

# 구성주의와 수학적 개념구성에 대한 교사의 역할

추 종 석 (경성대학교 대학원)

지식은 무엇이며, 어떻게 구성되어지며 어떤 형태를 통하여 학습자에게 전달 되어지는가?에 대한 연구는 철학과 인식론의 발달에 힘입어 많은 주의(ism)를 낳게 하였다. 논리주의, 경험주의, 직관주의, 구조주의, 행동주의, 구성주의, ... 등 이러한 교육이론들은 그 시대의 요구에 부응하여 나타나고 발전되어 그 시대 뿐만 아니라 현재까지도 교육현장에 영향을 마치고 있다. 교육의 이론과 사상, 철학이 바뀌더라도 교사나 학생의 입장에서 여전히 문제점으로 제시되는 것이 있다. 교사의 입장에서, “학생을 어떻게 가르쳐야 하는가?” 하는것과, 학생의 입장에서 “무엇을 어떻게 배워야 하는가” 하는 것이 그것이다.

본 논문에서는 최근 많이 논의 되고 있는 구성주의 이론을 간략히(그리스의 초기 회의론자에서 데카르트(Descartes), 칸트(Kant)에 이르기까지 인식론의 발달과정과 피아제(Piaget)의 인식론과 구조론에 대한 구체적 언급은 생략하고)소개하고 구성주의자들이 주장하는 교수방법과 그에 따르는 교사의 역할에 대해 알아 보고자 한다.

## I. 구성주의의 개요

구성주의는 한마디로 지식에 대한 이론이다. 지식에 대한 구성주의자들의 견해에 따라 경험적(Empirical), 상황적(Contextual), 피아제(Piagetian), 통속적(Trivial), 급진적(Radical), 사회적(Social), 방법론적(Methodological) ... 등 다양한 수식어가 붙는다. 이것은 구성주의가 그만큼 개념이 다양하고 견해가 다르다는 것을 의미한다.

이들 다양한 구성주의 견해를 Noddings(1990. p10)는 다음의 4가지로 공통점을 밝히고 있다. 1)박영배 1996 박사학위 논문, p 16

1) 모든 지식은 구성되어지며, 수학적 지식은 적어도 부분적으로 반영적 추상화의 과정을 통해서 구성된다.

2) 지식의 구성과정에서 활동에 의해 만들어진 인지적 구조가 존재한다. 그리고 이들 구조가 지식의 구성을 설명한다. 즉 컴퓨터 프로그램이 컴퓨터의 출력결과를 설명하듯이, 인지적 구조는 다소 덜 다듬어진 방법으로 설명하지만 인지적 활동의 결과를

설명한다.

3) 인지적 구조들은 연속적인 발달아래 있으며, 목적에 부합하는 행동성은 기존구조들의 변환을 야기한다. 또 주변 환경은 유기체가 적응하도록 압력을 가한다.

4) 인지적 입장에서 구성주의를 인정한다는 것은 방법론적 구성주의의 채택을 의미하는 것이다.

1)에서 사용된 반영적 추상화(reflective abstraction)란 용어는 피아제의 인지적 발달 심리학(Cognitive-development psychology)에서 사용된 용어로서 Von Glasersfeld는 반영적 추상화의 과정을 경험적 추상화의 단계, 표상의 단계, 반성의 단계, 세단계로 제시하고 일련의 과정에서 일어나는 마지막 추상화를 반영적 추상화라고 파악하고 있다.2) 박영배 1996, p. 46

피아제는 지적기능을 적응과 조직의 과정으로 정의했다. 적응은 유기체 자신의 환경과의 상호작용 내에서의 균형으로 보고 조직은 구조에 관련된 개념으로서 스킴(scheme)이라고 부른 통합 재조직, 상존적 조직을 포함한 의미이다.

이는 지적 행위의 본질적으로 반복 될 수 있는 심리적 단일성(통일성)으로 정의 된다.(piaget 1947) 이 구조는 잘 해명 된다면 프로그램 혹은 전략으로 부를 수 있고 자신의 환경과의 상호작용에 있어서 개체에게 준비되어 있는 것이다.

적용에는 동화와 조절(accomodation)의 과정이 포함된다. 동화는 현재의 행동 규격에 대한 환경의 관련성이다. 조절은 환경이 개체에게 부여하는 요구에 적응하는 전제로서의 지적 구성의 변화이다.3) 박덕규 피아제의 발생학적 인식론과 구조론 민성사 1992, p.501전계)

구성주의에서 지식의 구성을 주체에 의한 자주적 구성이라 규정하며 동화와 조절, 스킴(scheme) 반영적 추상화(reflective abstraction), -경험적 추상화, 표상, 반성이라는 용어를 사용하여 구성주의의 심리학적 기초를 마련하고 스킴(scheme)의 구성을 통해 수학의 교수·학습 방법을 제시하고 있다.

수학적 지식의 구성에서 반영적 추상화는 중요한 역할을 한다. 구성주의의 관점에서 개념이란 원래 사물에 붙어 있는 것이 아니라 반영적 추상에 의해 개별적으로 구성되어진다. 반영적 추상은 근접하여 바라보는 것이 아니라 언제든지 지각할 수 있는 성분·물질로 양립되어지는 방법의 정신작용이다. 그러나 그것은 개념화하고자 하는 증거 표시가 아니라 반영되고 추상화 되어지는 기회를 제공하는 것이다.4) Von Glasersfeld (1995)

## II. 급진적 구성주의

구성주의의 여러 견해들 중에서 수학교육과 많은 관련이 있는 급진적(Radical) 구성주의에 대하여 Von Glasersfeld가 제시하는 구성주의의 기초원리를 살펴보면<sup>5)</sup> 1990, p.22, 23

1) 지식은 감각을 통하거나 의사교환의 방법에 의하여 피동적으로 받아 들여지는 것이 아니다. 지식은 능동적으로 인식하는 주체에 의하여 구성되어 지는 것이다.

2) 인식기능은 적응적이고 생물학적 용어로 표현하자면 적합성 또는 성장성을 지향하는 경향이 있다.

3) 인식은 주체가 경험적 세계를 조직하는데 공헌하는 것이며, 결코 객관적 존재론적 실체의 발견을 돕는 것은 아니다.

Kilpatrick(1987)과 Wheatley(1991)은 위의 1) 2) 3)을 요약하여 (1) 지식의 자주적 구성 (2) 지식의 성장지향성 (3) 지식의 사회적 구성 라고 하였다.

구성주의자들의 초기 영향이 피아제의 인식론에서라기 보다 피아제의 인지적 발달 심리학(Cognitive-development psychology)에서 주로 유래되었다.(Steffe 1995)는 사실을 염두에 두고 급진적 구성주의의 교수학습에 대한 견해를 알아 본다.

교수의 현장에서 개념과 개념적 관계는 한 사람의 마음에서 다른 사람의 마음으로 전달 될 수 없는 정신적 구조이다. 개념은 학생 개개인이 개별적으로 구성되어져야 한다. 이 말은 구성주의 기초원리 ① 지식의 자주적 구성 원리를 교수학습에 적용한 것이다.

“어떠한 사고 어떠한 아이디어도 전달될 수 없다. 아이디어가 전달될 때 전달 받은 사람의 입장에서는 아이디어가 아니라 새로운 사실일뿐이다”라는 듀이(Dewey 1994)의 말은 교수학습에 관한 급진적 구성주의의 주장과 그 맥을 같이 한다.

구성주의의 심리학적 기초의 이론적 바탕이 되는 피아제의 발생적 인식론으로부터 도출된 학습원리를 Gallagher 는 다음 여섯가지로 정리하고 있다.

1) 학습은 내면적 구성의 과정이다. 즉 아동들 스스로의 활동이 환경으로 부터의 자극에 대한 반응을 결정한다.

2) 학습은 발달에 종속된다. 즉 능력이 학습을 위한 선결 요건이다.

3) 학습은 대상을 관찰함으로써 뿐만 아니라 활동을 통해 통합한 것을 더 높은 수준에서 재조직 함으로써 이루어진다.

4) 지식의 발달은 의문 모순 그리고 그에 따른 정신적 재조직의 과정에 의해 촉진된다.

5) 의문 모순 사고의 재조직은 사회적 상호작용에 의해 촉진된다.

6) 의식화란 갑작스러운 통찰이기 보다는 오히려 재구성의 과정이기 때문에, 이해는 활동을 한 다음에 구성된다.

구성주의의 지식에 대한 이론의 심리학적 기초와 피아제의 심리학과 관련성을 볼 때 피아제의 인식론에 근거한 학습의 지도원리를 생각해 볼 필요가 있다. 류희찬((1991)은 피아제의 발생적 인식론에 근거한 지도원리를 다음 여덟가지로 요약한다.

1) 개념학습이나 문제해결 중심학습을 비롯한 모든 종류의 수업 내용은 동화되기 쉽게 조직되어야 한다.

2) 인지구조의 동화와 조절이 잘 일어나도록 하는 적절한 갈등이 필요하다.

3) 모든 수업은 활동이 전제 되어야 한다.

4) 모든 수업에는 의식화 과정이 포함되어야 한다.

5) 동료간의 또는 교사와의 상호 활동이 권장되어야 한다.

6) 오류에 대한 관대한 교육환경이 만들어져야 한다.

7) 자율성이 강조되는 수업활동이 권장되어야 한다.

8) 구체적인 내용에서 추상적인 내용으로 나아가야 한다.6) 류희찬 1994 대한수학교육학의 춘계수학교육학 연구 발표대회 논문집 p.324, 325 전제)

구성주의를 선택하는 수학교육자를 위해 그들의 연구활동에 지침이 될 만한 10개의 중요한 목표를 steffe(1991, p.191)는 다음과 같이 제시하고 있다.

1) 학생들과 수학적으로 의사소통하는 방법을 배우기

2) 목표지향적 수학적활동에 학생을 참여시키는 방법을 배우기

3) 그들이 가르치는 학생의 수학을 배우기

4) 가능한 수학적 환경을 조직하는 방법을 배우기

5) 다양한 경험의장 -학생들의 수학적 경험- 의 내용을 배우기

6) 그들이 가르치는 학생들을 위한 수학을 배우기

7) 목표지향적인 수학적활동의 내용에 있어서 반성과 추상성을 기르는 방법을 배우기

8) 학생들 사이에 수학적으로 대화하도록 학생을 격려하는 법을 배우기

9) 오랜시간동안 학습을 지속시키는 방법과 학생들의 동기를 촉진시키는 방법을 배우기

10) 다른 수학교육자들과 수학적으로 뿐만아니라 교육적으로 의사소통하는 방법을 배우기

### III. 학생의 개념구성에 대한 교사의 역할

지금까지 구성주의의 기초원리, 학습원리, 지도원리에 대해 간략하게 알아 보았다. 끝으로 급진적 구성주의 관점에서 Ernst Von Glasersfeld(1995)의 “A way of Knowing and learning”에 나타난 학생의 개념구성을 돕기위한 교사의 역할에 대해 생각해 보기로 한다.

현장에서 이루어지고 있는 학습 방식을 이해한다면 교육의 현장에서 이루어지고 있는 학습 형태에 대한 개념은 개선되어야 한다. 급진적 구성주의에서는 교수와 훈련은 교수의 내용면에서 방법도 다르고 결과도 차이가 있다고 본다. 이러한 입장은 Kant(1803, Werke Von IX p.450)의 문장에 잘 나타나 있다.

“인간은 단지 훈련 시킬수 있고 길들일 수 있고 수학적으로 교육시킬 수 있거나 진실로 개화 시킬수 있다. 인간은 개나 말을 훈련하고 뿐만아니라 인간을 훈련시킬 수 있다. 그러나 훈련은 하는게 없다. 무엇보다 문제가 되는 것은 아이들이 생각하는 것을 배우는 것이다. 목표가 원칙이 되어야 한다. 이것으로부터 모든 행동이 나온다.”

“A way of knowing and learning”에서 알 수 있듯이 구성주의자들은 지식(Knowledge)이라는 단어보다 앎(Knowing)이란 단어를 더 즐겨 쓰는 것 같다. 이것은 “지식을 구성하는 과정”이라는 의미도 함께 중요시하는 것으로 이해된다.

학생의 개념구성을 돕기위한 수업을 하기위해 교사는 어떤 태도로 수업을 해야 하는가에 대한 급진적 구성주의 견해를 다음의 10가지로 요약한다.

1) Kant가 말한 개화(enlightment)를 시키기위해서는 원리를 이해시키는 수업을 해야한다.

2) 특별한 외적 재강화에 기초를 두고 있는 훈련이나 암기연습은 쓸모가 없다.

3) 우수한 학생에게 특별한 승인(표창)을 주는 것은 일시적인 성공적 노력을 하는 동기유발을 하는데는 효과가 있으나 더 공부가 하고자 하는 욕망이나 새로운 종류의 문제를 스스로 해결하고자 하는 동기유발을 시키는데는 미흡하다.

4) 새로운 문제를 해결하려는 동기유발은 과거 문제 해결에서 맞본 기쁨에서 나온다.

5) 이 문제는 해결 할 수 있다는 흥분은 다른 문제들 풀이에 응용할 수 있고 칭찬의 결과에서 보는 것과는 다르다.

6) 결과가 옳다는 이유를 통찰하는 것은 그것이 생성되어진 이유를 논리적으로 이해하는 것이다. 이것은 학생들에게 할 수 있다는 느낌을 준다. 나아가 어떤 외적 재강화보다 훨씬 큰 영향을 발휘한다.

7) 스스로 생성된 능력은 새로운 내용경험의 영역을 넓히려는 욕망을 불러 일으킨다.

8) 만약 학생이 문제를 통하여 그들 자신의 방식대로 생각하지 않는다면 그리고 그 문제를 풀 수 있다는 확신을 가진다면 그들에게는 더 이상 모험을 시도하려는 동기유발을 기대할 수 없다.

9) 교사는 학생들이 그들의 방식대로 스스로 생각할 수 있다는 것을 염두에 두어야 한다.

10) 학생은 아이디어를 미리 형성하는 것이 아니라 아이디어를 구성할 수 있는 능력을 갖고 있다는 것이다.

교실수업에서 교사와 학생을 연결시키는 수단은 대화이다. 일상생활의 의사소통을 하기위해 인간은 언어를 사용한다. 마찬가지로 교실수업에서도 언어를 사용한다. 학생이 배운 것을 이해하지 못하는 경우 언어의 효과에 대해 생각해 볼 필요가 있다. 교사의 말이나 문구의 의미가 학생들 개인의 경험적 용어로 이해 되어진다면 교사가 전달하려는 의미와 다르게 될 수 있다. 이것은 앞에서 지적한 듀이(Dewey 1974)의 말에서 쉽게 알수 있다.

교사의 말을 학생들은 그들 자신의 경험적 단어에 연계시켜 생각하고, 모든 학생들이 같은 방식으로 생각하지 않는다.

언어는 지식을 전달하지 않는다. 다만 듣는이의 개념적 구성을 강요하고 방향을 제시할 뿐이다. 이 말은 급진적 구성주의에서는 언어가 지닌 의미의 객관성을 인정하지 않는다는 뜻이다. 교사는 학생에게 수학적 지식의 개념을 어떻게 구성하는가를 언어로 말해 줄 수 없다. 다만 학생들에게 쓸데없는 방향으로 개념구성하려는 것을 막을 수 있다. 언어를 통해 학생의 인지방향을 잡을 수 있고 원하는 방향으로 반영과 추상을 유도할 수 있다.

교사는 학생 개개인이 개별적으로 개념구성하는 것에 대해 구성과정의 방향을 지어주어야 할 의무가 있다. 교사가 학생 개개인이 사용하는 개념구성의 아이디어를 알고

있다면 특별한 개념구성의 영역에 대한 방향을 짓고 학생의 생각을 일부 수정할 수도 있다.

이것은 현실적으로 매우 어려운 일이다. 왜냐하면 교사가 학생들의 머리속으로 들어갈 수 없기 때문이다.

학생에 관한 경험을 많이 가질수록 특정한 학생의 사고가 어떤 것인지에 관한 교육적 추측을 할 더 좋은 기회를 갖게되고 소위 Vygotsky가 말하는 근접 발달영역(The zone of proximal development)을 가설화하는 더 좋은 기회를 갖게 될 것이다.

Kuhn(1962)이 말하듯이 변칙적인 것처럼 보이는 것에도 불구하고 보통의 과학은 상당기간동안 주어진 테두리 안에서 계속된다. 이 변칙처럼 보는 것이 그 영역을 의문상태로 남겨둔다. 교사가 학생들의 일상생활에서 유용하다고 느끼는 “잘못된 개념”을 포기하도록 유도하는 것은 생각이 얕은 것이다. 학생들이 문제풀이를 실수하는 것처럼 학생의 잘못된 개념은 문제 해결의 단서안에 있다.

이것으로부터 교사는 학생의 실질적 개념 조직의 단면을 추론할 수 있다.

반영의 과정에서 학생들이 만드는 개념적 변화는 학생 자신의 흥미에 의해 조사를 하거나 개념적 상황을 판단하는 것이 교사가 강제로 주입하는 것보다 훨씬 강하다. 어떤 수학적 개념을 구성하는데 있어서 교사는 너무 빨리 결론을 먼저 말하지 말고 학생이 스스로 찾을 수 있게 도와주고 기회를 제공하여야 한다. 또한 반영적 이야기(reflective talk)를 할 수 있도록 적절한 발문(asking question)을 사용하여야 한다. Gorden pask(e.g, 1961. p.89)가 말하듯이 교수는 대화 형식이어야 한다.

여기서 개념적 구성의 타입을 살펴보면

1) 식별(구별) - 여기서 새로운 개념은 존재로부터 나온다.

일반적 개념 - 속도, 가속도는 운동의 일반적개념으로부터 나온다.

2) 종류(부류)확장 - 여기서 존재하는 개념이 다르다고 생각되어지는 것으로 일종의 그럴것이라는 개념의 경우로 보여지는 것이다.

3) 재구성 - 여기서 속성의 중요한 변화와 개념이 발생하는 것 사이의 관계는 예를 들면 변화는 힘→운동으로부터 힘→가속도 등이다.

이러한 것들은 교사에게 학생들의 Z, P, D에 관하여 더 나은 교육적 추측을 만드는 기회를 줄 것이다. 개념의 재구성은 분명히 반영을 포함한다. 개념적 변화에 대한 이론적 모델을 만들기 위해서는 학생이 행하고 말하는 것에 대한 패턴을 볼 수 있도록 하여야 한다.

우리가 보는 것은 다른 사람이 행하는 것이고 우리가 듣는 것은 그들이 말하는 것이다. 우리는 우리가 우리에게 행하고 말하는 것에 영향을 미친다. 중요한 것은 우리의 생각을 반영하는 것이다. 사회적으로 구성주의가 지향하는 것은 의미와 지식의 질층이다.

지금까지 Ernst Von Glarersfeld(1995)의 학생의 개념구성에 대한 교사의 역할(대도 수업방법)을 살펴보았다.

이것을 5가지로 요약하면 다음과 같다.

- 1) 대화의 형식을 통해 학생의 개념구성방향을 유도하여야 한다.
- 2) 훈련보다 수업을 하라.
- 3) 학생의 생각을 추론하라.
- 4) 수업보다 도움을 주라.
- 5) 반영적 추상화를 촉진하라.

#### IV. 수업의 실제

수학적 개념을 이해하는데는 학생마다 개인차가 있음은 이미 알려진 일이지만 교육의 현장에서 느끼는 차이는 천차만별이다. 예습을 통해 많은 것을 익히고 있는 학생이 있는가 하면 본시 학습에 필요한 선수학습의 내용조차도 기억하지 못하는 학생이 있다. 훌륭한 수학적 감각을 지닌 학생조차도 어떤 경우에는 특별한 용어의 언어적 표현이나 수학적 기호논리를 이해하지 못하는 경우가 있다. 이 경우 교사는 학생의 흥미를 유발시키고 학생과의 대화를 위한 적절한 발문(asking question)을 사용해야 한다.

예제라든가 간단한 문제를 통하여 어떤 정의나 정리를 가르칠 때 우리의 목적은 예제나 문제에서 요구하는 답이 아니라 개념이라는 것을 학생들이 알수 있도록 지도하여야 한다. 고등학교, 미분법 단원에서 변화율의 개념에서 도함수를 유도하는 과정을 가상적 수업의 형태를 통해 살펴보자. 교사는 교과서 순서(page)에 따라 먼저 접선의 기울기를 가르친다. 그리고 기울기에서 평균 변화율의 개념과 표현방법을 수학적 기호를 사용하여 나타내 보인다. 그리고 몇가지 유사한 문제(단순적용형식)을 언급하고 도함수 정의를 내보이는 경우도 있고, 접선의 기울기와 순간속도에 관한 예제를 통해 평균 변화율의 개념을 가르친후 도함수의 정의를 가르치는 경우도 있다.

수학적 감각이 훌륭한 학생들은 접선 기울기와 순간속도가 같은 내용이라는 것을



어렵지 않게 파악하지만 많은 학생들은 교사가 같은 내용이라는 것을 말할 때 까지 모르는 경우가 많다. 학생들에게 이런 질문을 한다. 접선의 기울기와 순간속도, “이 두 가지 주제의 공통점은 무엇인가?” 이런 형식의 발문은 학생들에게 교사가 요구하는 답을 기대하기 어렵다(질문의 요지가 구체적이지 못하다). 교사는 다시 질문을 한다. “접선 기울기와 순간속도의 결과의 표현이 같은 형식(구조)인가 아닌가를 보시오”하고 지시적 질문을 한다. 이 경우 학생들은 “같습니다.”라는 대답이 쉽게 나온다. 문자와 기호로 표현된 식을 보는 것은 쉬운 일이다. 이것 보다는 개념을 이해 할 수 있는 방법 즉 반영적 추상화(reflective abstraction)의 기회를 제공하여야 한다. 앞에서 구성주의의 견해로 지식은 전달되지 않는다고 하였다. 평균변화율의 개념을 전달하는 것이 아니라 학생 스스로가 그 개념을 구성하도록 도와주어야 한다. 접선의 기울기라든가 순간 속도라는 특수한 상황에 의존하지 않는 함수적 표현으로서의 도함수(derivative)를 이해시켜야 한다는 것은 쉬운일은 아니다. 이를 극복하기 위해 교사는 변화율에 관한 유사한 예제를 학생에게 연습시킨다.

철사의 밀도(물리학), 용해율(화학), 생물의 성장속도(생물학), 한계이익(경제학), ... 등 이와 같은 다교과에 관련된 변화율에 대한 문제들은 표현방법만 다를 뿐이지 같은 주제라는 것을 이해 시켜야 한다.

구성주의 입장에서는 위와 같은 많은 문제를 연습(훈련)시킨다고 해서 개념이 이해되는 것은 아니라고 한다. 이것은 지식의 구조(知識의 構造)를 가르쳐야 한다는 브루너(Bruner)의 제안을 상기해 볼만하다.

“지식의 구조는 교과서의 성격을 새롭게 규정해야 한다는 제안이다. 지식을 안에서 파악하는가 밖에서 파악하는가 하는 것은 지식을 가르치는 방식과 무관하기는커녕 교과로서의 지식의 내용이 어떤 것이며 또 그것을 어떤 방식으로 가르쳐야 하는가에 근본적으로 중요한 영향을 미친다.” 이말은 지식의 구조라는 말이 나오기 이전의 모든 교사들이 지식의 구조를 가르치지 않았다. 뜻은 아니다(Bruner 1961, 지식의 구조, 이홍우 교육과학사 1988, p.22)

한가지 주제에 따르는 다양한 표현들 속에서 교사는 학생들에게 정확한 개념을 전달한다고 하지만 그것을 수용하고 개념을 구성하는 것은 학생자신의 몫이다. 학생 스스로 그 개념을 구성하고 자기 것으로 만드는 데는 학생 나름대로의 방식과 절차가 있다. 교사는 자신의 확일적인 방법으로 이것을 통제하거나 가르칠 수가 없다. 교사의 안내를 받아 학생 스스로 그 개념을 구성하도록 방향을 유도해 주어야 한다는 것이다.

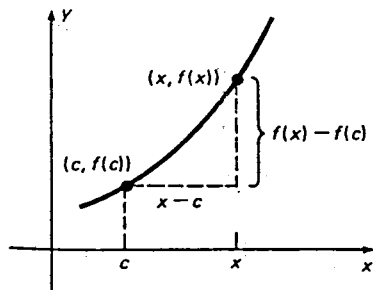
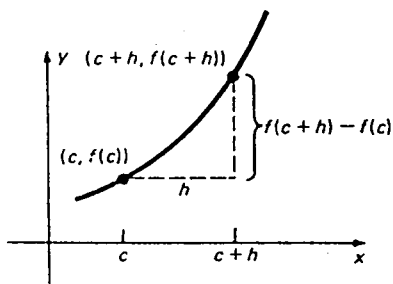
(정의) 함수  $f(x)$ 가 주어졌을 때 실수  $c$ 에 대해

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad (1)$$

가 존재 할 때  $f'(c)$ 를  $x=c$ 에서의 미분계수라하고 임의의 실수  $c$ 에서  $f'(c)$ 를 함수값으로 가지는 함수  $f'(x)$ 를  $f(x)$ 의 도함수라 한다.

(1)의 형식과 같은 극한값을 접선 기울기에서나 순간속도를 구할 때 학생들은 같은 형식으로 표현되었음을 기억할 것이다. 여기서 교사는 접선기울기에서 특정한 점이라는 것과 순간속도에서 특정시간이라는 개념을 없애고 같은 함수적 표현으로 다루려고 할 때 특정한 실수  $c$ 를 임의 실수  $x$ 로 바꾸는 일은 그다지 어려운 일이 아니다. 임의 실수  $x$ 라는 용어를 이해 못하는 학생(극히 일부)은 그들 학생의 언어습득 능력에 기인한다고 본다.

(1)의 도함수 정의식의 변형된 식  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  을 평균 변화율의 다른 표현방식으로 공부할 때 이것은



의 두 그래프에 의해 직관적으로 이해된다.

그러나  $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$  을  $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$  으로 식 자체의 변환을 스스로 유도할 수 있게 지도하는 것이 더욱 바람직한 일 이라고 생각한다.

“만약  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$  의 값이 없다는 것은 어떤 (수학적) 의미일까?” 이런 질문을 학생들에게 던졌을 때 어떤 대답이 나올까?

- 접선이 기울기가 없습니다.
- 극한값이 없습니다.
- 순간속도가 없습니다.

- 미분계수가 없습니다.

그러면 없다는 것은 무엇을 입니까?(어떤 상황입니까?)

- 극한값이 무한대 입니다.

- 극한값이 둘이상 존재합니다.

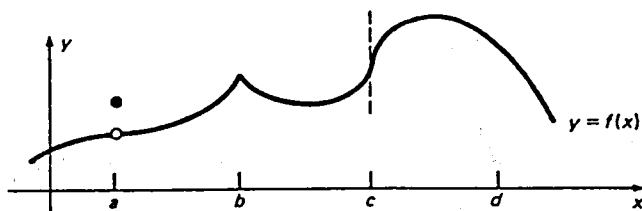
- 극한값이 무한대이라, (없다)는 것은 우리가 현실적으로 표현할 수 있는 경우는 어떤 것일까요... 만약 그래프를 그린다면.....

- 접선 기울기가 무한대입니다. 그래요 그것을 그래프로 표현한다면?.....

- 접선이 수직이 됩니다.

자 누가 칠판에 그래프가 수직이 되는 경우를 그려볼까요?

위의 대화형식은 학생의 흥미를 유도하고 스스로 개념구성을 할 수 있는 기회를 제공한다. 그리고 교사는 다음과 같은 그래프를 소개하고 그들에게 생각할 시간과 여유를 준다.



그리고 잠시후 다음과 같은 간단한 질문을 학생들에게 한다.

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  이 극한값은 어떤 함수의 어떤 상황을 설명하는 것인가

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$  이 극한값은 어떤 함수의 어떤 상황을 설명하는 것인가

- a, b, c, d 값에 대응하는 점에서 접선을 그어 보시오.

- 극한값이 없는 점은 어떤 점인가

- 연속인 점과 불연속인점은 어떤점인가

- 이분이 가능한 점과 불가능한 점은 어떤 점인가?

이러한 질문들은 앞에서 배운 극한값에 대한 개념을 구성하는데 유효하다고 생각한다.

수학이 교수의 대상이라면 수학적 지식은 전달 되어져야 한다. 다만 그 과정이 조절 되지 않은 채로 그대로 전달되어지는 것을 이미하지 않는다. 교사의 안내에 의해 학생

스스로가 지식을 자주적으로 구성한다는 것이다.

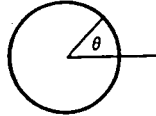
언어로 표현된 구체적 상황을 기호와 문자를 통하여 추상화 하는 것 다시말해 외적 표상과 내적 표상 사이의 관계를 지어주는 것은 수학적 모델링(mathematical modeling)에 의해 알수 있다.

원기둥모양의 그릇에서 물이 새는 양은 그릇의 깊이에 비례한다. ⇒



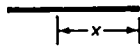
v를 t초후의 물의 양  
⇒  $\frac{dv}{dt} = -kh$

바퀴가 1분당 6회전 일 정한 속도로 회전한다. ⇒



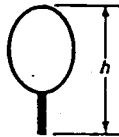
⇒  $\frac{d\theta}{dt} = 6(2\pi)$

철사의 비중(g/cm)은 왼쪽 끝에서부터 거리의 2 배이다. ⇒



m을 왼쪽 끝에서부터 xcm되는 점까지의 무게라 하자.  
⇒  $\frac{dm}{dt} = 2x$

나무의 성장속도는 점 점 작아진다. ⇒



⇒  $\frac{dh}{dt} > 0, \frac{d^2h}{dt^2} < 0$

위의 예시처럼 언어로 표현한 것을 그래프로 표현하고 이것을 다시 수학적 기호로 표현하는 것은 개념을 이끌어 내는 한 방법이다. 이런 방법을 사용할 수 있는 능력은 문제 해결에도 중요한 역할을 한다.

여기서 사고 도구로서 기호와 문자의 역할을 알아보자 수학적 모델링에 알맞은 표현방법이란 학습자 스스로의 사고의 결과로서 수학적 구조에 맞도록 새롭게 창조하는 것이다.

이러한 표현은 경험을 이해 할 수 있도록 하는 것이며 가르칠 수 있다는 것이다. 그러나 이러한 상징적 표현은 보통의 경험으로 보충하거나 확장할 수 있는 범위는 강력하게 제한적임을 알고 있다.(박덕규, 피아제의 발생학적 인식론과 구조론 p.322) Gellner가 “언어가 모든 목적을 찾는 도구이다”라고 말했듯이 수학적 기호는 수학적 개념을 이끌어 내는 도구이다.

## V. 결론 및 제언

학생의 수학적 개념구성을 돕기위해 교사는 수업의 순간순간마다 유효 적절한 질문,

발문을 준비해야 한다. 학생이 어떤 방향으로 생각하는지, 어떤 학생이 어떤 수준에까지 와 있는지를 알아야 한다. 학생의 사고를 교사가 알고 그에 맞는 수준의 질문과 발문을 항상 생각하여야 한다. 사실상 구성주의 (다른 어떤 주의(ism)도 마찬가지이지만) 우리 교사에게 특별히 수업에 대한 구체적 방안을 제시하는 것은 없다. 수업을 하는 것은 우리교사이고 수업 진행상의 모든 것(구체적 방법, 내용 등)을 준비하고 새로운 방법을 창조해 내는 것은 우리 교사의 몫이다. 학생의 수학적 개념구성에 있어 현재의 상황(학생에 관한 모든 것)을 일일이 파악하는 것은 학생과의 생활에 많은 시간을 요한다. 구성주의가 우리교사에게 시사해주는 것은 학생중심의 수업을 하라는 것이다. 가르치는 기술은 지식의 상호 전달에는 하는게 없다. 그것의 근본 목적은 학습의 기술을 육성해야 하는 것이다.

이보다 앞서 마련해야 하는 것은 수학에 대한 학생의 애정과 공부를 해야하겠다는 강한 의지를 심어주어야 한다. 학생의 자발적인 수학과목에 대한 관심은 어떤 방법적 지도의 기술보다 강한 반영적 추상을 가져올 수 있다고 생각한다. 부연하면 수학과 수업에 대한 정서적면이 고려되어야 한다고 생각한다.

구성주의는 이 모든 것을 교사의 몫으로 돌리고 있다. 교사는 자신의 상상력을 최대한으로 활용하여 자신의 수업방법을 개발하여야 한다고 말하고 있다.

## 참 고 문 헌

- 1) 피아제의 발생학적 인식론과 구조론(박덕규 민성사 1992)
- 2) Radical Constructivism : A way of Knowing and Learning(Ernst Von Glasersfeld 1995 The Falmer press)
- 3) 知識의 構造(Bruner, 이홍우 1994. 교육과학사.
- 4) 교육철학(George R.Knight 김병길 1993, 교육과학사)
- 5) Constructivism and mathematical education  
(L, MORENO-ARELLA and G WALDEGG, int J. Math EDUC, SCL, TECHNOL 1993. Vol.24, No5 653-661)
- 6) Radical Constructivism and Mathematics Education  
(LESLIE, STEFFE, THOMAS KIEREN, J.R.M.E 1994 Vol.25 No6, 711-733)
- 7) Toward A Working Model of Constructivist Teaching : A Reaction to Simon

(LESLIE.P.STEFFE BEATRIZS. D' AMBROSIO, J.R.M.E 1995. Vol.26 No.2  
146-159

8) Mathematics, Education and Philosophy : An International Perspective Paul  
Ernest 1994.

9) 수학교육학 연구 발표대회 논문집 1994 추계 대한수학교육학회

10) 수학교육연구 주제 1, 2 1995, 대한수학교육학회

11) 수학교육학연구발표대회 논문집 1994 춘계, 대한수학교육학회

12) 미분적분학(Edwin J.Purcell, Dale Varberg 김부윤 외 9명 공역 普成閣 1993

13) 진보적 구성주의의 교수학적 의미 (김연식, 박영배 1994)

14) 박영배 박사학위논문 서울대학교 1996