무리수(無理數) e의 교수 례(教授 例)

이 병 수 · 양 규 한 (경성대학교 수학과)
이 기 섭 (부산 사직고)

I. 서론

현행 대부분의 고등학교 교과서에서는 $e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$로 정의를 내린 후, 이것을 이용하여 다음 단계의 수업을 진행한다. 따라서, 학생들은 무리수 e의 진정한 수학적 의미(mathematical meaning)를 모른채, 단지 타인(교사)의 뜻에 따라 주입된 상태에서 e 와 지수함수 $y=e^x$에 관련된 고급적인 내용을 학습한다.

본 논문에서는, 무리수 e와 지수함수 $y=e^x$가 고등학교 교과과정의 전반을 통해서 가장 중요한 내용이며 또한 이용도가 크므로, 심도있게 다루어야 한다는 입장에서 그것의 지도를 가급적 구성적 (構成的) 입장에서 학생과 교사간의 대화 형식으로 다루었다.

II. e의 지도

$\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ 은 증가하는 실수열(increasing sequence of real numbers)로서 그것의 수렴성은 고교과정에서 널리 알려져 있는 내용이 아니다. 무리수 e와 지수함수 $y=e^x$ 의 많은 이용과 응용에도 불구하고, 실제로 고교과정에서는 아래 표와 같이 n 의 값에 따라 $f(n)=(1+\frac{1}{n})^n$ 의 값을 몇 개 예시하고

n	1	2	3	4	5	······
$(1+\frac{1}{n})^n$	2	2.2500	2.3704	2.4414	2.4883	······

··· (1-1)

$(1+\frac{1}{1})^1 < (1+\frac{1}{2})^2 < (1+\frac{1}{3})^3 < (1+\frac{1}{4})^4 \cdots$ 으로 나타내어 수열 $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ 이 증가하는 것을 암시한 후, $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$를 무리수 $e=2.71828\cdots$ 로 나타낸다고 설명하고 있다[1].

이어서, $x=\frac{1}{n}$라 두고 " $n\to\infty$" 와 " $x\to 0$"가 서로 동치라고 설명한 후, $e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$이 되며 그 결과 $e=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ 이다 라고 설명한다.

이와 같이, 그림 (1-1)을 소개한 후 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ 라고 거의 주입식으로 지도한 후, $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x \approx e$ 라고 증명없이 사용하는 것은 학생들의 수학적 능력(數學的能力, mathematical ability)을 배양시키는 것이 아니다. 그들에게 수학적 결과만을 전달하여 그들의 직관력에 호소하는 일면은 있을지 모르나 오히려 수학화 과정을 무시하여 그들의 수학적 능력을 감퇴시키는 수학 교수가 되었다. 수열 $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ 의 정의역 N 가 망(網) $\left\{(1+\frac{1}{x})^x\right\}$ 의 정의역 R 로 변한 것 자체가 수열(sequence)의 개념에서 망(net)의 개념으로 확장되었다. 이러한 사실은 내용의 엄청난 비약을 의미하며 따라서 학생들의 수학적 직관력을 최대한으로 필요로 한다. 실수의 집합은 비가산 집합으로 가산 집합인 자연수 집합을 포함하는 집합이므로 망의 극한 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ 를 수열의 극한 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 와 비교하여 설명하는 것이 아주 중요하다. 아무런 설명없이 단지 학습자들의 무조건적인 이해를 요구하는 이런 학습방법으로는 e의 수학적 가치를 전달할 수 없을 뿐만 아니라, 학습자들의 올바른 e의 사용을 기대할 수 없다. 차제에 고교 학습지도 과정에서 이러한 기존의 학습법의 취약점을 보완하여 학습자들의 직관력 향상과 함께 그들의 논리적 구성 능력을 발전시키는데 중점을 두어야 하리라 생각한다.

이 과(科)에서는 자연수의 집합 N 에서 $f(n)=(1+\frac{1}{n})^n$ 으로 정의된 실가함수 f 의 정의역 N 을 실수의 집합 R 로 확장시켜, R 에서 정의된 실가함수

$f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ 로 확장시킴과 동시에 $f(n)$ 의 그래프를 학생들에게 구성적(構成的) 입장에서 지도하여 $f(x)$ 의 그래프를 유추하게 한 후, 극한 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ 를 스스로 인지(認知)하도록 지도하는 방법을 제시하는 것을 목표로 한다.

다음은 교사가 학생들에게 e의 존재성(存在性)과 유일성(唯一性)을 지도하는 것을 대화 형식으로 다룬 내용이다.

교　사 : 학생들, 제군들이 알고 있는 무리수에는 어떤 것들이 있나?
학생 하나 : 예, $\sqrt{e}$ 가 있습니다.
교　사 : 그러면 e는 어떤 수인가?
학생 하나 : 예, 2.71828… 입니다.
교　사 : 왜 e는 2.71828… 이냐?
학생들 : …….
교　사 : 그러면 e는 왜 무리수이며 또 어떻게 만들어졌나?
학생 하나 : $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ 입니다.

교　사 : 극한값 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ 를 e라고 한다면 $(1+\frac{1}{x})^x$ 에서 x 는 어떤수인가?
학생 하나 : 예, 여기서 x 는 실수입니다.
교　사 : $\lim_{x\to\infty}$ 는 무슨 의미인가?

학생 하나 : x 가 증가하여 무한히 커진다는 뜻입니다.
교　사 : x 가 불연속적으로 증가 하는가? 연속적으로 증가하는가?

학생 하나 : 연속적으로 증가합니다.

교 사 : x 가 연속적으로 증가하면 $(1+\frac{1}{x})^x$ 의 값도 연속적으로 증가하는가?

학생들 : ……

교 사 : 그러면, 먼저 이런 질문으로 바꾸자.

$(1+\frac{1}{1})^1$ 과 $(1+\frac{1}{2})^2$ 중 어느 것이 더 큰가?

학생 하나 : $(1+\frac{1}{1})^1<(1+\frac{1}{2})^2$ 입니다.

교 사 : 그러면, $(1+\frac{1}{2})^2$ 과 $(1+\frac{1}{3})^3$ 중 어느 것이 더 큰가?

학생 하나 : 그것은 너무나 쉽습니다.

당연히 $(1+\frac{1}{2})^2<(1+\frac{1}{3})^3$ 이 성립합니다.

교 사 : 그러면, $(1+\frac{1}{3})^3$ 과 $(1+\frac{1}{4})^4$ 중 어느 것이 더 큰가?

학생 하나 : $(1+\frac{1}{3})^3<(1+\frac{1}{4})^4$ 이 성립합니다.

교 사 : 그렇다면, 일반적으로 $(1+\frac{1}{n})^n$ 과 $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$ 중 어느 것이 더 클 것으로 생각하는가?

학생 하나 : 앞의 몇가지 경험으로 미루어, 임의 자연수 n 에 대해 $(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$ 이 성립할 것 같습니다.

교 사 : 임의 자연수 n 에 대해 부등식 $(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$ 이

성립하는 것을 논리적으로   증명할 수 있겠는가?

학생 하나 : 예, 먼저 수학적 귀납법(mathematical induction)을 생각할 수 있으나, 그렇게 쉽지 않을 것 같습니다.

교   사 : 그러면, 이항정리를 이용하여 그 부등식을 증명할 수 있지 않겠는가? 임의 자연수 n 에 대해서 $e_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 라 두면, 이항정리(binomial theorem)에 의해

$$e_n=(1+\frac{1}{n})^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots2\cdot1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$ 이 되어

$$e_n=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$ 이 되며,

$$e_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})+$$

$$\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})$$ 이고

$e_1=(1+\frac{1}{1})^1=2$ 이므로, 일반적으로

$2=e_1<e_2<e_3<\cdots<e_n<e_{n+1}<\cdots$ 임을 알 수 있지 않은가?

학생 하나 : 그러면, 수열 $\{e_n\}$ 은 증가하는 수열이네요?

교   사 : 그렇지! 수열 $\{e_n\}$ 은 초항이 2인 증가하는 수열이지?

학　　생 : 그렇다면, 이 수열은 $n \to \infty$ 일 때 극한이 존재할까요? 즉, $\lim_{n\to\infty} e_n$ 은 존재합니까?

교　　사 : 글세, 만일 존재한다면 그 극한이 바로 이 수열의 상한(上限)이 될텐데.

학생 하나 : 그러면 상한을 어떻게 구하는 것이 좋겠습니까?

교　　사 : 우선, 임의 n 에 대해 $2^{n-1} \le n!$ 임을 증명해보자.

학생 하나 : 수학적 귀납법이 쉬울 것 같습니다.

첫째, $n=1$ 일 때 등식이 성립하며

둘째, $n=k$ 일 때 부등식 $2^{k-1} \le k!$ 를 가정할 때,

셋째, $2^k = 2^{k-1} \cdot k \le k! \times k \le k! \times (k+1) = (k+1)!$ 이므로,

임의의 자연수 n 에 대해 $2^{n-1} \le n!$ 가 성립합니다.

교　　사 : 그렇다면, 임의 n 에 대해 $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$ 이 성립하겠군?

학생 하나 : 예.

교　　사 : 그렇다면 임의 자연수 n 에 대해

$$e_n = 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$<2+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2+1=3$$ 이 된다.

즉, 임의 자연수 n 에 대해 $e_n \leq 3$ 이 됨을 알 수 있다.

따라서, 수열 $\{ e_n \}$ 의 극한은 3을 넘지 못한다는 것을 이해할 수 있겠는가?

학생 하나 : 예, 그렇게 어렵지는 않습니다.

교　사 : 그렇다면, $f(n) = (1 + \frac{1}{n})^n$으로 정의된 함수 f의 그래프를 생각해 보자. 먼저 이 그래프가 연속적인가? 불연속적인가?

학생 하나 : 예, 정의역 N 에서 우리가 취할 수 있는 원소들이 자연수 1, 2, 3, … 등이므로 이 그래프는 당연히 불연속적입니다.

교　사 : 그렇다면 $f(n) = (1 + \frac{1}{n})^n$ 에 관해 좀 더 자세히 조사해보자.

$n = 1$ 일 때	$f(1) = 2.0000\cdots$
$n = 2$ 일 때	$f(2) = 2.2500\cdots$
$n = 3$ 일 때	$f(3) = 2.3704\cdots$
$n = 4$ 일 때	$f(4) = 2.4414\cdots$
$n = 5$ 일 때	$f(5) = 2.4883\cdots$
$\vdots$	$\vdots$
$n = 10$ 일 때	$f(10) = 2.5937\cdots$.
$\vdots$	$\vdots$
$n = 100$ 일 때	$f(100) = 2.7048\cdots$.
$\vdots$	$\vdots$
$n = 1000$ 일 때	$f(1000) = 2.7169\cdots$.

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$n=10000$ 일 때 $f(10000)=2.71828\cdots$.

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

이므로 $f(n)$ 의 값은 n 이 아무리 커지더라도 3을 넘지 않을 것 같지 않은가?

왜냐하면,

$f(10)-f(5)=0.1054\cdots$

$f(100)-f(10)=0.1111\cdots$

$f(1000)-f(100)=0.0121\cdots$

$f(10000)-f(1000)=0.0012\cdots$ 로

$n=5$ 와 $n=10$ 의 차이가 5인데

$f(10)-f(5)=0.1054\cdots$이고

$n=10$ 과 $n=100$ 의 차이가 90인데

$f(100)-f(10)=0.1111\cdots$이고

또 $f(1000)-f(100)=0.0121\cdots$이며

$f(10000)-f(1000)=0.0012\cdots$이므로

n 의 값이 커질수록 " $f(n+1)-f(n)$ "의 값이 더욱 더 적어지지 않은가?

학생 하나 : 그렇습니다.

교 사 : 그러면

$a_n=f(n+1)-f(n)$, 단 n 은 자연수, 라고 하면 수열

$\{a_n\}$ 은 감소하는 수열임을 직감할 수 있겠는가?

학생 하나 : 예.

교 사 : 그렇다면, 수열 $\{a_n\}$ 에서

$a_1=0.2500\cdots$.

$a_2 = 0.1204\cdots$.

$a_3 = 0.0171\cdots$.

.
.
.

이므로 만일 $\{ a_n \}$ 이 수렴한다면 극한이 0이 될 것 같지 않은가?

학생들 : 예, 그렇게 될 것 같습니다.

교　사 : 자, 그렇다면 수열 $\{ a_n \}$ 의 극한 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 의 수렴성을 확인하자.

$$\text{먼저}\ a_n = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} - (1+\frac{1}{n})^n$$

$$< (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} - (1+\frac{1}{n+1})^n$$

$$= (1+\frac{1}{n+1})^n \cdot \frac{1}{n+1}\ \text{이 되지?}$$

학생 하나 : 아, 비교판정법(comparison test)이라는 방법을 이용하려고 하시는군요.

교　사 : 자, 부등식 $a_n < (1+\frac{1}{n+1})^n \cdot \frac{1}{n+1}$ 의 양변에 극한을 취하면,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n+1} \cdot (1+\frac{1}{n+1})^n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n+1})^n = 0\ \text{가 성립하지?}$$

학생 하나 : 예.

교　사 : 또 임의 n 에 대해 $a_n \geq 0$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$ 이 성립하지?

학생 하나 : 그래서 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이군요. 그것 참 흥미롭습니다.

교　　사 : 그러면, 다시 함수 $f(n)=(1+\frac{1}{n})^n$으로 돌아가자. 여기서 함수 f가 정의역에서 취할 수 있는 값들은 어떤 특성을 가지고 있는가?

학생 하나 : 정의역은 자연수 집합이고, 그래프는 앞에서 언급한 것처럼 점선으로 불연속성입니다.

교　　사 : 이 그래프를 연결된 점들의 집합으로 나타낼려면 n대신에 x를 대입하면 될 것 아닌가?

학생 하나 : 예 정의역 N을 실수집합 R로 바꾸면 가능할 것 같습니다.

교　　사 : 정의역 N을 R로 바꾸면 $f(n)=(1+\frac{1}{n})^n$의 그래프가 연속적으로 연결된 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$로 되지?

학생 하나 : 예.

교　　사 : $\{f(n)=(1+\frac{1}{n})^n\}$ 은 증가하는 수열이고

$\{f(x)=(1+\frac{1}{x})^x\}$ 은 증가하는 망(網)인데 이 수열의 극한과 망의 극한이 같을까? 다를까?

학생 하나 : 집합 $\{(n,\ f(n))\mid n\in N\}$ 은 불연속점들의 집합이고,

$\{(x,\ f(x))\mid x\in R\}$ 은 연속점들의 집합이며,

$\{(n,\ f(n))\mid n\in N\}$ 은 $\{(x,\ f(x))\mid x\in R\}$ 의 진부분집합인 것을 알 수 있습니다.

교　　사 : 그런데 " $n\to\infty$ 와 $x\to\infty$ 는 서로 어떤 관계가 있는가?

학생 하나 : 임의의 자연수 n보다 큰 실수 x가 존재하며, 역으로 임의 실수 x보다 큰 자연수 n가 존재하므로 서로 동치관계에 있다고 할 수 있읍니다.

교　사 : 그렇다면 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$을 기대할 수도 있겠군.

학생 하나 : 예.

교　사 : 먼저 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$라 두자. $x\to\infty$라고 가정하면 x가 충분히 큰 어떤 양의 실수라고 가정할 수 있는가?

학생 하나 : 예 !

교　사 : $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$를 증명하기 위해서 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$를 이용하자, 그렇게 하기 위해선 임의의 고정된 실수 x보다 작은 자연수 n을 잡아서 부등식 $n \le x < n+1$를 세우자.

부등식 $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n}$ 이 성립므로

부등식 $1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n}$ 을 얻는다.

따라서 $(1+\frac{1}{n+1})^n < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$이 된다.

즉, $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} \cdot (1+\frac{1}{n+1})^{-1} < (1+\frac{1}{x})^x$

$< (1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})$이 된다.

여기서 $x\to\infty$이면 $n\to\infty$이고, 또

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$, $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = e$ 이며

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1$, $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{-1} = 1$ 이므로

$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ 이 된다.

한편, $x\to-\infty$인 경우에도, $x=-y$라 하면 $y\to\infty$이고

$$(1+\frac{1}{x})^x=(1-\frac{1}{y})^{-y}=(\frac{y-1}{y})^{-y}=(\frac{y}{y-1})^y$$

$$=(1+\frac{1}{y-1})^y=(1+\frac{1}{y-1})^{y-1}\cdot(1+\frac{1}{y-1})$$ 이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y-1})^{y-1}\cdot(1+\frac{1}{y-1})=e$$ 이

된다.

학생 하나 : 정말 많은 결과를 얻을 수 있군요.

교　　사 : 자, 이제 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$과 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ 및

$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x$가 똑같이 e라는 사실을 확신하는가?

학생 하나 : 예, 그리고, 앞에서 $(1+\frac{1}{10000})^{10000}$의 값이 $2.71828\cdots$ 이므로

$f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$의 범위는 $[2.7,\ 3]$으로 제한할 수 있겠네요.

교　　사 : 그렇지

학생 하나 : 그렇다면 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$의 실제값을 어떻게 구하지요?

교　　사 : a, b가 $0\le a<b$를 만족하는 실수들 일 때 부등식

$$\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a}<(n+1)b^n$$ (n은 임의 자연수)------------(1-2)

이 성립한다는 것은 알려져 있는 내용이다.[4]

학생 하나 : 증명은 그렇게 어렵지 않을 것 같습니다.

교 사 : 부등식 (1-2)을 이용해서 존슨바우(Johnsonbaugh)[3]가 임의 자연수 n 에 대해 $2 \le (1+\frac{1}{n})^n \le 4$ 임을 증명했지,

따라서 양변에 극한을 취하면,

$2 \le \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \le 4$ 가 성립하지

이 증명은 1862년 포트(Fort)가 [2]에서 보인 것을 존슨바우(Johnsonbaugh)가 [9]에서 다시 증명한 것이지, 여기서 $e=2.71821828\cdots$ 라고 소숫점 8째 자리까지 소개하고 있어.

학생 하나 : 쉬운 일이 아니군요.

교 사 : 자, 이제 e가 무리수인지 혹은 무리수가 아닌지에 대해 조사할 필요가 있구나. 우선 무리수란 무엇인가를 확인하자.

학생 하나 : 예, 무리수란 $\frac{p}{q}$ (여기서 p, q는 서로소인 자연수) 꼴로 나타낼 수 없는 수를 말합니다.

교 사 : 그렇다면 $e=\frac{p}{q}$ 꼴이 되는지, 안되는지를 공부해야겠군,

$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$은 분수형태가 아니므로 e 가 무리수임을 증명하기 위해 먼저 e가 분수들의 합의 형태로 주어지는지, 어떤지를 확인해 보자.

학생 하나 : 그것은 매우 좋은 방법입니다.

교 사 : 우선 $e=e^1$ 임을 알겠구나

여기서 지수 1은 상수인데 이 상수 대신에 변수 x를 대입하여 $y=e^x$라

는 지수함수를 생각할 수 있겠지

학생 하나 : 그렇다면 $y=e^x$의 특성을 연구하여 $x=1$일 때 e의 특성을 알아보는 것이 좋겠습니다.

교　　사 : 자, 그렇다면 $y=e^x$의 그래프가 어떤가를 먼저 생각해보자.

학생 하나 : $x=0$일 때 $y=e^0=1$입니다.

따라서 $y=e^x$의 그래프는 (0, 1)를 지납니다.

교　　사 : 그러면 (0,1)를 지나면서 이 함수는 계속 증가할 것인가? 감소할 것인가?

학생 하나 : 도함수 $y'=e^x$ 가 양수이므로 $y=e^x$는 증가합니다.

학생 둘 : x가 음수라도 e^x은 0이상의 수입니다.

학생 셋 : x가 $+\infty$에 수렴하면 $e^x \to \infty$이고, x가 $-\infty$에 수렴하면 $e^x \to 0$ 입니다.

학생 넷 : $y=e^x$는 아래로 볼록합니다.

왜냐하면 모든 실수 x에 대해 $y''=e^x>0$이기 때문입니다.

교　　사 : 그러면, 여러분은 $y=e^x$의 그래프을 어느정도 상상할 수 있겠구나.

학생 하나 : 예.

교　　사 : $y=e^x$를 지수함수(exponential function)라고 하는데, 이 함수는 테일러(Taylor) 급수 전개가능하며 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$으로 나타낼 수 있다.

따라서 $x=1$일 때 $e=e^1$이므로 무리수 e 도

$e^1=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\cdots$로 급수전개 가능하다.

학생 하나 : 선생님! $e=\sum \frac{1}{n!}$의 증명은 다른 방법으로 가능하지 않을까요?

교　　사 : 어떤 방법이 있겠는가?

학생 하나 : $e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$에서 $(1+\frac{1}{n})^n$을 이항 정리하여 다항식으로 나타낼 수 있지 않습니까?

교　　사 : 그렇지.

학생 하나 : 극한 개념을 함께 쓰면 가능하겠습니다.

교　　사 : 그러면, $a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$이라 하고 $b_n=(1+\frac{1}{n})^n$이라 하자.

이항 정리(binomial theorem)에 의해서

$$b_n=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$\leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}=a_n,$$ n은 임의 자연수, 가 성립하는구나.

학생 하나 : 양변에 극한을 취하면

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\lim_{n\to\infty}b_n\leq\lim_{n\to\infty}a_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{-}3)$$

이 되는군요.

교　　사 : 부등식 (1-3)의 역은 어떻게 증명할까?

학생 하나 : 먼저 $m\leq n$을 만족하는 임의 자연수 m, n에 대하여

$$C_{m,n}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots\frac{1}{m!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{m-1}{n})$$

이라 하면,

$$b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

이므로 $b_n \geq C_{m,n}$이 성립합니다.

따라서 임의 고정된 m에 대해서

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} b_n \geq \lim_{n\to\infty} C_{m,n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\right\}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!} = a_m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{-}4)$$

이 성립합니다. 임의 자연수 m에 대해 $e \geq a_m$이므로 역시 부등식(1-4)의 양변에 극한을 취하면,

$$e \geq \lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to\infty}\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!}\right)$$이 되어

$$e \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$ 이 성립합니다.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(1-5)

교　　사 : 그래서 부등식(1-3)와 (1-5)에 의해서

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$가 성립하는군.

학생 하나 : 즉, 무리수 e를 무한급수 형태로 나타낼 수 있다는 이야기이지요?

교　　사 : 그렇지.

학생 하나 : 그렇다면, e는 유리수의 무한 합으로 나타낼 수 있다는 것인데, 이 유리수의 무한 급수형태를 이용하여 e가 무리수라는 사실을 증명하는 것이 훨씬 쉬울 것 같습니다.

교　　사 : 그렇다면 e 가 무리수라는 증명을 시작하자. 어떤 증명방법을 택할까?

학생 하나 : e 가 유리수 $\frac{p}{q}$ 라고 가정하여 모순(contradiction)을 유도하는 것이 흔한 방법이지요.

교　　사 : 그렇다면 간접법을 이용하여 증명하도록 하자.

먼저 $e=\frac{p}{q}$ 라 하자. 단 여기서 p, q는 정수이고 $q\neq 0$, $q\geq 2$라 하면 되겠지?

학생 하나 : 아, $q\geq 2$ 이군요.

교　　사 : $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 의 양변에 $q!$를 곱하면

$$q!\times e=q!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)+\frac{1}{q+1}$$

$$+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots\cdots$$ 가 되지 않겠니?

학생 하나 : 그러면, 좌변의 $q!\cdot e$ 는 정수이고 우변의

$q!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)$도 정수가 됩니다.

교　　사 : 그렇다면, 만일 $\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots$이 정수가 아니라는 것을 보인다면 모순이 성립하겠지?

학생 하나 : 아, 예! 그렇군요.

교　　사 : $\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots$이 정수가 아닌가?

학생 하나 : $\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}+\cdots$

$$< \frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+1)}+\frac{1}{(q+1)(q+1)(q+1)}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{q+1}}{1-\frac{1}{q+1}}=\frac{q+1}{(q+1)(q+1-1)}=\frac{1}{q}<1 \text{이므로}$$

양수 $\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)}+\cdots$은 정수가 아닙니다.

따라서 $e=\frac{p}{q}$가 유리수라는 것은 모순입니다.

교　사 : 어렵지는 않지만, 정말 잘 해결하는구나!
자, 그러면 이제는 e 의 값이 유일(唯一)하다는 것을 보이기로 하자.
$\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$는 무엇을 의미하느냐?

학생 하나 : $\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$는 곡선 $y=\frac{1}{t}$과 $t=1$, $t=2$로 둘러싸인 부분의 면적입니다.

교　사 : 그렇다면 $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ (단, $x>1$)은 곡선 $y=\frac{1}{t}$과 $t=1$, $t=x$
둘러싸인 부분의 면적이겠군.

학생 하나 : 그렇습니다.

교　사 : $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt=[\ln t]_1^x=\ln x-\ln 1$

$$=\ln x-0=\ln x \text{ 인데}$$

$\ln x=1$ 을 만족하는 x가 바로 e 이구나.

학생 하나 : 그러니까 $y=\frac{1}{t}, t=1, t=x$ 로 둘러 싸인 부분의 면적이 1인 x의 값이 바로 e 이군요.

학 생 둘 : 그런데 $\int_1^x \frac{1}{t}dt=1$을 만족하는 x가 유일하다는 것을 어떻게 설명할 수 있습니까?

교 사 : $\ln x=\int_1^x dt$ 로 정의된 자연 로그함수(natural logarithm function)가 첫째, 구간$(0,\ \infty)$에서 미분 가능하고, 따라서 연속이며 둘째, $\ln 1=0$ 이며, 셋째, $\ln 4>1$ 이므로, 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 $\ln x=1$되는 유일한 값 $x=e$를 1과 4사이에서 갖는다

학생 하나 : 아 그렇군요!

교 사 : 자 이제 마지막으로 우리가 공부한 것을 정리하기로 하자.

현재까지 우리는 무리수 e가 단 하나 존재함을 보였으며, 그것은 무한급수 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$로 전개 가능하며, $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 혹은 $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ 또는 $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x$로 나타낼 수 있다.

한편 e는 등식 $\int_1^x \frac{1}{t}dt=1$를 만족하는 x의 값이기도 한다.

학 생 들 : 너무나 즐거운 학습시간이었습니다.

교 사 : 지수함수 $y=e^{kx}$는 $k>0$일 때 성장을 $k<0$일 때 쇠퇴를 나타내는 우리 생활과 아주 밀접한 함수인데, 그 응용부분은 다음 시간에 논하기로 하자.

학 생 들 : 감사합니다.

Ⅲ. 결 론

피교육자에게 수학이 마치 이론적 체계인 산물을 기억하고 이용하는 수단인 것으로 가르쳐서 그들을 응용문제를 풀이하는 수동적 학습자로 키우거나, 공식에 나오는 변수에 수치를 대입하는 기계적 학습자로 만드는 것이 요즈음의 수학교육 실태이다. 학습 현장에서 이러한 수동적이며 기계적인 수준의 수학교육을 지속적으로 하게 되면 결국에는 그들에게 수학의 본성(nature)을 거의 일깨워 주지 못할 뿐만 아니라, 오히려 그들의 의식속에 잠재되어 있는 상상력과 직관력의 발전을 억제시켜 참된 수학적 능력을 퇴행시키는 결과를 초래할 것이다. 특히, 아동 및 청소년에게 주어져야 할 수학적 개념과 의미는 수학적 결과(product)를 찾아 이용하는 것과는 본질적으로 다르다. 그들의 세계는 상상의 세계이며, 이 상상이 점차로 논리화되어가야 한다. 그들에게 주어져야 할 지식은 이야기 형식의 지식이며, 자신이 접하는 세계의 사물과 가치를 상상력으로 파악하는 지식의 단계이다. 그러므로 피교육자의 정신을 발전시켜 나가는 데 있어서, 수학 교육은 상상력을 이성의 규칙에 맞추어 점진적으로 발전시켜야 하며, 이성의 규칙에 익숙하기 전에 상상력을 최대한으로 발전시키는 것을 염두에 두어야 한다.

수학의 과정적 특성과 활동주의적 교수 학습이론은 완성된 생산품으로서의 수학내용의 전달이라는 전통적인 관념에 끊임없이 도전할 필요가 있다. 학습자의 직관력을 향상시키며, 동시에 그들의 수학적 구조를 인식하는 과정을 도우는 것이 바른 수학교육의 한 방법이다. 발생적 원리를 바탕으로 구성주의적 입장에서 수학교육을 하는 것이 하나의 바람직한 수학 교수 방법이다. 구성주의 이론을 바탕으로 한 교수법(敎授法, didactics)은 학생들의 활동에 중점을 두므로 교육자의 활동을 더욱 더 요구한다 [5]. 구성주의 관점에서 가장 중요한 것은 학습자의 주체적 활동이다. 즉 교수의 대상은 없다. 단지 학습의 대상이 있을 뿐이다. 학생들의 구성주의적 활동의 핵심은 언어적 경험을 포함한 그들만의 경험에 의해 생긴 의미를 만드는 것으로 구성되었다. 본 논문은 교수의 대상이 아닌 학습의 대상인 학습자들을 중심으로 무리수 e의 개념지도를 대화형식으로 구성주의적 입장에서 다루었다.

참 고 문 헌

[1]. 김치영, 박평우, 이창구, 고등학교 수학 Ⅱ(하), 웅진출판사, 1996.

[2]. G. Chrystal, Textbook of Algebra, Vols Ⅰ and Ⅱ, 7th ed., Chelsea, New York, 1964.

[3]. R. Johnsonbaugh, Another proof of an estimate for e, Amer. Math. Mo., 81(1974), 1011-1012, Reprinted in T. Apostol et al., Selected Papers on Precalculus, 107-108.

[4]. R. Johnsonbaugh and W. E. Pfaffenberger, Foundations of Mathematical Analysis, Barcel Dekker, Inc., New York, 1981.

[5]. L. Moreno-Armella and G. Waldegg, Constructivism and mathematical education, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., Vol, 24, No, 5, (1993) 653-661.