수학적 패턴 지도를 위한 연구

신 인 선 (한국교원대학교)
김 상 미 (서울구로초등학교)

I. 서 론

수학은 전통적으로 수와 모양의 과학으로 묘사되어 왔다. 초등학교에서 산술과 기하를 강조하는 것은 이러한 뿌리깊은 관점에서 기인한다고 할 수 있다. 그러나 수학자들의 탐구 영역이 확장됨에 따라 수학은 더욱 폭 넓은 내용을 포함하게 되었고, 수학은 이제 단지 수와 모양만을 탐구하는 학문이 아니다. 미국 국립 연구원(NRC) 산하의 수리 과학 교육국(MSEB)의 1990년 보고서 『학교 수학의 재구성 : 교육 과정의 철학과 틀』(Reshaping School Mathematics : A Philosophy and Framework for Curriculum)에서 "수학은 패턴의 과학이며 언어"라고 하였다. 수학이 패턴의 과학이라고 하는 것은, 오늘날의 수학은 산술이나 기하만이 아니라 패턴에 관한 열린 탐구임을 의미한다. 또한 수학은 관계와 패턴에 관한 의사 소통의 수단인 언어로서, 누구나 배워야 할 언어라는 것이다.

수학의 성격 변화에 따른 패턴의 강조는 수학교육에서 새롭게 다루어져야 할 주제라든지 감소되어야 할 부분만을 말하고 있는 것은 아니며, 수학의 탐구 내용뿐 아니라 탐구하는 방식에 대해서도 방향을 제시하고 있다. 따라서 수학교육에 있어서 패턴의 강조는 하나의 주제로 뿐만 아니라 수학을 탐구하는 방식에 대한 논의이기도 한 것이다. 수학 수업에서 학생의 이해는 단지 학생이 특정한 발달 단계에 이르러 저절로 가능하게 되는 우연적인 상황이 아니며, 학생의 수학적 이해를 위해서는 탁월한 교수이 요구된다.

본 연구에서는 첫째로 수학 교육에서 패턴이 강조되는 이론적 근거를 탐색하고, 둘째로 학교 수학에서 다루어질 수 있는 수학적 패턴을 유형화하여, 유형화한 틀에 따라 어떤 수학적 패턴을 주로 다루는가를 4학년 수학 교과서 및 익힘책을 분석하여 결과를 논의한다. 끝으로 수학적 패턴에 관한 교수 전략 및 활동들을 소개하기로 한다.

Ⅱ. 수학 교육과 패턴

수학은 '패턴의 과학(Steen, 1988 ; National Research Council, 1990 ; Devlin, 1994)'이라고 한다. 이러한 정의는 어떻게 가능하며 수학교육에 있어서는 어떻게 받아들여야 하는지에 대하여 살펴보기로 한다. 먼저, 수학관의 변화에 따른 수학의 정의와 새로운 정의에 입각한 수학교육에서 패턴의 강조를 고찰해 보고, 다음으로는 수학 교육에서 패턴의 중요성을 논의한다.

1. 수학 : '패턴의 과학'

수학이란 무엇인가라는 물음에 대한 답은 역사를 흐르면서 몇 차례의 변화를 겪어왔다. 이러한 변화에 대하여 Devlin(1994)이 밝힌 큰 줄기를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 기원전 5000년경까지의 이집트와 바빌로니아 수학의 시대는 수에 대한 연구라고 할 수 있으며, 이 때의 수학은 거의 산술만으로 구성되었으며 실용적인 기술의 하나였다.

둘째, 그리스 수학의 시대 즉, 기원전 500년부터 기원 후 300년까지는 주로 기하학에 관심을 둔 시기였다. 그리스인들에게는 단지 수학은 실용적인 관심이 아니라 심미적이고 종교적인 요소의 지적 탐구라고 여겼다. 이러한 접근이 수학을 계산 기술의 모임이 아니라 하나의 연구 분야로의 탄생을 가능하게 한 것이다. 고대 그리스 수학자들은 수를 길이의 척도로서 기하적인 방식을 고려하였다. 수와 일치하지 않는 길이 즉, 무리수의 길이가 존재함을 알았을 때, 수에 대한 그들의 연구는 거의 정지하게 된다. 기하학을 강조한 그리스인들에게 있어서는 수학이란 수와 형태에 대한 연구였다고 할 수 있다.

셋째, 수학의 본질에 커다란 변화를 가져온 것으로 미분적분학을 발견한 뉴턴과 라이프니츠에서라고 할 수 있다. 이전의 수학은 계산이나 측정 또는 형태를 다루는 정적인 문제에 한정되었다면, 뉴턴과 라이프니츠 이후의 수학에서는 운동과 변화를 다루는 기법을 도입하게 된 것이다. 수학자들은 행성의 운동, 낙하하는 물체의 운동, 액체의 흐름, 기계의 팽창, 자기나 전기의 물리적인 힘, 유행병의 확산, 이윤의 변동 등을 연구할 수 있게 되었다. 이 때의 수학은 수나 형태와 더불어 운동, 변화, 공간에 대한 연구인 것이다.

넷째, 18세기 중엽부터 수학자들은 수학의 응용만이 아니라 수학 자체에 대한 관

심을 갖게 되었다. 이전의 미분적분학과 관련된 초기의 연구들은 대부분 물리학의 연구에 관심을 두었고, 당시의 수학자들 중 많은 사람들이 물리 학자로 간주되고 있었다. 하지만 19세기말에 이르러서 수학은 수, 형태, 운동, 변화, 공간 등과 함께 이들의 연구에 사용되는 수학적인 도구에 대한 연구가 시작된 것이다.

다섯째, 수학은 패턴의 과학이라는 정의의 출현을 들 수 있다. 20세기에 접어들 당시에는 수학은 산술, 기하, 미적분학 등과 같은 12개의 서로 다른 분야로 구성되었으나, 오늘날의 수학의 가짓수는 60과 70사이에 있다고 하는 것이 적절하며, 현 세기에 오면서 수학 활동은 엄청나게 성장하여 새로운 분야가 급격하게 생겨났다. 특별한 연구들은 연구하는 대상이 아니라 연구하는 방법 즉, 방법론 때문에 수학으로 분류되었다. 대부분의 수학자가 동의하고 있는 '수학은 패턴의 과학이다.'라는 정의가 출현한 것은 20년 정도에 불과하며, 수학자가 연구하는 것은 추상적인 패턴, 즉 수치적 패턴, 형태의 패턴, 운동의 패턴, 행동의 패턴 등이다.

이상에서 살펴본 수학의 성격 변화에서 보듯이 수학은 수의 탐구, 기하의 탐구, 운동·변화·공간의 탐구, 수학 연구의 도구에 대한 탐구로 그 영역을 점차 확대하여 왔다. 이제는 수학의 영역이 폭넓어짐에 따라 수학이 무엇인가에 대한 학문적 성격을 밝혀 줄 수학의 본성을 논의하기에 이르렀다고 할 수 있다.

수학 영역의 확대와 더불어 '수학은 패턴의 과학'이라는 정의에 이르게 된 큰 계기로는 무엇보다도 공학의 역할을 들 수 있을 것이다. 컴퓨터는 수학의 학문적인 성격뿐 아니라 수학의 규모를 변화시키며, 과학에서의 망원경과 현미경의 역할을 수학에서는 컴퓨터가 한다(Steen, 1988, p.616). 컴퓨터의 도입에 따른 수학의 탐구 방법에 대하여 Steen(1990)은 다음과 같이 말하고 있다.

> 수학의 발전에 대한 이정표가 될 수 있는 것은, 19세기의 Gauss나 Poincaré 와 같은 수학의 대가들만이 '마음의 눈'에 의지하여 볼 수 있었던 패턴에 관한 연구의 많은 부분을 요즈음에는 컴퓨터 그래픽의 도움으로 우리도 실제 눈으로 볼 수 있게 된 것이다. '본다'는 것은 항상 두 가지 다른 의미를 가져왔다. 즉, 눈으로 인식한다는 것과 마음으로 이해한다는 것이다. 오늘날에는 수학자들이 패턴을 보는 새로운 방법을 발견함에 따라 눈과 마음 둘 모두를 수용하는 쪽으로 바뀌고 있다.(p.2)

수학교육의 방향을 제시하는 연구물들은 수학 교실의 컴퓨터의 도입을 권고 및 강

조하고 있으며(NCTM, 1989, 1990, 1993, 1995), 수학 교실에서 어떻게 사용되어져야 하는지를 논의하고 있다. 패턴의 탐구를 위해서는 컴퓨터가 하나의 강력한 도구로서 사용된다. 컴퓨터나 계산기 등을 이용하여 간단하고 편리하게 패턴을 만들 수 있을 뿐만 아니라, 어떤 종류의 패턴은 컴퓨터를 이용하지 않고는 제대로 볼 수가 없는 것들도 있다. 규칙성은 대개의 경우 반복을 통하여 드러나며, 무한히 반복하여 얻을 수 있는 패턴들을 종이와 연필만으로 얻어낸다는 것은 거의 불가능하다. 그러나 컴퓨터는 수만 수천의 거의 무한에 가까운 반복을 통하여 무한에서 가능한 패턴을 얻어낼 수 있게 해 준다. 컴퓨터는 반복성을 보여주는 강력한 도구로서 패턴의 탐구에서 강력한 역할을 한다. 종이와 연필만으로 불가능했던 탐구들이 이제는 컴퓨터를 통하여 가능하게 됨으로써, 수학은 더욱 폭넓은 학문이 된 것이다. 수학의 새로운 정의로서 패턴의 탐구는 수학의 폭넓은 영역과 함께 수학의 본성을 강조하는 것으로 받아들일 수 있다. Stewart(1995)는 다양하게 폭넓어진 수학에서 수학의 근본 정신에 집중할 것을 요구하며, "패턴을 패턴으로 다루는 수학"을 주장하고 있다. 수학의 발전 과정은 패턴을 발견하고, 설명하고, 창조하며, 만들어 낸 패턴 속에 숨어 있는 질서와 규칙을 밝혀 내려는 노력의 결과이다. 수학의 응용은 패턴에 맞는 자연현상을 설명하고 예상하는 데에 패턴을 이용하는 것이다. 패턴은 다른 패턴을 시사해 주고 패턴들의 패턴을 낳기도 한다. 이제 '패턴의 과학'이라는 폭넓은 개념으로서 수학을 꽃피우는 시기가 된 것이다.

2. 수학 교육에서 패턴의 중요성

수학교육은 1990년대에는 이전에 소홀하게 여겨졌던 주제들 중에서 몇 몇 주제들에 더 많은 관심을 가지게 될 것이며, 이들 중 가장 흥미롭고 중요한 것이 패턴, 관계 및 함수이다(Geer, 1992, p.19). 수학교육에 있어서 새로운 방향을 모색하는 많은 연구들은 수학교육과정에서 더 많은 관심을 가져야 할 주제 중의 하나로서 패턴을 들고 있다(NCTM, 1989, 1991, 1993). 패턴은 수학의 주제를 엮는 기본이며, 전 미국 수학 교사 협의회(NCTM)에서 제시하는 Standards 전반에 걸쳐 강조되고 있다. Howden(1989)는 "패턴, 관계 및 함수의 탐구는 셈하기나 계산에서부터 미분 적분학에 이르기까지 수학 전반에서 만나게 되는 규칙성으로서 Standards 문헌 전반을 꿰뚫는 실이다. (p.23)"라고 말한다. 수학에서 패턴의 강조는 수학 교과에 대한 인식 변화를 촉구하는 것으로, 본 절에서는 먼저 수학 교과에 대한 인식의 면에서 패턴의 중요성을 살펴보고, 문제 해결로서의 수학, 의사 소통으로서의 수학, 수학적 추론으

로서의 수학, 수학적 연결로서의 수학의 면에서 패턴의 중요성을 살펴보기로 한다.

(1) '수학 교과에 대한 인식'과 패턴

수학 교과에 대한 인식의 변화는 단지 수학에 대한 호의적인 감정을 갖는 것에 목적이 있는 것이 아니며, 수학적 내용과 구조를 이해하고 음미하는 단계까지 이르는 것이다. 수학이 중요한 과목이라든지 필요하다는 생각에 그치는 것이 아니라, 학생이 직접 수학적 사고를 하여 자신감을 갖는 데에 있다. 학생들은 학교 수학에 대한 단순한 계산이나 암기의 과목이라는 부정적인 인식을 벗어버릴 수 있는 학습 기회를 가져야 하며, 패턴의 탐구는 이러한 기회를 제공하는 하나의 주제가 될 수 있다. 수학에 대한 자신감이나 즐거움은 쉬운 문제의 해결이나 옳은 답을 구하는 것만으로 느낄 수 있는 것은 아니며, 때로는 다양한 해가 있는 쉽게 풀리지 않는 문제를 고민하는 가운데에서 느끼는 것이기도 하다.

패턴의 탐구에서는 다양한 해가 가능한 탐구 상황에서 수학적인 관계 및 규칙성에 집중함으로써 학생의 능동적인 참여를 촉구하며 수학의 다양한 면을 경험하게 한다. 수학적 패턴들은 역동적인 수학의 모습을 보여주며, 수학의 아름다움을 느낄 수 있는 기회를 제공한다. 이 때의 수학의 아름다움은 시각적인 아름다움뿐만이 아니라, 패턴이 보여주는 수학의 구조에서 느낄 수 있는 아름다움이다. 이러한 패턴 탐구의 경험들은 수학의 즐거움과 수학의 아름다움을 느끼게 하고, 수학에 대한 자신감을 갖게 하며, 더 나아가서는 수학 교과에 대한 인식을 새롭게 해 줄 것이다.

(2) '문제 해결로서의 수학'과 패턴

문제 해결에 대한 견해는 차이가 있을지라도 문제 해결이 수학교육과정에서 중요한 역할을 해야 한다는 점에는 수학 교육계가 대체로 동의하고 있다. Schroeder & Lester(1989)는 수학교육에서 문제 해결에 접근하는 방식을 세 가지로 개념적인 구별을 하였다. '문제 해결에 대한 수업', '문제 해결을 위한 수업', '문제 해결을 통한 수업' 등이다. 첫 번째의 '문제 해결에 대한 수업'에서는 문제 해결의 단계를 강조하며, 두 번째의 '문제 해결을 위한 수업'에서는 학습한 내용들을 문제 해결에 적용하는 데에 강조점이 있다. 이 두 가지 수업의 한계를 지적하면서, 세 번째의 '문제 해결을 통한 수업' 즉, 수업에서 학습하고자 하는 주제를 잘 나타내는 문제로부터 수학적 아이디어를 개발하는 수업을 강조하고 있다.

위의 세 가지 접근 방식들의 장단점에 대한 논의는 또 다른 문제이며, 이들 각 접근 방식들은 각기 패턴을 중요 요소로 다루고 있다. '문제 해결에 대한 수업'에서는

패턴 찾기를 강력한 문제 해결 전략의 하나로 들고 있으며, '문제 해결을 위한 수업'에서도 학습한 패턴을 문제 해결 사태에 활용하도록 강조된다. '문제 해결을 통한 수업'에서는 패턴의 이해는 문제 해결의 하나의 전략이나 도구라는 면에서 중요한 것만은 아니며, 수학에서 학습해야 할 패턴을 드러내는 문제 해결을 통하여 문제 해결의 과정에서 패턴을 경험하여 수학적인 아이디어를 개발하는 데에 강조점이 있다.

학생이 패턴을 이해하기 시작할 때 문제 해결 전략으로서 '패턴 찾기'를 사용하며, 학생은 패턴을 배울 뿐만 아니라, 패턴을 사용하기도 하는 것이다(NCTM, 1989). 패턴의 이해는 다양한 수학적 사고를 풍부하게 하며, 학생이 문제 해결자가 되고 추상적 사고자가 되도록 도와준다(NCTM, 1993a).

(3) '의사 소통으로서의 수학'과 패턴

의사 소통은 수학 교육 전반에 걸쳐 강조되어야 할 것이며, 수학 수업에서는 4가지의 언어 기술 -말하기, 듣기, 읽기, 쓰기-를 요구한다(NCTM, 1993e). 학생들은 수학적으로 의사 소통하고 수학을 생산적으로 활용할 때 수학을 하나의 언어라고 생각하게 된다. 특히 오늘날의 수학적으로 읽고 쓰는 능력 -즉, 영국인들은 '수학·과학적 사고 능력(Numeracy)'이라고 부르는 능력-은 언어적으로 읽고 쓰는 능력과 마찬가지로 중요하다(NRC, 1989). 수학·과학적 사고 능력은 단지 숫자와 친숙한 것을 넘어서서 일상생활에 스며 있는 수학 개념을 파악할 수 있어야 한다. 수학적으로 읽고 쓰는 능력은 패턴의 탐구에서 중요한 도구이기도 하면서 패턴의 탐구가 지향하는 바이기도 하다.

패턴의 탐구에서는 학생들은 패턴을 설명하고, 각자가 본 패턴에 대해서 써 보고, 패턴에 관한 아이디어를 나눈다(NCTM, 1993a). 패턴의 탐구는 일상의 언어와 수학의 언어를 의미있게 연결해 줌으로써, 패턴을 통하여 의사 소통으로서의 수학을 강화할 수도 있다. 패턴의 탐구에 있어서 의사 소통은 필수 불가결한 하나의 조건이기도 하다. 즉, 의사 소통은 패턴의 탐구를 위한 수단이 됨과 동시에 패턴 탐구에 있어서 하나의 목적인 것이다.

(4) '추론으로서의 수학'과 패턴

추론은 수학을 알고 행하는 데 있어서 기본적이며, 귀납 추론이나 연역 추론은 모든 영역에서 강조된다(NCTM, 1989). Kutz(1991)는 "수학적 추론 특히 귀납적 추론은 패턴을 인식하고 기호화하는 능력에 달려 있다"(pp.264-267)고 말한다. 패턴의 인식은 귀납 추론의 본질이며, 패턴의 인식은 문제에 대한 가설을 이끌어 낼 수 있게

한다. 패턴의 탐구는 다양한 예에서 패턴을 인식하고 조직하며 자신의 패턴을 사용하여 가설을 이끌어 내게 하는 것이다. 패턴의 탐구에서는 여러 가지 종류의 추론이 소개될 수 있으며, 추론의 강조와 함께 수학은 단순한 규칙과 절차를 암기하는 학문이 아니라 의미 있고 논리적인 것으로 인식하게 해 준다.

(5) '수학적 연결성'과 패턴

수학적 연결성은 다양한 표현들을 관련짓는 것, 수학의 내용들 사이의 관계를 인식하는 것, 다른 교과에서 수학을 사용할 수 있는 것, 일상의 생활에서 수학을 사용할 수 있는 것 등을 포함한다.

패턴은 색, 모양, 방향, 방위, 수 등 여러 가지 속성을 포함하며, 하나의 패턴에서 다양한 표현을 보는 것은 학생이 구조에 초점을 둘 수 있도록 도와준다(Howden, 1989, p.19). 패턴의 탐구는 다양한 표현들 간의 관계를 인식하는 것을 기초로 한다. 또한 패턴을 통하여 수학의 다양한 영역에서 수학의 상호 관련성을 관찰할 수 있으며, 더 나아가서는 과학, 미술, 음악, 문학, 사회과학 등과도 밀접한 관련을 맺는다. 일상에서는 자연물이든 인공물이든 나름의 패턴이 있으며 어디에서든지 패턴을 찾을 수 있다. 일상에서 발견되는 다양한 패턴의 탐구는 일상 생활과의 수학적 연결성을 강화해 준다. 수학의 뿌리들을 학생들의 경험 안에서 수학의 여러 갈래들과 연결할 필요가 있으며, 바로 이것이 연결성의 강조이며 패턴에 집중하는 이유이기도 하다. 패턴의 탐구는 다양한 표현간의 연결성을 제공하며, 실생활과 수학의 연결성, 타 교과와 수학의 연결성, 수학의 영역간의 연결성 등을 제공한다.

Ⅲ. 수학적 패턴의 유형화 및 교과서 분석 결과 논의

초등학교에서의 수학적 패턴을 밝혀보고 교과서 분석의 틀을 찾고자 수학적 패턴의 유형화를 시도한다. 다음으로는 유형화한 수학적 패턴에 따라 현행 수학책 및 수학 익힘책을 조사 분석한 결과를 통하여 어떤 패턴이 다루어지고 있는지 논의한다.

1. 수학적 패턴의 유형화

다음과 같은 두 가지 준거에 따라 수학적 패턴의 유형화를 시도한다. 첫째로는 어떤 속성을 패턴화하는가에 따라 유형화하고, 둘째로는 어떠한 방식으로 패턴을 생성하는가에 따라 유형화한다.

(1) 패턴의 속성에 따른 유형

패턴을 어떤 속성에 의해 패턴화하는가에 따라 다음과 같이 수학적 패턴을 유형화 할 수 있다.[1)]

① 관계적인(Relational) 속성에 따른 패턴 :

관계적인 속성 즉, 수열이나 함수를 기초로 하는 패턴.

<예> 2 , 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ……

② 기하적인(Geometrical) 속성에 따른 패턴 :

기하적인 속성 즉, 도형의 성질이나 모양을 기초로 하는 패턴.

<예> □○◇△□○◇△□○◇△□○◇△□○◇△ ……

③ 물리적인(Physical) 속성에 따른 패턴 :

물리적인 속성 즉, 색, 크기, 방향 등을 기초로 하는 패턴.

<예> □■■■□■■■□■■■□■■■□■■■□■■■ ……

하나의 패턴이 한 가지 속성을 갖는 것은 아니며, 일상에서 흔히 볼 수 있는 패턴들은 위의 세 가지 속성을 모두 갖고 있는 것이 대부분이다. 패턴의 어떤 속성을 인식하느냐에 따라 하나의 패턴을 여러 가지 다른 방식으로 해석할 수 있다. 학교 수학에서는 어떤 속성의 패턴을 수학 교수·학습에서 경험시킬 것인가에 따라 수학 수업에서 강조되어야 할 패턴이 다르게 드러날 것이다. 그러나 이 때의 패턴은 강조점이 있을 뿐이며, 적어도 실제에 드러난 이후에는, 오직 유일하게 한 가지 속성만을 갖는 패턴이란 우리의 일상에서는 물론 수학 교실에서도 가능하지 않다.

(2) 패턴의 생성 방식에 따른 유형

패턴을 어떠한 방법으로 패턴화하는가, 즉 패턴의 생성 방식에 따라 수학적 패턴을 다음과 같이 유형화할 수 있다.

① 반복에 의한 패턴 :

기본 단위나 기본 규칙이 변화없이 그대로 유지되면서 반복되는 패턴.

<예> 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ……

<예> ♤♠♤♠♤♠♤♠♤♠♤♠♤♠♤♠♤♠♤♠♤……

---

1. 패턴을 패턴의 속성에 따라 유형화 할 수 있다는 점에 대해서는, 전평국의 "초등수학교육의 이론과 실제(출판예정)" 중에서 수 감각과 관련된 패턴의 설명으로부터 시사점을 얻었다.

② 증가에 의한 패턴 :

기본 단위나 기본 규칙이 증가 또는 변형되면서 만들어지는 패턴.

<예> 1, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, ……

<예>

```
  *          *          *
 * *        * *        * *
           * * *      * * *
                     * * * *
```

③ 대칭에 의한 패턴 :

기본 단위가 대칭되면서 만들어지는 패턴.

<예> ≤ ≥ ≤ ≥ ≤ ≥ ≤ ≥ ≤ ≥ ≤ ≥ ≤ ≥ ……

<예> 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, 6, -6, ……

④ 회전에 의한 패턴 :

기본 단위가 회전되어 만들어지는 패턴.

<예> ⬆ ➡ ⬇ ⬅ ⬆ ➡ ⬇ ⬅ ⬆ ➡ ⬇ ⬅ ⬆ ……

⑤ 카오스 현상에 의한 패턴 :

자연에서 흔히 볼 수 있는 비정규적인 패턴으로 유체의 난류 현상, 해안선의 구조, 구름의 패턴, 고사리 잎의 패턴, 허파의 가지 구조, 번개의 구조, 우주의 은하계의 분포, 불규칙적인 주가의 등락, 인구 동향 등을 들 수 있다. 이러한 카오스 현상이 드러내는 기하적인 패턴을 프랙탈이라고 하며, 수학에서 잘 알려진 칸토르 집합이나 시어핀스키 삼각형도 프랙탈의 예들이다. 프랙탈을 한 마디로 정의하기는 어려우나, 프랙탈은 자기 유사성[2] 및 프랙탈 차원[3]이라는 두 가지의 큰

---

2. 자기 유사성이란 각 부분이 전체와 유사한 형태를 지니는 성질을 말한다. 간단한 예로는 칸토르 집합이나 코흐 곡선, 시어핀스키 삼각형 등에서 볼 수 있다. 이러한 예들은 프랙탈의 예이기도 한 것들이다. 하지만 자기 유사성을 갖는 모든 것이 프랙탈이라고 할 수는 없으며, 예를 들어 선분의 경우는 부분이 전체의 축소가 되는 자기 유사성을 갖지만 프랙탈이고는 할 수 없다.

3. 프랙탈은 삼각형이나 직선과 같은 기하 도형과는 다른 놀랄 만한 성질들을 가지고 있음이 밝혀졌다. 유클리드 기하학의 세계에서는 사물이 정수로 표시되는 차원을 가진다. ...... 그러나 프랙탈은 얼마나 많이 꿈틀대는가에 따라 1차원과 2차원 사이의 어느 차원이나 될 수 있다. 곡선이 직선과 유사할수록 더 매끄럽고 프랙탈 차원은 1에 가까워진다. 거칠게 갈지자로 움직이면서 거의 평면을 채워가는 곡선은 2에 가까운 프랙탈 차원을 갖는다. ..... Mandelbrot는 .....프랙탈 차원을 계산하는 다양한 방법을 자세히 기술했으며 ..... 그 결과 프랙탈 차원을 이용하여 복잡한 형태의 도형까지도 수학적으로 처리할 수 있게 되었다. (김순

특징을 갖는다.

패턴의 생성 방식에 따른 위의 다섯 가지의 유형들도 하나의 패턴에서 다양하게 나타날 수 있으며, 대부분 여러 가지 생성 방식이 복합적으로 적용된 패턴일수록 더욱 인식하기에 어렵다. 패턴의 생성 방식을 이해하는 것은 패턴의 구조를 설명하는 하나의 틀이 될 수 있을 것이며, 수학적 패턴 인식의 핵심적인 문제이기도 하다.

2. 수학적 패턴에 대한 수학 교과서 분석 결과 논의

본 연구에서는 유형화한 패턴에 따라 현행 수학책과 수학익힘책[4)]에서 어떤 수학적 패턴이 나타나는가를 조사 분석하였다. 각 학습 내용별 조사 결과는 다음 <표1>과 같다. <표 I >에서의 수학적 패턴의 유형은 앞 절의 '수학적 패턴의 유형화'에서 밝힌 바에 따른다. 즉, (1)-①은 관계적인 속성에 따른 패턴, (1)-②)는 기하적인 속성에 따른 패턴, (1)-③은 물리적인 속성에 따른 패턴을 말한다. (2)-①은 반복에 의한 패턴, (2)-②는 증가에 의한 패턴, (2)-③은 대칭에 의한 패턴, (2)-④는 회전에 의한 패턴, (2)-⑤는 카오스 현상에 의한 패턴을 말한다.

현행 4학년 수학책 및 수학익힘책을 분석한 결과, 4학년 수학 교과서에서 수학적 패턴을 다루는 데 있어서 다음과 같은 문제점들을 찾을 수 있었다. 첫째, 4학년 수학 교과서에 나타난 패턴들은 대부분 수 패턴에 한정되어 있으며, 이외의 패턴을 거의 다루지 않고 있다. 둘째, 4학년 수학 교과서에서는 괄호 넣기나 퍼즐 문제에서 하나의 답만을 찾는 패턴이 강조되어 있으며, 패턴을 변형하거나 새로운 패턴을 만드는 활동을 찾아볼 수 없다. 셋째, 4학년 교과서에서는 수학적 패턴을 여러 가지 면에서 다룰 수 있는 기회를 보여주지 못하고 있다.

덕, 1994, p25-26)

4. 현행 (1996년) 초등학교 수학은 1-4학년은 제 6차 교육과정에 따르는 수학책과 수학 익힘책을 사용하고 있으며 5-6학년은 제 5차 교육과정에 따르는 수학책과 수학 익힘책을 사용하고 있다. 본 연구에서는 4학년을 대상으로 활동 프로그램을 소개하고자 하므로, 현행 4학년에서 사용하고 있는 제 6차 교육과정에 따른 교과서를 조사 분석 및 논의한다.

<표 Ⅰ> 초등학교 4학년 수학책 및 익힘책에 나타난 수학적 패턴의 빈도수

단원명 \ 수학적 패턴의 유형		(1)-①		(1)-②		(1)-③		(2)-①		(2)-②		(2)-③		(2)-④		(2)-⑤	
		수학책	익힘책	수학책	익힘책	수학책	익힘책	수학책	익힘책	수학책	익힘책	수학책	익힘책	수학책	익힘책	수학책	익힘책
4학년 1학기	1. 큰 수	4	3														
	2. 덧셈과 뺄셈																
	3. 시간과 각도	1															
	4. 곱셈	1	1														
	5. 여러 가지 문제(1)	1	2	1													
	6. 나눗셈		1														
	7. 수직과 수평				1				1								
	8. 분수	2	3														
	9. 여러 가지 문제(2)		1	1	1			1			1						
4학년 2학기	1. 자연수의 혼합 계산																
	2. 나눗셈																
	3. 평면도형																
	4. 분수의 덧셈과 뺄셈																
	5. 여러 가지 문제(1)	1	2	1	2				1								
	6. 소수의 덧셈과 뺄셈	1	3														
	7. 평면도형의 둘레와 넓이																
	8. 표와 꺾은선 그래프																
	9. 여러 가지 문제(2)	1															
계		12	16	3	4	0	0	1	2	0	1	0	0	0	0	0	0

Ⅳ. 수학적 패턴 지도의 실제

어떤 수학적 패턴을 어떠한 방법으로 다룰 것인가의 논의로서 수학적 패턴 활동을 위한 교수 전략 및 몇 가지의 활동 프로그램을 소개하기로 한다.

1. 수학적 패턴 활동을 위한 교수 전략

수학적 패턴 활동을 위한 교수 전략은 패턴을 수학적으로 경험하는 기회를 제공하고자 하는 교수 방법을 모색하는 것으로, 여러 가지 전략이 동시에 사용될 수 있다. 다음의 전략들의 순서는 교수・학습의 순서를 정하는 것이 아니며, 전략의 강조점에 따라 분류하였을 뿐이다. 여러 가지 전략들이 각 활동의 목적에 따라 나름의 방식으로 교수・학습에 도입될 수 있을 것이다.

(1) 패턴에서의 규칙 찾기

① 기본 단위 찾기

<예> 다음 달력에 표시된 수들 간에는 어떤 규칙이 있습니까?

일	월	화	수	목	금	토
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

② 주어진 대상의 규칙을 다른 대상으로 나타내어 보기

<예1> 다음에 놓여진 나뭇잎에서 규칙을 찾아 바둑돌을 써서 같은 규칙으로 놓아보세요.

♠ ♣ ♣ ♠ ♣ ♣ ♠ ♣ ♣ ♠

<예2> 다음 박수 소리를 듣고 같은 규칙으로 공기돌을 써서 나타낼 수 있을까요?

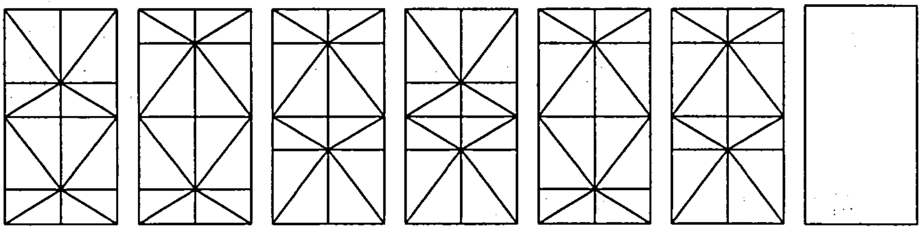
(짝) 쉬고 (짝) (짝) 쉬고 (짝) (짝) (짝)

<예3> 다음의 신호등 불빛을 보고 변하는 규칙을 찾아 색종이를 써서 나타내어 보세요.

☼ ◘ ◘ ☼ ◘ ◘ ☼ ◘ ◘ ☼ ◘ ◘ ☼ ◘ ◘ ☼

③ 다음에 올 것 찾기

<예> 아래 그림은 차례로 변해 갑니다. 다음에는 어떤 그림이 오겠습니까?

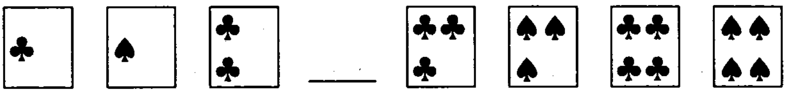


④ 빈 곳에 알맞은 것 찾기

<예1> 다음의 빈 칸에 알맞은 수는 무엇입니까?

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, __, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, ……

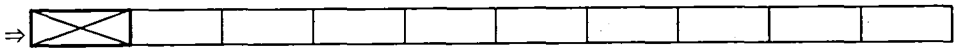
<예2> 카드가 놓인 규칙을 보고 빈곳에 알맞은 카드를 찾아 넣으세요.



(2) 패턴을 변형 · 확장하기

① 주어진 기본 단위를 여러 가지 차원으로 반복하기

<예> 다음 그림을 화살표 방향으로 반복하여 그림을 완성해 보세요.



② 주어진 기본 단위를 선대칭하여 패턴 만들기

<예> 여러 방향으로 접은 후에 한 쪽에 물감으로 그림을 그리고 다시 접힌 선을 따라 접어서 여러 가지 패턴을 만들어 보세요.

③ 주어진 기본 단위를 회전하여 패턴 만들기

<예> 찰흙으로 도장을 만들어 돌려가면서 도장찍기로 패턴을 만들어 보세요.

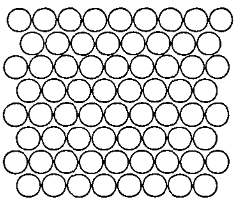
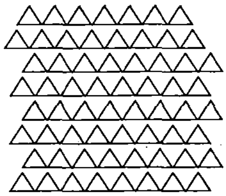
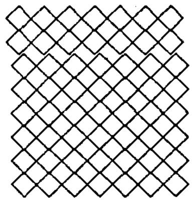
④ 주어진 기본 단위를 변형하여 패턴 만들기

<예> 그림을 축소하거나 확대해 가면서 패턴을 만들어 보세요.

(3) 자신의 새로운 패턴 만들기

① 패턴 용지를 활용하여 자신의 패턴 만들기

<예> 다음의 종이 중에서 하나를 택하여 반복 규칙이 있는 그림을 만들어 보세요.

② 구체물을 써서 자신의 패턴 만들기

<예1> 탱그램을 이용하여 자신의 패턴 만들어 보세요.

<예2> 친구들과 어울려서 몸의 움직임으로 패턴 만들어 보세요.

<예3> 벽지, 포장지 등의 그림을 오려 내어 패턴을 꾸며 보세요.

③ 컴퓨터를 이용하여 자신의 패턴 만들기

<예1> 컴퓨터의 로고 프로그램을 이용하여 여러 가지 다각형으로 패턴을 만들어 보세요.

(4) 패턴을 수학적으로 설명하기

① 패턴을 만드는 설명서 만들기

<예1> 주어진 그림을 보고 어떻게 패턴을 만들 수 있는지 설명서를 만들어서 주어진 그림을 보지 않은 친구에게 읽도록 해 보세요. 여러분이 만든 설명서를 읽고 그림을 보지 않은 친구가 어떤 그림인지 알 수 있게 자세히 설명해야 합니다.

② 패턴을 그림, 도표, 기호, 식 등으로 표현해 보기

<예1> 다음의 표에서 3으로 나눈 나머지가 같은 수끼리 같은 색으로 나타내어보세요.

<예2> 다음 수의 관계를 식으로 나타내어 보세요.

③ 패턴에 대한 보고서 쓰기

<예1> 다음을 보고 수들간에 어떤 관계가 있는지 보고서를 써 보세요.

<예2> 다음 작품에는 어떤 수학적인 패턴이 있는지 보고서를 써 보세요.

2. 수학적 패턴 활동의 예

초등학교 4학년을 대상으로 수학적 패턴의 유형별로 다음과 같은 활동들을 소개하기로 한다.

1.1 기본 모양 찾기	1.1.$\boxed{1}$ 무엇으로 이루어졌을까	1.1.$\boxed{2}$ 모양 꾸미기
1.2 숫자표의 비밀	1.2.$\boxed{1}$ 숫자표 색칠하기	1.2.$\boxed{2}$ 곱셈표
2.1 일곱 조각 도형	2.1.$\boxed{1}$ 도형과 리듬	2.1.$\boxed{2}$ 도형에 숫자 주기
2.2 도형과 수는 친구	2.2.$\boxed{1}$ 다음엔 어떤 그림이 될까	2.2.$\boxed{2}$ 도형과 둘레
3.1 색종이와 함께	3.1.$\boxed{1}$ 접기와 오리기	3.1.$\boxed{2}$ 무늬 꾸미기
3.2 삼각형 모양의 수	3.2.$\boxed{1}$ 삼각형 모양의 수 배열	3.2.$\boxed{2}$ 수 배열 만들기
4.1 여러 가지 모양 만들기	4.1.$\boxed{1}$ 도장 찍기	4.1.$\boxed{2}$ 타일 깔기
4.2 시계 속으로	4.2.$\boxed{1}$ 여러 가지 시계	4.2.$\boxed{2}$ 다음 수는 어디로 갈까
5.1 신기한 그림	5.1.$\boxed{1}$ 신기한 삼각형	5.1.$\boxed{2}$ 신기한 사각형
5.2 색칠하기	5.2.$\boxed{1}$ 색칠 규칙	5.2.$\boxed{2}$ 규칙따라 색칠하기

V. 결 론

수학을 '패턴의 과학'이라고 보는 새로운 정의로부터 수학이 폭 넓은 탐구 영역을 받아들임과 동시에 수학의 핵심을 찾으려는 노력을 읽을 수 있다. 이전의 우리 나라 수학교육 연구에서 수학적 패턴을 본격적으로 다룬 연구가 없다는 점에서, 본 연구는 수학적 패턴에 관한 연구의 시작이라고 할 수 있다.

본 연구는 초등학교 수학 교육에서 수학의 핵심인 패턴에 집중하고, 수학적 패턴에 대한 여러 가지 기본 경험을 통하여 수학적 아이디어를 개발하는 것에 중점을 둔 것이었다. 또한 수학 교실의 변화는 근본적으로 교사의 수학에 대한 이해 및 교수력에 달려 있다는 입장에서, 교사의 수업을 지원할 수 있는 수학적 패턴 활동을 구성하였다. 본 연구를 비롯한 수학적 패턴에 관한 후속 연구를 통하여, 수학 교과에 대

한 이해가 심화되고 수학 수업의 아이디어들이 계속 논의되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

김동광 · 과학세대(역) (1996). 자연의 수학적 본성. 주식회사두산동아. Stewart, Ian (저) (1995). *Nature's Numbers*. New York, NY : Brockman, Inc.

김순덕 (1994). 중등수학교육에서 프랙탈에 대한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

Devlin, K. J. (1994). *Mathematics, the science of patterns : the search for order in life. mind, and the universe*. New York, NY: Scientific American Library. 허민 · 오혜영(공역) (1996). 수학 : 양식의 과학. 서울:경문사.

Geer, C. P. (1992). Exploring Pattern, Relations, and functions. *Arithmetic Teacher*, May 1992, pp.19-21.

Howden, H. (1989). Implementing the standards : Patterns, relationships, and functions. *Arithmetic Teacher* 37, pp.18-24.

Mathematical Science Education Board , National Research council (1990). *Perspectives on school : Reshaping School Mathematics, A Philosophy and framework for Curriculum*. Washington D.C. : National Academy Press.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.. 구광조 · 오병승 · 류희찬 (공역) (1992). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향. 경문사.

_______ (1993a). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics, Addenda series, Grades K-6, Patterns*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

_______ (1993b). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics, Addenda series, Grades 5-8, Patterns and functions*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Steen, L. A. (1988). The Science of patterns. *Science* 240, April , pp.611-616.

_______ (1990). *On the shoulders of giants ; new approaches to numeracy*. Washington D.C. :The National Academy of Sciences.