高等學校 學生의 代數 問題 解決 : 戰略과 誤謬 分析

이 상 원(충북증평공고)
전 평 국(한국교원대학교)

本 硏究는 高等學生들의 代數 問題 解決에 대한 戰略選擇 및 誤謬를 分析하고 問題 解決 過程에서 檢算을 活用하는지를 忠南의 邑 所在地 J 女高에서 自發的으로 志願한 1학년 學生 20名을 對象으로 調査하였다. 本 硏究의 結果로부터 다음과 같은 結論을 얻을 수 있었다. 學生들은 代數 問題解決에 있어서 한 가지 戰略으로 問題가 解決 되었을 때 다른 戰略들에 대해서는 별로 고려하지 않았으며, 代數 問題解決에 있어서 方程式의 槪念 또는 變形에 대한 誤謬가 상당히 發生되었으며,問題 把握의 未熟으로 옳지 않은 結果를 초래하였다. 학생들은 檢算을 活用하더라도 오개념, 不注意, 集中力의 不足, 檢算 方法 미숙 등으로 誤謬를 수정하지 못하였다.

問題解決에 대한 硏究의 窮極的 目的은 어떻게 하면 學生들의 問題解決力을 伸張시킬 수 있을까로 歸結된다고 할 수 있다. 學生들의 問題解決力을 伸張시키기 爲한 硏究는 그들의 問題解決 過程을 調査함으로써 보다 더 확실해질 수 있다. 왜냐하면, 그들의 問題解決 過程에서 나타날 수 있는 戰略의 選擇, 誤謬의 類型과 그 原因을 밝힘으로써 問題解決 지도를 원만히 할 수 있기 때문이다.

問題 解決 過程에서 戰略의 選擇은 戰略的 知識에 영향을 받는다. Greeno(1983)에 의하면 戰略的 知識은 問題를 解決하기 爲하여 計劃을 세우고 目的(goals)에 到達하기까지 必要한 下位目的(subgoals)을 設定할 수 있는 知識으로 이러한 戰略的 知識은 問題를 多樣하게 접하고 그에 따른 適切한 戰略을 選擇하고 適用하는 經驗을 통하여 獲得된다. 따라서, 學生들이 問題에 접했을 때, 戰略을 選擇할 수 있는 能力은 이미 獲得된 戰略的 知識에 同化(assimilation)시키려는 데에서 나타나게 되며, 새로운 戰略의 啓發은 創意性에 依存하게 된다. 그러한 이유로 여러 硏究者들은 問題解決 기능을 伸張시키는데 必要한 戰略的 知識을 獲得시키기 爲한 수단으로 數學的 問題解決을 하는데에 有用한 갖가지 戰略을 硏究, 提示하였다 (e.g.,Krulik & Rudnick,1985; Lenchner, 1983; Shoenfeld, 1985).

또한, 최근에 數學敎育者들은 學生들이 問題를 풀 때 만들어내는 誤謬를 硏究하기 始作하였다. Radatz(1979)는 誤謬를 數學的 敎材의 完全하지 못한 理解, 誤槪念, 必要한 事實들의 不完全한 熟練, 思考의 硬直性 혹은 틀린 演算, 적절치 않은 戰略의 使用으로 分類하였다. Davis et al (1978)은 옳은 知識과 옳지 않은 節次에서 誤謬가 發生된다고 하였으며, Carry et al.(1980)은 誤謬를 演算誤謬, 適用誤謬, 實行誤謬의 세 가지로 區別하였다.

우리 나라에서도 제5차 高等學校 數學科 敎育課程(문교부, 1989)에서는, 問題解決이 學校 數學의 촛점이 되어야 하며, 數學的인 基本 기능으로 問題解決 能力, 日常 生活에서의 數學의 適用 能力 및 合理的인 思考能力을 무엇보다 强調하고 있다. 그러나, 現在 우리 나라에서는 高等學校 學生들의 代數的 問題解決 過程에 대한 分析 - 특히 戰略의 選擇, 誤謬의 類型과 그 原因 - 은 硏究가 거의 되어 있지 않은 狀態에 있다. 특히, 高等學校 數學의 여러 分野 중에서, 代數的 問題解決은 數學 敎育의 基礎로서, 數學學習을 成功的으로 수행하기 爲해서는 무엇보다도 代數的 問題를 能熟하게 解決하지 않으면 안된다. 좀더 根源的으로 問題解決者 즉 學生의 立場에 서서, 學生들이 問題解決過程에 있어서 어떻게 戰略을 세우며 그 戰略으로 問題를 解決하는 過程에서 어떠한 誤謬가 發生 되는지를 깊이 探究 하여야 할 것이다.

本 硏究는 우리 나라 高等學校 學生들이 代數的 問題解決 過程에서 使用하는 戰略들과, 또한 代數的 問題解決 過程에서 發生시키는 誤謬를 分析함으로써 代數的 問題解決에 대한 基礎的인 敎育 資料를 提供 하는데에 그 目的이 있으며, 硏究 問題는 다음과 같다.

(1) 特定한 代數 問題의 解決 過程에서 成功的인 問題解決者들과 成功하지 못한 問題解決者들에 의해 使用된 戰略 選擇의 類似点과 差異点은 무엇인가?

(2) 特定한 代數 問題의 解決 過程에서 成功하지 못한 問題解決者들에 의해 發生된 誤謬 形態는 어떠한가?

(3) 學生들은 特定한 代數 問題의 解決 過程에서 全體 혹은 部分的으로 檢算을 活用하는가?

硏究 方法 및 節次

A. 硏究 對象

本 硏究는 충청남도 연기군에 소재한 J 女子高等學校의 1학년 學生중 지원자 20명을 硏究 對象으로하였다.

B. 檢査 道具

1) 豫備 檢査 問項 作成

豫備 檢査는 問項의 難易度, 本 檢査에서의 타당도, 問題解決 時間 등을 알아 보기 위한 目的으로 2학년 3개반 학생을 대상으로 實施하였다. 豫備 檢査 問項은 高等學校 代數 過程에서 광범위하게 使用되는 13問項으로 構成되었다. 모든 問題들은 인수분해의 개념을 적절히 결합하여 解決할 수 있다. 또한 각 問題는 여러가지 戰略으로 解決할 수 있으며, 學生들로부터 분명한 여러 가지 대답을 들을 수 있도록 설계 되었다. 그리고 관련 있는 問題끼리 분류하여 제시하였다.

2) 檢査 道具 選定

本 檢査에 적절한 6問項이 選定되었다(부록A).

1번 問項, 2번 問項, 4번 問項, 그리고 6번 問項은 약간 다르지만 밀접한 관계가 있다. 즉 1번 問項은 여러 가지 戰略(施行錯誤 方法, 代入 方法,結合 方法, 幾何的 해석 方法, 二次方程式의 使用 方法, 이차식의 인수와 계수 사이의 關係를 利用한 方法, 등)에 의하여 解決할 수 있으며, 本 檢査의 形態가 어떠한지를 포괄적으로 제시해 주고 있다. 2번 問項은 문장제로 제시하여 學生들이 問題 파악을 어떻게 하며 수식으로 어떻게 나타내는지를 알아보기 위하여 제시되었다. 4번 問項은 敎科書에 제시되어 있으며 結合 方法으로 解決하면 쉽게 解決할 수 있는 問項이다. 특히, 6번 問項은 문장제로서 한가지 戰略(結合 方法)으로 學生들이 問題를 쉽게 解決하였을 때 또다른 전략 代入 方法으로도 問題를 解決하도록 硏究者가 要求하였다.

3번 問項은 代入 方法을 적용하여 問題를 解決하는 過程에서 方程式의 개념을 어느정도 把握하는지를 硏究하기 위하여 제시되었으며, 5번 問項은 施行錯誤 方法과 二次 方程式의 使用 方法이 어느 정도 分布 되는지를 알아보기 위하여 제시하였다.

각 問題는 쓰여진 約定(written protocols)을 作成하기 위하여, 한 장의 종이에1문제씩 제시되었다.

C. 硏究 方法 및 節次

本 硏究는 "큰 소리로 말하기 방법(Thinking aloud Method)"을 使用한 硏究로, 그 節次는 다음과 같다.

1) 問題 提示

問題는 각장에 作成하여 대략 10분 간격으로 提示하는 것을 원칙으로 하지만, 學生의 實力 및 意志를 고려하여 時間의 증감을 고려하였다.

2) 인터뷰 節次

모든 學生은 個人的으로 인터뷰를 받으며 問題를 解決하게 하였으며, 問題解決 時間의 길이는 대략 1時間 정도였다. 만약 學生이 問題를 쉽게 解決하였을 때에는 다른 方法의 戰略으로 解決하도록 要求하였다.

學生들의 問題解決 活動 및 인터뷰는 言語약정(verbal protocols)을 作成하기 위하여 비디오 카메라로 촬영하였으며 學生들의 심리적 부담감을 줄이기 위하여 비디오 촬영을 學生들에게 알리지 않았다.

인터뷰 方法은 學生들에게 問題解決 過程에서 思考하는 內容이나, 解決 過程을 說明하면서 問題를 解決하도록 要求하였으며, 만약 어느 學生이 思考 過程을 說明하는 것을 不安하게 표현하는 경우에는 問題를 완전히 解決하게 한 후에 思考를 再生하여 說明하도록 要求하였다. 또한 問題解決이 완전히 끝났을 때, 學生 스스로 評價하도록 시켰다.

問題를 解決하는 過程에서 誤謬가 發生된 것을 학생이 알고 수정하려고 할 때에는 두줄로 긋고 계속 問題解決을 하도록 하였으며, 檢査紙가 不足할 때에는 같은 問項의 問題解決紙를 계속 제공해 주었다.

D. 資料 分析

學生들이 問題를 解決한 쓰여진 約定(written protocols)과 비디오 테이프를 分析하여 행동 및 言語 約定(verbal protocols)에 대한 프로토콜을 作成하였다.

쓰여진 約定(written protocols)과 言語 約定(verbal protocols)을 分析하여 問題解決時에 選擇되어지는 戰略, 또한 問題解決時에 發生되는 誤謬 그리고 檢算을 活用하는지를 資料 처리하였다.

結 果

1. 特定한 代數 問題의 解決 過程에서 成功的인 問題解決者들과 成功하지 못한 問題解決者들에 의해 使用된 戰略 選擇의 유사점과 차이점은 무엇인가?

전체적인 戰略 選擇은 代入 方法(27%), 施行錯誤 方法(13%), 結合 方法(42%), 二次方程式의 使用 方法 (8%), 二次式의 인수와 계수 사이의 관계를 利用한 方法(1%), 기하적 해석 方法(3%) 등으로 나타났다.

각 問項별 戰略 選擇에 있어서는, 문1에서는 갖가지 戰略들이 골고루 使用되었다. 문2에서는 結合 方法(50%)이 가장 많이 使用되었으며,기하적 해석 方法은 3명에 의해 使用되었다. 문3에서는 代入 方法이 압도적으로 使用되었으나(95%), b에 代入하여 成功하지 못한 學生은 4명이었다. 문4에서는 結合方法(90%)을 주로 使用하였다. 문5에서는 二次方程式의 使用 方法(50%)과 施行錯誤(30%)를 使用하였으며, 특히 한 學生은 二次式의 인수와 계수 사이의 관계를 使用하였다. 그리고 문6에서는 結合 方法(60%), 代入 方法(30%)을 使用하였으며, 施行錯誤 方法은 한 명(1%)이 使用하였다.

전반적으로 學生들은 이전에 학습한 상황에서 매우 成功的으로 解決한 戰略을 選擇하는 성향을 보였다(3번 문제에서 19명-95%, 4번 문제에서 17명-85%).

20명의 학생이 각각 6問項씩 총 120問項의 풀이 중에서 成功한 54(45%)問項 중 처음 시도한 戰略으로 成功한 問項은 41개(76%)이며, 처음 戰略에서 대체 戰略으로 成功한 問項은 13개 (24%)이다. 失敗한 66(55%)問項 중 처음 戰略을 고수한 問項은 46개(72%)이며, 대체 戰略을 使用한 問項은 20개(30%)이다.

대체 戰略을 알고 있는 大部分의 學生들은 問項의 答이 원하는 대로 나오지 않을 때에만 대체 戰略을 使用하였다(27%).

成功한 問題解決者들은 각각의 問項에 적합한 戰略(76%)을 選擇하였으며, 施行錯誤 方法은 선호하지 않았지만 최후의 경우에 대체 戰略으로 使用하였다.

失敗한 問題 解決者들은 한 가지 戰略으로 解決하려고 努力하였으며, 戰略들을 완전히 理解하지 못하였다. 또한, 失敗의 원인이 된 戰略들을 選擇하며, 施行錯誤 方法을 처음부터 선호하였다.

全體 120問項(6問項×20名) 중에서 成功한 戰略 選擇은 施行錯誤 12問項(22%), 代入 13問項(24%), 結合 25問項(46%), 二次方程式의 使用 3問項(6%), 二次式의 인수와 계수

사이의 관계 1問項(2%)으로 나타났다.

全體 120問項(6問項×20名) 중에서 失敗한 戰略 選擇은 施行錯誤 4問項(7%), 代入 19問項(32%), 結合 26問項(44%), 二次方程式의 使用 7問項(12%), 기하적 해석 3問項(5%) 등으로 나타났다.

特定한 代數 問題解決 過程에서 成功的인 問題解決者들과 成功하지 못한 問題解決者들에 의해 使用된 戰略 選擇의 유사점, 차이점을 요약하면 다음과 같다.

1) 유사점

① 學生들은 이전 상황에서 매우 成功的으로 解決한 戰略을 選擇하였다.

② 한 가지 戰略으로 問題가 解決되었을 때는 다른 戰略을 고려하지 않았다.

③ 客觀式 評價의 영향을 받아서인지 施行錯誤 方法을 의외로 많이 使用하였다.

2) 차이점

① 成功的인 問題解決者

o 각각의 問題에 알맞은 戰略을 選擇하였다.

o 한 가지 戰略으로 解決되지 않을 때 즉시 다른 戰略을 選擇하였다.

o 施行錯誤 方法을 선호하지는 않았지만 마지막 단계로 적용하였다.

② 成功하지 못한 問題解決者

o 한 가지 戰略으로 解決하려고 努力하였다.

o 失敗의 원인이 된 戰略을 選擇하였다.

o 戰略 選擇에서 경직성을 보였다.

o 施行錯誤 方法을 선호하며 처음부터 使用하였다.

o 戰略들을 완전히 理解하고 있지 않았다.

2. 特定한 代數 問題의 解決 過程에서 成功하지 못한 問題解決者들에 의해 발생된 誤謬 형태는 어떠한가?

本 論文에서는 誤謬를 Carry et al.(1980)이 분류한 計算 誤謬, 演算 誤謬, 實行 誤謬의 세 영역으로 나누어 分析하였다.

誤謬들은 한 가지 원인에 의해 發生되는 것도 있지만, 대부분은 복합적 원인에 의해 發生되었다.

代表的인 誤謬들은 계산오류, 동류항 계산의 오류, 대입에서의 오류, 근표현의 단순화에 대한 오류, 근의 공식을 사용하면서 발생된 오류, 방정식에 관한 오개념으로 발생된 오류, 인수분해의 오류, 문제의 요구를 상실한 오류, 방정식의 변형에서 발생된 오류, 문제 파악 부족으로 발생된 오류, 잘못 기재 혹은 읽어서 발생된 오류, 논리적 서술이 부족하여 발생된 오류들이었다.

誤謬들의 형태는 문2에서 問題 파악이 안된 學生이 2명(5%), 數式으로 表現하지 못해서 誤謬가 發生된 學生이 3명이었다 (15%). 문3에서 方程式의 基本 개념이 不足해서 誤

謬가 發生된 學生이 8명이었다 (40%). 문4에서 ±를 소홀히 하여 誤謬가 發生된 學生이 9명이었다 (45%). 문5에서 근의 공식을 완벽하게 使用하지 못한 學生이 4명이었다 (20%). 문6에서 "작은수-큰수" 의 개념을 파악하지 못한 學生이 7명(35%), 計算力 不足으로 誤謬가 發生된 學生이 6명이었다 (30%).

誤謬 形態들의 빈도수는 方程式의 基本 개념 不足으로 發生된 誤謬가 16개(12%)이며,方程式의 변형에서 發生된 誤謬가 21개(16%)로 가장 많았다. 의외로 問題 파악이 不足해서 發生된 誤謬가 13개(10%)이었다.

같은 形態의 誤謬를 2개 이상 범한 學生수는 方程式의 基本 개념이 不足하여 誤謬가 發生된 學生이 5명이었으며(25%), 論理的 서술이 不足하여 誤謬가 發生된 學生이 4명이었다 (20%). 이 자료는 本 硏究 結果의 일부로써 敎授-學習指導에 대단히 유용하게 活用될 수 있다.

特定한 代數 問題의 解決 過程에서 成功하지 못한 問題解決者들에 의해 發生된 誤謬 形態를 요약하면 다음과 같다.

o 成功 可能性 있는 戰略을 選擇하더라도 반드시 成功하지는 않았다. 또한 전에 유사한 問題를 풀어 보지 않은 경우에는 예상 외의 誤謬가 發生되었다.

1) 計算 誤謬들

① 많은 計算 誤謬들은 즉시 발견되고 수정되었다. 그러나 檢算
過程에도 불구하고 計算 誤謬는 여전히 존재하였다.

② 計算 誤謬는 學生들이 빨리 問題를 解決하려는 욕심에서 發生하였다.

2) 演算 誤謬들

① 演算 誤謬들이 가장 많은 部分은 方程式의 변형과 方程式에 대한 오개념으로 나타났다.

② 다른 演算誤謬들은 學生들의 不注意, 集中力의 不足, 基本 知識의 不足 등으로 나타났다.

③ 方程式을 변형할때 빈번히 發生하는 誤謬는 제곱근을 취할때 ±를 고려하는 것을 失敗한 것으로 나타났다.

④ 인수분해 혹은 근의 공식 풀이에서 學生은 能力이 있지만 실수하는 경우가 약간 나타났다.

⑤ 問題의 要求(目標)를 상실해서 옳지 않은 戰略을 選擇하거나 答을 찾지 못하는 경우가 있었다.

3) 實行誤謬들

① 問題 파악 미숙으로 옳지 않은 戰略의 選擇이나 演算을 적용하였다.

② 한 가지 誤謬는 예상외의 다른 誤謬들을 發生시켰다.

③ 자신감의 不足으로 問題 解決을 중단하는 경우가 있었다.

④ 論理的 풀이가 구성되지 않아서 誤謬가 發生되었다.
⑤ 解決 過程에서 중간 단계의 생략은 여러 가지 誤謬를 發生시켰다.

3. 特定한 代數 問題解決 過程에서 全體 혹은 部分的으로 檢算을 活用하는가?
檢算들의 種類는 다음과 같다.

① 全體 檢算 - 全體 檢算은 처음부터 誤謬를 찾는 過程 혹은 다시 解決하는 過程, 나온 답을 역산하는 것 등을 말한다.

② 部分 檢算 - 問題를 解決하는 過程의 중간에서 誤謬를 찾든지, 공식이 맞는지 확인한다.

③ 豫見된 (선입관) 檢算 - 學生이 미리 답을 예견하여 갯수가 많거나, 허수가 나오거나, 큰 수가 나올 때 답이 틀린 것으로 간주한 후 全體 檢算이나 혹은 部分 檢算을 實行한다.

④ 외현적 (표면적) 檢算 - 問題 解決 過程에서 4차方程式이 나오든지, 인수분해가 되지 않든지, 제곱근의 제곱근이 나타날 때 현행 解決 過程에 불신을 갖고 部分 檢算이나 全體 檢算을 實行한다.

각 問題에 使用된 檢算들의 形態는 全體 問項중 74問項에 대하여 각종 檢算이 이루어졌으나(62%), 檢算을 活用하여 成功한 問項은 35개이며 (47%), 成功하지 못한 問項은 39개이었다 (53%).

각종 檢算들의 成功과 失敗의 빈도수에서, 成功的인 問題 解決者들의 대부분은 問題解決의 중간에서 部分 檢算을 活用하였다. 全體 檢算은 오류를 수정하는 과정에서 成功률이 가장 높았다(53%). 豫見된 檢算을 活用하는 학생은 일부 있었으나 성공적이지 못하였다. 大部分의 學生들은 問題解決에서 答이 쉽게 나오지 않을 때 全體 혹은 部分 檢算을 活用하였다.

特定한 代數 問題의 解決 過程에서 全體 혹은 部分적인 檢算의 活用 여부에 대한 요약은 다음과 같다.

① 大部分의 學生들은 問題解決에서 答이 쉽게 나오지 않을 때, 全體 혹은 部分 檢算을 活用하였다.

② 成功的인 問題解決者는 問題解決의 중간 중간에서 部分 檢算을 活用하였다.
③ 豫見된 檢算은 問題解決에 도움이 되지 않았다.
④ 외현적 檢算은 全體 혹은 部分 檢算을 유도하였다.

結 論 및 提 言

A. 結 論

첫째, 우리 나라 高等學校 學生들의 特定한 代數 問題解決에 있어서의 戰略 選擇은

한 가지 戰略으로 問題가 解決 되었을 때 다른 戰略들에 대해서는 별로 고려하지 않았다. 따라서 학생들의 다양한 전략적 지식의 획득을 위해 여러 가지 戰略으로 問題를 解決할 수 있도록 하는 學習 태도를 강조하여야 하며, 여러 전략으로 해결할 수 있는 문항을 開發할 必要가 있다.

둘째, 特定한 代數 問題解決에 있어서 方程式의 개념 또는 변형에 대한 誤謬가 상당히 發生되었다. 따라서 方程式에 관련된 基本 개념에 대해 좀더 强調하여 學習이 이루어지도록 해야 할 것이다. 또한, 問題 把握 미숙으로 옳지 않은 戰略 選擇과 이로 인한 誤謬가 發生되는 結果를 초래하고 있다. 따라서 問題 解決에서 問題 把握이 무엇보다 重要하게 强調되어야 한다.

세째, 特定한 代數 問題解決 過程에서 檢算을 活用하더라도 學生들의 오개념, 不注意, 集中力의 不足, 檢算 方法의 미숙 등에 의하여 誤謬를 發見하지 못하는 경우가 많았다. 따라서 學生들의 問題解決에 대한 檢算은 愼重하고 좀더 注意깊게 실시되어야 하며, 좀더 奬勵되어야 할 것이다.

B. 提　言

本 硏究의 過程에서 나타난 결함과 制限点을 補完하여 보다 나은 後續 硏究를 위하여, 다음과 같은 提言을 하고자 한다.

첫째, 本 硏究에서는 誤謬 分析을 代數 分野로 限定하였는데 좀더 범위를 넓혀 數學의 전 영역에 대한 具體的 硏究가 必要하다.

둘째, 約定 방법(Protocol methods)에서 인터뷰 기술을 좀더 硏究하여 學生들의 內的 認知 狀況을 좀더 확실히 把握할 必要가 있다.

參 考 文 獻

교육부(1992). 고등학교 교육과정. 서울:대한교과서주식회사.

문교부(1989). 고등학교 수학과 교육과정해설. 서울:삼진인쇄주식회사.

박두일,신동선(1993). 고등학교 일반수학. 서울:(주)교학사.

양인환(1990). 수학적 문제해결에서의 소집단 활동의 인지적 효과분석. 한국교원대학교 박사학위 논문.

이종락,류희찬,강문봉(1991). 고등학교 수학과 교육과정 개선 방향에관한 연구. 제8회 수학교육학 세미나집(1991,5). 수학교육학 세미나그룹.

Charles, R., & Lester,F.(1982). Teaching problem solving:What, why & how. California: Dale Seymour Publications.

Gagné, E.D.(1985). The Cognitive psychology of school learning. Boston: Little

Brown and Company.
Kantowskii, M.G. (1974). Processes involved in mathematical problem solving. Journal for Research in Mathematics Education. Reston, VA:The National Councilof Teachers of Mathematics, Inc.
Krutetskii, V.A. (1976). The psychology of mathematical abilities in school children. Chicago: University of Chicago Press.
Lester, F.K. (1980). Reserch on mathematical problem solving. In R.Shumway(Ed.), Research in mathematics education. Reston,VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
Matz, M. (1979). Toward a computational theory of algebraic competence. The Journal of Children's Mathematical Behavior.
Mayer, R. (1982). The psychlogy of mathematical problem solving. In F.K. Lester & J. Garofalo (Eds.), Mathematical problem solving: Issues in research.Philadelphia, PA: The Franklin Institute Press.
NCTM.(1980). Agenda for action. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
___.(1983). Agenda for action. Reston, VA: The National Council of Teachers o f Mathematics, Inc.
___.(1989).Curriculum and evaluation standard for school mathematics. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
Newell, A., & Simon, A. (1972). Human problem solving. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall.
Polya, G. (1957). How to solve it (2nd ed.). New York :Doubleday.
Radatz, H.(1979). Error analysis in mathematics education.Journal for Research in Mathematics Education. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
Shoenfeld, A.H.(1980).Teaching problem solving skills. The American Mathematical Monthly, 87(10).
Suydam,M.,& Dessart, D.J.(1980). Skills learning. In R.J. Shumway(Ed.), Research in mathematics education. Reston, VA : The National C ouncil of Teachers of Mathematics, Inc.

ABSTRACT

Algebraic Problem Solving of the High School Students : An Analysis of Strategies and Errors

Lee, Sang Won(Chungbuk Jung Pyung Technical High School)
Jeon, Pyung Kook(Korea National University of Education)

The purpose of this study is to provide the primary sources to improve the problem solving performance by analyzing the errors and the strategies selection of the high school students when solving given algebraic problems.

To attain the purpose of this study, the questions for investigation in this study are :

1. What are the differences / similarities in the patterns of errors committed by successful and unsuccessful problem-solvers when solving particular algebraic problems ?
2. What are the error types chosen by unsuccessful problem-solvers when solving particular algebraic problems?
3. Do students utilize checking, either locally or globally, when solving particular algebraic problems?

Twenty students were drawn out of 10th grade students in J girls' high school in Yengi-gun, Chung-Nam, for this study.

The problem-solving test was used as a test instrument. From the data, the verbal protocols and the written protocols were analyzed by the patterns.

The conclusions drawn from the results obtained in the present study are as follows:

First, in solving particular algebraic problems, when the problems were solved with one strategy, most students didn't give any consideration to other strategies. So mathematics teachers should teach them to use the various strategies, and should develop the problems to be used the various strategies.

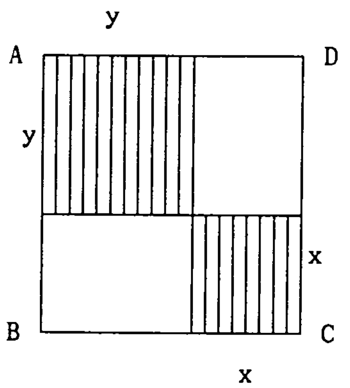
Second, in solving particular algebraic problems, errors on notions or transformations of equations were found. Thus, the basic knowledges related to equation should be taught. In addition, most unsuccessful students seleted the strategies inadequately to solve the problems because of misunderstanding the problems. So, to improve the problem solving performance the processes of 'understanding problem' should be emphasized to students.

Third, although the unsuccesful students used the 'checking' processes when solving the problems, most of them did not find the errors because of misconceptions related to the problems, carelessness, and unskillfulness of checking. Thus, students must be taught more carefully and encouraged to use the checking.

問題解決紙(附錄 A)

1) 만약 $t-u=5$ 이고 $tu=-4$ 일때 (t^2+u^2)의 값은 얼마 인가 ?

2) 아래 정사각형에서 빗금친 부분의 면적의 합이 $5cm^2$ 이다. 그리고 x와 y의 곱이 2 이다. 선분 AB 의 길이는 얼마인가 ?



3) 방정식 $y^2+(b^2+4)y+6b+3=0$은 y에 대하여 2개의 근을 갖는다. 만약 하나의 근이 -3 이고 다른근은 -3보다 크다. y의 다른근은 얼마인가 ?

4) 만약 $x^2+y^2=36$ 이고 $xy=-10$ 이면, $(x+y)$ 의 값은 얼마인가?

5) $x^2+8\sqrt{3}\,x-60$ 을 인수분해 하여라.

6) 두수의 곱은 2이다. 그리고 두수의 제곱의 합은 20 이다.
(작은수- 큰수)=?