수준에서 훌륭한 추론을 할 수 있다는 생각을 가져야 한다. 또한 무엇보다 아동들도 자기 자신에 대한 추론 능력에 대해 자신감을 가져야 한다. 사실 수학 학습의 중요한 목적 중의 하나는 아동들 스스로 수학을 행할 수 있는 힘을 가지고 자신의 성공과 실패를 통제할 수 있는 자율성을 갖도록 돕는 것이다(NCTM, 1989). 그런데 이러한 자율성은 아동들이 추론할 수 있는 능력과 그들의 생각을 입증하는 능력에 대한 자신감을 얻을 때 발달될 수 있는 것이다.

Ⅳ. 결론

추론 능력은 획득된 지식을 연결하고 재구성하여 체계적이며 논리적으로 타당한 결론을 이끌어 내는 능력으로서 최근 수학의 교수·학습에서 더욱 강조되고 있다. 여기서 중요한 것은 만약 교사가 가르치는 방법을 변화시키지 않는다면 우리가 수학 교육에서 무엇에 강조를 두고 어떤 것을 가르치느냐 하는 것은 실상 별로 차이가 없다는 것이다. 수학 학습을 통하여 학생들의 추론 능력이 향상되기를 원한다면 무엇보다 교사가 추론의 중요성을 인식하는 것이 중요하다. 즉, 교사가 수학 학습에서의 변화를 인식하고 받아들이지 않는다

면 어떠한 의미 있는 실제 변화는 발생하지 않을 것이다. 규칙이나 절차만 강조하는 방법으로 계속하여 가르친다면 어떻게 학생들이 능동적으로 수학 학습에 참여할 수 있으며 그들이 그럴 기회를 갖지 않는다면 어떻게 문제에 대해서 사고 전략을 개발하며 추론 능력을 향상시킬 수 있겠는가?

요컨대 모든 수학 수업은 학생들에게 수학적 아이디어에 대해서 추론할 수 있는 기회를 주어야 하며 잘 구조화된 지식의 획득과 추론 능력과의 관계를 올바로 이해하여 각각의 연령 수준에 적절한 지식과 그 지식을 잘 연결하거나 통합되게 할 수 있는 다양한 문제 상황의 경험들을 제공해야 할 것이다.

참 고 문 헌

Anderson, J. R. (1985). *Cognitive psychology and its implications* (2nd ed). NY : W. H Freeman and Company.

Bower, G. H., J. B. Black, and T. J. Turner (1979). Scripts in memory for text. *Cognitive Psychology,* 11, 177-220.

Carpenter, T., Moser, J.,& Romberg T. (1982). *Addition and subtraction : A cognitive perspective.* Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., & Merkel, G. (1989). Thinking strategies : Teaching arithmetic through problem solving. In P. R. Trafton & A. P. Shulte (Eds.). *New directions for elementary school mathematics.*(pp.70-84). Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Curcio, F. R. (1990). Mathematics as communication : Using a language-experience approach in the elementary grades, In T. J. Cooney & C. R. Hirsch(Eds.). *Teaching and learning mathematics in the 1990s* (pp. 69-75). Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Gagné, E. D. (1985). *The cognitive psychology of school learning.* Boston : Little, Brown and Company.

Greeno, J. G.(1978). Understanding and procedural knowledge in mathematics education. *Educational Psychology,* Vol.12(3), 262-283.

Howard, D. V. (1983). *Cognitive psychology.* NY : Macmillan Publishing Co.

Jeon, P. K. (1988). *Geometry problem solving of Korean middle school students : An analysis of representation and transfer.* Unpublished doctoral dissertation. The University of Pittsburgh.

Jeon, P. K. & Park, S. S. (1993). The effects of elaboration on logical reasoning of 4th grade children. *Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. Ⅲ, 121-129.

Kanold, T. D. (1990). Effective mathematics teaching : One perspective, In T. J. Cooney & C. R. Hirsch(Eds.). *Teaching and learning mathematics in the 1990s* (pp.76-81). Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Krutetskii, V. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.* Chicago : University of Chicago Press.

Lappan, G., & Schram, P. W.(1989). Communication and reasoning : Critical dimensions of sense making in mathematics, In P. R. Trafton & A. P. Shulte(Eds.). *New directions for elementary school mathematics* (pp.14-30). Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (1992). Problem solving, In T. R. Post(Ed.) *Teaching mathematics in grades k-8* (pp.49-88). Needham Heights, Mass : Allyn and Bacon.

MAA.(1991). *A call for Change : Recommendation for the Mathematical Preparation of Teachers of Mathematics.* The Mathematical Association of America.

Mayer, R. E. (1983). *Thinking, Problem solving, Cognition.* NY : W. H. Freeman and Company.

NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

_____. (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics.* Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Nickerson, R. S., Perkins, D. N., Smith, E. E. (1985) *The teaching of thinking.* Hillsdale. NY : Lawrence Erlbaum Associates.

Reder, L. M. (1982). Elaborations : When do they help and when do they hurt? *Text* 2, 211-224.

Resnik, L. B. & Ford, W. W.(1981). *The psychology of mathematics for instruction.* Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates. 구광조, 오병승, 전평국(공역) (1995). *수학 학습 심리학.* 서울 : 교우사.

Silver, E. A. (1982). Knowledge organization and mathematical problem solving. In F. K. Lester & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical Problem Solving : Issues in* *research* (pp.15-25). Philadelphia, PA: The Franklin Institute Press.

Stiff, L.V., Johnson, J. L., & Johnson, M. R.(1993). Cognitive issues in mathematics education. In P. S. Wilson(Ed.), *Researdh ideas for the classroom*(pp.3-20). NY : Macmillan Publishing Co.

Tyler, R. W. (1949). *Basic principles of curriculum and instruction.* Chicago & London : The University of Chicago Press.